Matematika II – 10. týden
Metrické prostory - pokračování, důkaz konvergence Fourierových řad, konvoluce funcí

Jan Slovák

Masarykova univerzita

22. 4. – 26.4. 2013

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- Matematika drsně a svižně, učebnice v přípravě
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Doporučené čtení z učebnice

Teorie:

Základní čtení: odst. 7.17 – 7.18 (znění věty), 7.19 – 7.25, 7.27 – 7.28

Rozšiřující čtení: 7.18 (důkaz), 7.26, 7.29

Úlohy:

7.27 – 7.33.

Říkáme, že podmnožina $A \subset X$ v metrickém prostoru X je **hustá**, jestliže je uzávěrem A celý prostor X. Množina A je **řídká** v X, jestliže je $X \setminus \bar{A}$ hustá.

Zjevně je A hustá v X, jestliže každá otevřená množina v celém prostoru X má s A neprázdný průnik.
Ve všech případech L_p norem na funkcích na po částech spojitých funkcích je vcelku snadné vidět, že nejde o úplné metrické prostory.

Snadno se totiž stane, že cauchyovská posloupnost funkcí z našeho vektorového prostoru $\mathcal{S}^0[a, b]$ by měla mít za limitu funkci, která již v tomto prostoru nebude. Vezměme si třebas na intervalu $[0, 1]$ funkce f_n, které jsou nulové na $[0, 1/n)$ a rovny $\sin(1/x)$ na $[1/n, 1]$. Zjevně budou konvergovat ve všech L_p normách k funkci $\sin(1/x)$, ta ale do našich prostorů již nepatří.

Nechť X je metrický prostor s metrikou d, která není úplná. Metrický prostor $\tilde{X}$ s metrikou $\tilde{d}$ takový, že $X \subset \tilde{X}$, d je zúžením $\tilde{d}$ na podmnožinu X a uzávěrem $\bar{X}$ je celý prostor $\tilde{X}$, se nazývá **zúplnění metrického prostoru** X.
Prakticky stejným postupem, jak jsme vytvořili reálná čísla z racionálních, můžeme nyní najít zúplnění libovolného (neúlného) metrického prostoru X. A půjde to udělat jednoznačně.

Jednoznačnost zúplnění

O zobrazení $\varphi : X_1 \to X_2$ mezi metrickými prostory s metrikami d_1 a d_2 řekneme, že je **izometrie**, jestliže pro všechny prvky $x, y \in X$ platí $d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$.
Každá izometrie je samozřejmě bijekcí na svůj obraz (plyne z vlastnosti, že vzdálenost liovolných různých prvků je nenulová) a příslušné inverzní zobrazení je také izometrie.
Uvažme nyní dvě vložení hustých podmnožin $\iota_1 : X \to \tilde{X}_1$ a $\iota_2 : X \to \tilde{X}_2$ do dvou zúplnění prostoru X a pišme d, d_1 a d_2 pro příslušné metriky. Evidentně je na husté podmnožině $\iota_1(X) \subset \tilde{X}_1$ dobře definované zobrazení

$$\varphi : \ \iota_1(X) \xrightarrow{\iota_1^{-1}} X \xrightarrow{\iota_2} \tilde{X}_2 \ .$$

Jeho obrazem je hustá podmnožina $\iota_2(X) \subset \tilde{X}_2$ a toto zobrazení je navíc zjevně izometrií. Stejně tak funguje i opačné zobrazení $\iota_1 \circ \iota_2^{-1}$.

Každé izometrické zobrazení samozřejmě zobrazuje cauchyovské posloupnosti na cauchyovské posloupnosti. Zároveň budou takové cauchyovské posloupnosti konvergovat ke stejnému prvku v zúplnění právě, když totéž bude platit o jejich obrazech v izometrii φ.
Je-li tedy takové φ definované na husté podmnožině X metrického prostoru $\tilde{X}_1$, jistě bude mít jednoznačné rozšíření na celé $\tilde{X}_1$ s hodnotami v uzávěru obrazu $\varphi(X)$, tj. $\tilde{X}_2$.
Podle předchozí úvahy tedy existuje jediné zozšíření φ na zobrazení $\tilde{\varphi} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, které je bijektivní izometrií. Jsou tedy v tomto smyslu skutečně $\tilde{X}_1$ a $\tilde{X}_2$ stejné.

Věta o zúplnění

Theorem

Nechť X je metrický prostor s metrikou d, která není úplná. Pak existuje jeho zúplnění $\tilde{X}$ s metrikou $\tilde{d}$ a to jednoznačně až na bijektivní izometrie.

