① F je neklesající

$x<y \overset{?}{\Rightarrow} F(x) \le F(y)$

$P(X \le x) \le P(X \le y) = P(X \le x) + \underbrace{P(x < X \le y)}_{\ge 0}$

$\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le y\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le x\} \cup \{\omega \in \Omega;\ x < X(\omega) \le y\}$ nesluč.

② $\lim_{x\to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

$\lim_{x\to \infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \le x) = P(\Omega) = 1$

spojitost zprava:

$\lim_{x\to a^+} F(x) \overset{?}{=} F(a)$

$\lim_{x\to a^+} P(X \le x) = P(X \le a)$ ✓

Pozn.: zleva

$\lim_{x\to a^-} F(x) = F(a) - P(X=a)$

4 20-14:02

Náhodné veličiny | Typy diskrétních náhodných veličin | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Vlastnosti distribuční funkce

Věta

Nechť X je náhodná veličina, $F(x)$ je její distribuční funkce.

1. *F je neklesající.*
2. *F je zprava spojitá, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.*
3. *Je-li X diskrétní s hodnotami $x_1 < \dots < x_n$, pak je $F(x)$ po částech konstantní, $F(x) = \sum_{x_i \le x} \underbrace{P(X = x_i)}_{f(x_i)}$ a $F(x) = 1$ kdykoliv $x \ge x_n$.*
4. *Je-li X spojitá, pak je $F(x)$ diferencovatelná a její derivace se rovná hustotě X, tj. platí $F'(x) = f(x)$.*

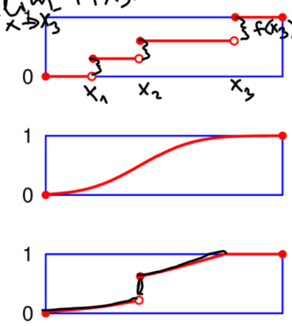
③ zřejmé ④ bez Dk.

4 20-14:18

Náhodné veličiny | Typy diskrétních náhodných veličin | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Distribuční funkce - příklady

$f(x_3) = F(x_3) - \lim_{x\to x_3^-} F(x)$



4 20-14:19

Obdobně definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné **vektory**. Hovoříme také o **simultánních (sdružených) pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.

Pro dvě proměnné (vektor (X, Y) náhodných veličin):

$$f(x,y) = \begin{cases} P(X = x_i \wedge Y = y_i) & x = x_i \wedge y = y_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

u diskrétních a pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$ pro spojité:

$$P(-\infty < X \le a, -\infty < Y \le b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Marginální rozložení pro jednu z proměnných obdržíme tak, že přes ostatní posčítáme nebo zintegrujeme.

Náhodné veličiny X a Y jsou **stochasticky nezávislé**, jestliže je jejich simultánní distribuční funkce

$$F(x,y) = G(x) \cdot H(y)$$

kde H a G jsou distribuční funkce veličin X a Y.

4 20-14:23

Náhodné veličiny | Typy diskrétních náhodných veličin | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Rovnoměrné (diskrétní) rozdělení popisuje náhodnou veličinu, která může nabývat konečně mnoha hodnot se stejnou pravděpodobností. $X \sim Rd(6)$ [hod kostkou]

Alternativní rozdělení popisuje pokus se dvěma možnými výsledky, často nazývanými *zdar*, resp. *nezdar*. Náhodná veličina $X \sim A(p)$ nabývá hodnoty 1 *(zdar)* s pravděpodobností p. Distribuční a pravděpodobnostní funkce jsou tedy tvaru:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} p & t = 1 \text{ zdar} \\ 1-p & t = 0 \text{ nezdar} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Binomické rozdělení $Bi(n,p)$ odpovídá n–krát nezávisle opakovanému pokusu popsanému alternativním rozdělením, přičemž naše náhodná veličina měří počet zdarů. Je tedy

$$f_X(t) = \begin{cases} \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} & t \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

4 20-14:27

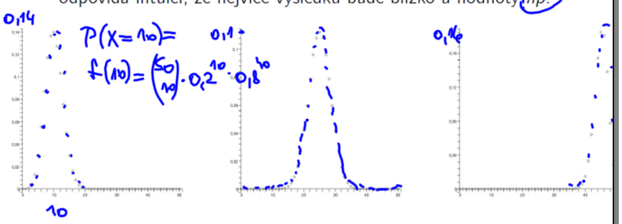
Náhodné veličiny | Typy diskrétních náhodných veličin | Typy spojitých náhodných veličin | Funkce náhodných veličin

Binomické rozdělení

Na obrázku jsou pravděpodobnostní funkce pro $Bi(50, 0.2)$, $Bi(50, 0.5)$ a $Bi(50, 0.9)$. Rozdělení pravděpodobnosti dobře odpovídá intuici, že nejvíce výsledků bude blízko u hodnoty np.

