

# Matematika II – 3. týden

## Vlastnosti spojitých funkcí, derivace

Jan Slovák

Masarykova univerzita

4. 3. – 8.3. 2013

# Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Spojité funkce
- 3 Přírůstky do ZOO
- 4 Derivace
- 5 Vlastnosti derivací

## Kde je dobré číst?

- chystaná učebnice „Matematika drsně a svižně“, viz studijní materiály
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

## Doporučené čtení z učebnice

### **Teorie:**

Základní čtení – odst. 5.24 – 5.36

Rozšiřující čtení – tetokrát nic.

### **Úlohy:**

Volný výběr z úloh 5.59. – 5.100 na spojitost a derivace

Nechť  $f$  je reálná nebo komplexní funkce definovaná na intervalu  $A \subset \mathbb{R}$ . Říkáme, že  $f$  je **spojitá v bodě**  $x_0 \in A$ , jestliže je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce  $f$  je spojitá na  $A$ , jestliže je spojitá ve ve všech bodech  $x_0 \in A$ .

Všiměme si, že pro hraniční body intervalu  $A$  říká naše definice, že  $f$  v nich má být spojitá zprava, resp. zleva.

Z vět o limitách okamžitě vyplývá většina následujících tvrzení:

## Theorem

*Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce na intervalu  $A$ . Pak*

- 1 součet  $f + g$  je spojitá funkce*
- 2 součin  $f \cdot g$  je spojitá funkce*
- 3 pokud navíc  $g(x_0) \neq 0$ , pak podíl  $f/g$  je dobře definován v nějakém okolí  $x_0$  a je spojitý v  $x_0$ .*
- 4 pokud spojitá funkce  $h$  je definována na okolí hodnoty  $f(x_0)$ , pak složená funkce  $h \circ f$  je definována na okolí bodu  $x_0$  a je v  $x_0$  spojitá.*

## Důkaz.

Tvrzení (1) a (2) jsou zřejmá,

(3) Jestliže je  $g(x_0) \neq 0$ , pak také celé  $\epsilon$ -okolí čísla  $g(x_0)$  neobsahuje nulu pro dostatečně malé  $\epsilon > 0$ . Ze spojitosti  $g$  pak vyplývá, že na dostatečně malém  $\delta$ -okolí  $x_0$  bude  $g$  neulové a podíl  $f/g$  tam bude tedy dobře definován. Pak bude ovšem i spojitý v  $x_0$  podle předchozí věty.

(4) Zvolme nějaké okolí  $\mathcal{O}$  hodnoty  $h(f(x_0))$ . Ze spojitosti  $h$  němu existuje okolí  $\mathcal{O}'$  bodu  $f(x_0)$ , které je celé zobrazeno funkcí  $h$  do  $\mathcal{O}$ . Do tohoto okolí  $\mathcal{O}'$  spojitě zobrazení  $f$  zobrazí dostatečně malé okolí bodu  $x_0$ . To je ale právě definiční vlastnost spojitosti a důkaz je ukončen. □

Nyní si vcelku snadno můžeme odvodit zásadní souvislosti spojitých zobrazení a topologie reálných čísel:

## Theorem

*Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce. Pak*

- 1 *vzor  $f^{-1}(U)$  každé otevřené množiny je otevřená množina,*
- 2 *vzor  $f^{-1}(W)$  každé uzavřené množiny je uzavřená množina,*
- 3 *obraz  $f(K)$  každé kompaktní množiny je kompaktní množina,*
- 4 *na libovolné kompaktní množině  $K$  dosahuje spojitě zobrazení maxima a minima.*