Banachova věta o kontrakci

Zobrazení $F: X \to X$ na metrickém prostoru X s metrikou d se nazývá **kontrahující zobrazení**, jestliže pro nějakou reálnou konstantu $0 \le C < 1$ a všechny prvky x, y v X platí

$$d(F(x), F(y)) \le C\, d(x, y).$$

Theorem

Je-li F kontrahující zobrazení na úplném metrickém prostoru X, pak existuje jeho pevný bod $z \in X$, tj. $F(z) = z$.

Cantorova věta o průniku

Pro libovolnou množinu A v metrickém prostoru X s metrikou d nazýváme reálné číslo

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

průměrem množiny A. O množině A říkáme, že je **omezená**, jestliže $\operatorname{diam} A < \infty$.

Theorem

Je-li $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_i \supset \dots$ neklesající řetězec neprázdných uzavřených podmnožin v úplném metrickém prostoru X a $\operatorname{diam} A_i \to 0$, *pak existuje právě jeden bod $x \in X$ patřící do průniku všech A_i.*

Bairova věta o průniku hustých množin

Theorem

Je-li X úplný metrický prostor, pak průnik libovolného spočetného systému otevřených hustých množin A_i je množina hustá v metrickém prostoru X.

Vnitřním bodem podmnožiny A v metrickém prostoru je takový prvek, který do A patří i s nějakým svým ϵ–okolím.
Hraniční bod množiny A je takový prvek $x \in X$, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s A tak s doplňkem $X \setminus A$. Hraniční bod tedy může, ale nemusí patřit do samotné množiny A.
Otevřené pokrytí množiny A je takový systém otevřených množin $U_i \subset X$, $i \in I$, že jejich sjednocení obsahuje celé A.
Izolovaným bodem množiny A rozumíme prvek $a \in A$, který má v metrickém prostoru X ϵ–okolí, jehož průnik s A je právě jednobodová množina $\{a\}$.

Ohraničené a kompaktní množiny

Množina A prvků metrického prostoru se nazývá **ohraničená** nebo **omezená**, jestliže je její průměr konečný, tj. existuje kladné reálné číslo r takové, že $d(x, y) \leq r$ pro všechny prvky $x, y \in A$. V opačném případě je **neohraničená** nebo **neomezená**.

Metrický prostor X se nazývá **kompaktní**, jestliže v něm má každá posloupnost $x_i \in X$ podposloupnost konvergující k nějakému bodu $x \in X$.

Pro libovolné podmnožiny A, $B \subset X$ v metrickém prostoru X s metrikou d definujeme **vzdálenost**

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}.$$

Je-li $A = \{x\}$ jednobodová množina, hovoříme o vzdálenosti $\operatorname{dist}(x, B)$ bodu od množiny.

Řekneme, že je metrický prostor X **totálně omezený**, jestliže ke každému kladnému číslu $\epsilon > 0$ existuje konečná množina A taková, že

$$\mathrm{dist}(x, A) < \epsilon$$

pro všechny body $x \in X$. Připomeňme, že metrický prostor je **omezený**, jestliže má celé X konečný průměr.
Je okamžitě vidět, že totálně omezený prostor je také omezený. Skutečně, průměr konečné množiny je vždy konečný a jeli A množina z definice totální omezenosti příslušná k ϵ, pak vzdálenost dvou bodů $d(x, y)$ můžeme vždy shora odhadnout součtem $\mathrm{dist}(x, A)$, $\mathrm{dist}(y, A)$ a $\mathrm{diam}\, A$, což je konečné číslo.
V případě metriky na podmožině konečněrozměrného euklidovského prostoru tyto pojmy splývají.

Theorem

Následující podmínky na metrický prostor X jsou ekvivalentní

1. *X je kompaktní,*
2. *každé otevřené pokrytí X obsahuje konečné pokrytí,*
3. *X je úplný a totálně omezený.*

Theorem

Uvažujme konečný interval $[a, b]$ *s délkou* $T = b - a$*. Dále nechť* f *je funkce s reálnými nebo komplexními hodnotami v* $\mathcal{S}^1[a, b]$ *(tj. po částech spojitá funkce s po částech spojitou první derivací), periodicky rozšířená na celé* $\mathbb{R}$*. Potom platí:*

1. *Částečné součty* s_N *její Fourierovy řady konvergují bodově k funkci*
$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{y \to x_+} f(y) + \lim_{y \to x_-} f(y)\Big).$$
2. *Je-li navíc* f *spojitá periodická funkce s po částech spojitou derivací, pak je bodová konvergence její Fourierovy řady stejnoměrná.*
3. L_2*–vzdálenost* $\|s_N - f\|_2$ *částečných součtů* s_N *Fourierovy řady od funkce* f *na* $\mathcal{S}^1[a, b]$ *vždy konverguje k nule při* $N \to \infty$*.*