$P(X=10) = 0{,}1$

$f(10) = \binom{50}{10} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$



4 20-14:32

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{r_n}{k} \cdot \frac{(n-1)^{r_n-k}}{n^{r_n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = \lambda$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\cdots(r_n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-1)^{r_n}}{(n-1)^k\, n^{r_n}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\cdots(r_n-k+1)}{(n-1)^k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r_n}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r_n} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-\frac{r_n}{n}}{r_n}\right)^{r_n}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{r_n\to\infty} \left(1 + \frac{-\lambda}{r_n}\right)^{r_n}$$

$$\boxed{e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n} \qquad = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Pozn.: $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - c}{n-1} = \lim \frac{r_n}{n-1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n-1}}_{=0} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n-1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{r_n} - \frac{1}{r_n}} = \lambda$$

4 20-14:43

Geometrické rozdělení má náhodná veličina $X \sim \mathrm{Ge}(p)$, která udává celkový počet *nezdarů*, které v posloupnosti opakovaných pokusů předcházejí prvnímu *zdaru*, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je rovna p.

$$f_X(t) = \begin{cases} (1-p)^t \cdot p & \text{pro } t = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Hypergeometrické rozdělení. Mějme N předmětů, z nichž právě M má danou vlastnost. Z těchto N předmětů náhodně vybereme n předmětů bez vracení. Náhodná veličina $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$ udává počet vybraných prvků s danou vlastností. Zřejmě tato náhodná velišina může nabývat pouze celočíselných hodnot z intervalu $[\max\{0, M-N+n\}, \min\{n, M\}]$. Pro t z tohoto intervalu pak

$$f_X(t) = \frac{\binom{M}{t}\binom{N-M}{n-t}}{\binom{N}{n}}.$$

4 20-15:03

Příklad

Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r\rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

Řešení

Určeme nejprve distribuční funkci F (pro $0 \leq d < \frac{4}{3}\pi r^3$)

$O = \frac{4}{3}\pi X^3$ objem

$$F(d) = P\left[\frac{4}{3}\pi X^3 \leq d\right] = P\left[X \leq \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right] = \frac{\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}}{r},$$

$P(O \leq d)$

celkem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi r^3}}\, x^{\frac{1}{3}} & \text{pro} \quad 0 < x < \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

Derivováním pak obdržíme hustotu pravděpodobnosti.

4 20-15:23

$$Z^2 < x \Leftrightarrow (Z > 0 \wedge Z < \sqrt{x}) \vee (Z < 0 \wedge Z > -\sqrt{x})$$

Příklad (rozdělení $\chi^2(1)$)

Nechť Z má normované normální ~~rozdělení~~. Určete hustotu transformované náhodné veličiny $X = Z^2$.

Řešení

Zřejmě je pro $x \leq 0$ distribuční funkce nulová, pro $x > 0$ dostáváme: $F_X(x) = P[Z^2 < x] = P[-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}] =$

$P(X < x)$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \overset{*}{=} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

sym. hustota

a derivací podle x dostaneme hustotu $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$.
Rozdělení náhodné veličiny s touto hustotou se nazývá (Pearsonovo) χ^2 rozdělení s jedním stupněm volnosti a značí se $X \sim \chi^2(1)$.

$*$ subst. $t = z^2$, $z > 0 \Rightarrow z = \sqrt{t}$; $dt = 2z\,dz \Rightarrow dz = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$

4 20-15:29

$X \sim Bi(n, p)$

stř. hodnota $E(X) = n \cdot p$

rozptyl $D(X) = np(1-p)$

normalizace

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

$$\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} =: y$$

4 20-15:04