## Důkaz.

- (1) Uvažme  $x_0 \in f^{-1}(U)$ . Někaké okolí  $\mathcal{O}$  hodnoty  $f(x_0)$  je celé v  $U$ , protože je  $U$  otevřená. Proto existuje okolí  $\mathcal{O}'$  bodu  $x_0$ , které se celé zobrazí do  $\mathcal{O}$ , patří tedy do vzoru. Každý bod vzoru je tedy vnitřní a tím je důkaz ukončený.
- (2) Uvažme hromadný bod  $x_0$  vzoru  $f^{-1}(W)$  a posloupnost  $x_i$ ,  $f(x_i) \in W$ , která k němu konverguje. Ze spojitosti  $f$  zjevně vyplývá, že  $f(x_i)$  konverguje k  $f(x_0)$ , a protože je  $W$  uzavřená, musí i  $f(x_0) \in W$ . Zřejmě jsou tedy všechny hromadné body vzoru  $W$  ve  $W$  také obsaženy.
- (3) Zvolme otevřené pokrytí  $f(K)$ . Vzory jednotlivých intervalů jsou sjednoceními otevřených intervalů a tedy vytvoří pokrytí množiny  $K$ . Z něho lze vybrat konečné pokrytí a proto stačí konečně mnoho odpovídajících obrazů i k pokrytí množiny  $f(K)$ .
- (4) Protože je obrazem kompaktní množiny opět kompaktní množina, musí být obraz ohraničený a zároveň musí obsahovat svoje supremum i infimum. Odtud ale vyplývá, že tyto musí být zároveň maximem a minimem hodnot. □

## Důsledek

Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Potom

- 1 obraz každého intervalu je opět interval
- 2  $f$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$  nabývá všech hodnot mezi svou maximální a minimální hodnotou.

## Důkaz.

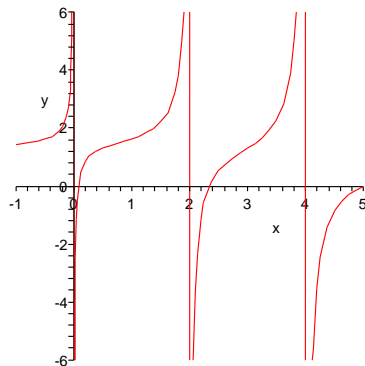
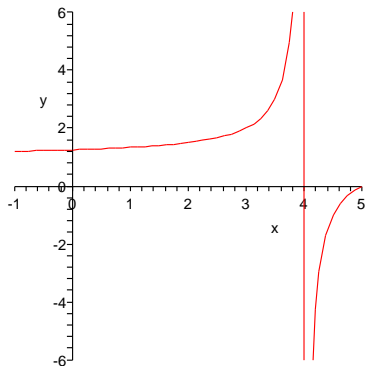
(1) Uvažme interval  $A$  a předpokládejme, že existuje  $y \in \mathbb{R}$  takový, že  $f(A)$  obsahuje body menší i větší než  $y$ , ale  $y \notin f(A)$ . Pak vzory otevřených množin  $A_1 = f^{-1}((-\infty, y))$  a  $A_2 = f^{-1}((y, \infty))$  pokrývají  $A$ . Tyto otevřené množiny jsou disjunktní a obě mají neprázdný průnik s  $A$ . Nutně tedy existuje  $x \in A$ , který neleží v  $A_1$ , je ale jejím hromadným bodem. Musí pak ležet v  $A_2$  a to u disjunktních otevřených množin není možné. Proto pokud nějaký bod  $y$  nepatří do obrazu intervalu, musí být zároveň všechny hodnoty buď větší nebo menší. Obrazem bude proto opět interval. Všimněme si, že jeho krajní body mohou a nemusí do obrazu patřit. Tvrzení (2) je přímým důsledkem (1). □

## Racionální funkce

Nechť  $f$  a  $g$  jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy  $a_n x^n + \dots + a_0$  s komplexními  $a_i \in \mathbb{C}$ , ale dosazujeme jen reálné hodnoty za  $x$ ). Pak funkce  $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu  $g$ . Takové funkce nazýváme **racionální funkce**.

Racionální funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen polynomů  $f$  i  $g$  (a v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.