Theorem

Nechť f_n*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *je ortogonální posloupnost funkcí Riemannovsky integrovatelných na* $I = [a, b]$ *a nechť* g *je libovolná funkce Riemannovsky integrovatelná v kvadrátu na* I*. Označme*

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b f_n(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

(1) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ *má ze všech lineárních kombinací funkcí* $f_1, \ldots, f_n$ *nejmenší vzdálenost od* g *výraz*

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x).$$

Theorem (pokračování)

(2) Řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$ *vždy konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

(3) Vzdálenost g *od částečných součtů* $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n f_n$ *jde v limitě k nule, tj.*

$$\lim_{k \to \infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Lemma (Hölderova nerovnost)

Pro pevné reálné číslo $p > 1$ a každé dvě n–tice nezáporných reálných čísel x_i a y_i platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q},$$

kde $1/q = 1 - 1/p$.

Dirichletovo jádro

$$s_N(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^{N} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega kx}\, \mathrm{e}^{i\omega kt}\, dx,$$

kde T je základní perioda, se kterou pracujeme a $\omega = 2\pi/T$. Můžeme přepsat

$$s_N(t) = \int_{-T/2}^{T/2} K_N(t-x) f(x)\, dx$$

a funkci

$$K_N(y) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{i\omega ky}$$

nazýváme **Dirichletovo jádro**.

Dirichletovo jádro je kouskem geometrické řady s poměrem členů $e^{i\omega y}$. Můžeme ji tedy přímo vyjádřit pro všechna $y \neq 0$

$$
\begin{aligned}
K_N(y) &= \frac{1}{T} \frac{e^{-iN\omega y} - e^{i(N+1)\omega y}}{1 - e^{i\omega y}} \\
&= \frac{1}{T} \frac{-e^{-i(N+1/2)\omega y} + e^{i(N+1/2)\omega y}}{e^{i\omega y/2} - e^{-i\omega y/2}} \\
&= \frac{1}{T} \frac{\sin((N+1/2)\omega y)}{\sin(\omega y/2)}.
\end{aligned}
$$

V bodě $y = 0$ samořejmě přímo vidíme $K_N(0) = \frac{1}{T}(2N+1)$.

V konečněrozměrných vektorových prostorech:

- vektory jsou dány v bázi souřadnicemi (zobrazení z konečné množiny do souřadnic)
- výběr jedné souřadnice je lineární zobrazení vektorů do skalárů (tzv. lineární forma), obecně je každá lineární forma zadána pomocí jednořádkových matic (vektorů v duálním prostoru) jako součet součinů hodnot formy $f = (f_1, \dots, f_n)$ na generátorech se souřadnicemi vektoru $x^T = (x_1, \dots, x_n)^T$.
- Složitější lineární zobrazení s hodnotami opět ve vektorových prostorech byla obdobně zadána maticemi.

Velice podobně umíme přistoupit k lineárním operacím na prostorech funkcí.

Pracujme opět s vektorovým prostorem $\mathcal{S}$ všech po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$. Lineární zobrazení $\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ se nazývají (reálné) **lineární funkcionály**. Jednoduché příklady:

- vyčíslení funkce (případně jejích derivací) v jednotlivých bodech:
$$f \mapsto L(f) = f(x_0)$$
- pomocí integrace zadáme integrální funkcionál s pomocí pevně zvolené funkce $g(x)$:
$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Funkce $g(x)$ zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci $f(x)$. Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s $g(x) = 1$ pro všechny body x.

Dobrou představu dává volba

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

To je funkce hladká na celém $\mathbb{R}$ s kompaktním nosičem v intervalu $(-a, a)$. Integrální funkcionál

$$L_y(f) = \int_a^b f(x)g(y-x)\,dx$$

je možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování" hodnot funkce f kolem bodu $x = y$ (funkce g má ve svém středu má hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti a na obě strany).
Ještě lepší volbou je z tohoto pohledu libovolná funkce g jejíž integrál přes celou reálnou osu je jednička.

Pohled na integrální funkcionál L_y jako na zprůměrované chování funkce f v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu $a = -\infty$, $b = \infty$. Místo prostoru $\mathcal{S}$ všech po částech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ budeme uvažovat po částech spojité a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce f v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr y může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce $f \mapsto \tilde{f}$:

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx.$$

Této operaci se říká **konvoluce funkcí** f a g, značíme ji $f * g$. Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém $\mathbb{R}$.

Pomocí transformace $t = z - x$ se snadno spočte

$$(f*g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)\,dx = -\int_{\infty}^{-\infty} f(z-t)g(t)\,dt = (g*f)(z),$$

je tedy konvoluce coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní.
Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument f je přenášenou informací, funkce g je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.