$a = 0.$  $a = 1.6667$ 

$$h(x) = \frac{(x - 0.05a)(x - 2 - 0.2a)(x - 5)}{x(x - 2)(x - 4)}$$

s hodnotami  $a = 0$  a  $a = 5/3$ .

Obrázek vlevo tedy zobrazuje racionální funkci  $(x - 5)/(x - 4)$ .

## Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí  $x \mapsto x^n$  s přirozeným číslem  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Samozřejmý smysl má také funkce  $x \mapsto x^{-1}$  pro všechny  $x \neq 0$ . Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s  $n \in \mathbb{R}$ .

Pro  $n = -a$  s  $a \in \mathbb{N}$  definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu  $b^n = x$  pro  $n \in \mathbb{N}$  vyplývalo  $b = x^{\frac{1}{n}}$ . Je třeba ale ověřit, že taková  $b$  skutečně existují pro dané  $x$ . Předpokládejme  $x > 0$  a označme  $B$  množinu  $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0, y^n \leq x\}$ . To je zřejmě zhora ohraničená množina a lze ověřit, že pro  $b = \sup B$  skutečně platí požadovaná rovnost.

Zdůvodnili jsme tedy existenci  $x^a$  pro všechny  $x > 0$  a  $a \in \mathbb{Q}$ .

## Mocninná funkce – pokračování

Konečně, pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x > 1$  klademe

$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q}, y \leq a\}.$$

Pro  $0 < x < 1$  buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohrát s nerovnicí) nebo klademe přímo  $x^a = (\frac{1}{x})^{-a}$ . Pro  $x = 1$  je pak  $1^a = 1$  pro libovolné  $a$ .

Obecnou mocninnou funkci  $x \mapsto x^a$  máme tedy dobře definovanou pro všechny  $x \in [0, \infty)$  a  $a \in \mathbb{R}$ .

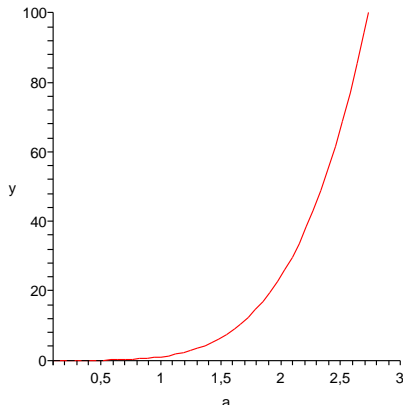
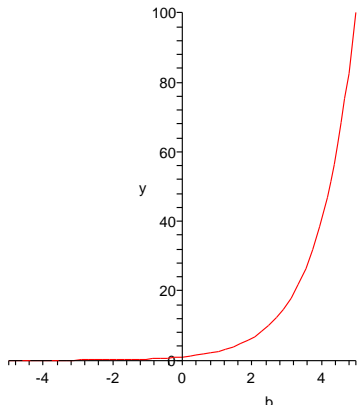
## Exponenciální funkce

Naši konstrukci funkce  $x^a$  ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné  $c > 0$  existuje dobře definovaná funkce na celém  $\mathbb{R}$ ,  $y \mapsto c^y$ . Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu  $c$** .

Na obrázcích vidíme funkce  $x \mapsto a^x$  a  $x \mapsto x^b$  pro jednu konkrétní hodnotu  $a = 2.5167$  a  $b = 4.5833$ .

$a = 2.5167$

$b = 4.5833$



Mocninné i exponenciální funkce jsou spojité na celých svých definičních oborech. Zároveň se ze spojitosti definice pomocí suprem množin hodnot zjevně přenáší základní vlastnosti platné pro racionální čísla,  $a$ ,  $x$ ,  $y$ :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$



## Definition

Nechť  $f$  je reálná nebo komplexní funkce s definičním oborem  $A \subset \mathbb{R}$  a  $x_0 \in A$ . Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak říkáme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  **derivaci**  $a$ . Píšeme často  $a = f'(x_0)$  nebo  $a = \frac{df}{dx}(x_0)$  případně  $a = \frac{d}{dx}f(x_0)$ .

Derivace funkce je **vlastní**, resp. **nevlastní**, když je takovou příslušná limita.

**Jednostranné derivace** (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

Z formulace definice lze očekávat, že  $f'(x_0)$  bude opět umožňovat dobře aproximovat danou funkci pomocí přímky

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Takto lze vnímat následující lemma, které říká, že nahrazením konstantního koeficientu  $f'(x_0)$  vhodnou spojitou funkcí dostaneme přímo hodnoty  $f$ .

### Lemma

*Reálná nebo komplexní funkce má v bodě  $x_0$  vlastní derivaci, právě když existuje na nějakém okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  funkce  $\psi$  spojitá v  $x_0$  a taková, že pro všechny  $x \in \mathcal{O}(x_0)$  platí*

$$f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0).$$

*Navíc pak vždy  $\psi(x_0) = f'(x_0)$ .*

## Důkaz.

Nejprve předpokládejme, že  $f'(x_0)$  je vlastní derivace. Pokud má  $\psi$  existovat, má jistě tvar  $\psi(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$  pro všechny  $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ . V bodě  $x_0$  naopak definujme hodnotu derivací. Pak jistě

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = f'(x_0) = \psi(x_0)$$

jak je požadováno.

Naopak, jestliže taková funkce  $\psi$  existuje, tentýž postup vypočte její limitu v  $x_0$ . Proto existuje i  $f'(x_0)$  a je  $\psi(x_0)$  rovna. □

# Geometrický význam derivace

Předchozí lemma lze názorně vysvětlit geometricky a tím popsat smysl derivace. Říká totiž, že na grafu funkce  $y = f(x)$ , tj. na příslušné křivce v rovině se souřadnicemi  $x$  a  $y$ , poznáme, zda existuje derivace podle toho, jestli se spojitě mění hodnota směrnice sečny procházející body  $[x_0, f(x_0)]$  a  $[x, f(x)]$ . Pokud ano, pak limitní hodnota této směrnice je hodnotou derivace.

## Corollary

*Má-li reálná funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  derivaci  $f'(x_0) > 0$ , pak pro nějaké okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  platí  $f(b) > f(a)$  pro všechny body  $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$ ,  $b > a$ .*

*Je-li derivace  $f'(x_0) < 0$ , pak naopak pro nějaké okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  platí  $f(b) < f(a)$  pro všechny body  $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$ ,  $b > a$ .*

## Důkaz.

Uvažme první případ. Pak podle předchozího lematu platí  $f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$  a  $\psi(x_0) > 0$ . Protože je ale  $\psi$  v  $x_0$  spojitá, musí existovat okolí  $\mathcal{O}(x_0)$ , na kterém bude  $\psi(x) > 0$ . Pak ale s rostoucím  $x$  nutně poroste i hodnota  $f(x)$ .

Stejná argumentace ověří i tvrzení se zápornou derivací. □

Funkce, které mají vlastnost  $f(b) > f(a)$  kdykoliv  $b > a$  pro nějaké okolí bodu  $x_0$  se nazývají **rostoucí v bodě**  $x_0$ . Funkce rostoucí ve všech bodech nějakého intervalu se nazývá **rostoucí na intervalu**. Podobně je funkce **klesající v bodu**, resp. **klesající na intervalu**, jestliže  $f(b) < f(a)$  kdykoliv je  $a < b$ .

Funkce která má v bodě nenulovou konečnou derivaci je v tomto bodě buď rostoucí nebo klesající podle znaménka této derivace.

# Pravidla pro počítání

## Theorem

*Nechť  $f$  a  $g$  jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom*

- 1 *funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  spojitá,*
- 2 *pro každé reálné nebo komplexní číslo  $c$  má funkce  $x \mapsto c \cdot f(x)$  derivaci v  $x_0$  a platí*

$$(cf)'(x_0) = c(f'(x_0)),$$

- 3 *funkce  $f + g$  má v  $x_0$  derivaci a platí*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

# Pravidla pro počítání

## Theorem

*Nechť  $f$  a  $g$  jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom*

- 1 *funkce  $f \cdot g$  má v  $x_0$  derivaci a platí*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

- 2 *Je-li dále  $h$  funkce definovaná na okolí obrazu  $y_0 = f(x_0)$ , která má derivaci v bodě  $y_0$ , má také složená funkce  $h \circ f$  derivaci v bodě  $x_0$  a platí*

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Intuitivně:

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při  $y = h(x) = f(x) + g(x)$  je přírůstek  $y$  dán součtem přírůstků  $f$  a  $g$  a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.

U součinu musíme být malinko pozornější. Pro  $y = h(x) = f(x)g(x)$  je přírůstek

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))g(x) \end{aligned}$$

Nyní ale když budeme zmenšovat přírůstek  $\Delta x$ , jde vlastně o výpočet limity součtu součinů a o tom už víme, že jej lze počítat jako součet součinů limit. Proto z naší formulky lze očekávat pro derivaci součinu  $fg$  výraz  $fg' + f'g$ .



Pro derivaci složené funkce  $g = h \circ f$ , kde definiční obor funkce  $z = h(y)$  obsahuje obor hodnot funkce  $y = f(x)$ , je to podobné.

$$g' = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Můžeme tedy očekávat, že pravidlo pro výpočet bude  $(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$ .

### Důsledek

Nechť  $f$  a  $g$  jsou reálné funkce, která mají v bodě  $x_0$  vlastní derivace a  $g(x_0) \neq 0$ . Pak pro funkci  $h(x) = f(x)(g(x))^{-1}$  platí

$$h'(x_0) = \left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

## Důkaz.

Nejprve pro  $h(x) = x^{-1}$  přímo z definice:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x - \Delta x}{\Delta x(x^2 + x\Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}$$

Z pravidel pro počítání limit okamžitě dostáváme

$$h'(x_0) = -x^{-2}.$$

Nyní pravidlo pro derivaci složené funkce říká, že  $(g^{-1})' = -g^2 \cdot g'$  a konečně pravidlo pro derivaci součinu nám dává právě kýžený vzorec:

$$(f/g)' = (f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = \frac{f'g - gf'}{g^2}.$$



## Derivace inverzních funkcí

Pokud k dané funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  inverzní funkce  $f^{-1}$  existuje (nezaměňujeme značení s funkcí  $x \mapsto (f(x))^{-1}$ ), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}},$$

a druhý již pak platí také. Pokud je  $f$  definováno na podmnožině  $A \subset \mathbb{R}$  a  $f(A) = B$ , je existence  $f^{-1}$  podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními  $\text{id}_A$  resp.  $\text{id}_B$  na pravých stranách.

Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci  $f$  je i  $f^{-1}$  diferencovatelná, pravidlo pro derivaci složené funkce nám říká

$$1 = (\text{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně  $f'(x)$  v takovém případě nemůže být nulové)

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro  $y = f(x)$  je  $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  zatímco pro  $x = f^{-1}(y)$  je  $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ . Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

### Theorem

*Je-li  $f$  diferencovatelná funkce na okolí bodu  $x_0$  a  $f'(x_0) \neq 0$ , pak existuje na nějakém okolí bodu  $y_0 = f(x_0)$  funkce  $f^{-1}$  inverzní k  $f$  a platí vztah*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

*Pokud je  $f'(x_0) = 0$  izolovaným nulovým bodem derivace  $f'(x)$  a inverzní funkce k  $f$  na okolí  $f(x_0)$  existuje, pak limity zprava i zleva funkce  $f'$  jsou v bodě  $x_0$  nevlastní.*