

# Matematika II – 5. přednáška

## Taylorův rozvoj a průběh funkce

Jan Slovák

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

17. 3. – 22. 3. 2013

# Obsah přednášky

- 1 Derivace vyšších řádů
- 2 Taylorův rozvoj, analytické a hladké funkce
- 3 Průběh funkcí
- 4 Diferenciál funkce

## Kde je dobré číst?

- chystaná učebnice „Matematika drsně a svižně“, viz studijní materiály

## Kde je dobré číst?

- chystaná učebnice „Matematika drsně a svižně“, viz studijní materiály
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

# Doporučené čtení z učebnice

## **Teorie:**

Základní čtení: odst. 6.1 – 6.12

Rozšiřující čtení: odst. 6.13. – 6.16.

## **Úlohy:**

6.1 – 6.7, 6.12. – 6.38

# Plán přednášky

- 1 Derivace vyšších řádů
- 2 Taylorův rozvoj, analytické a hladké funkce
- 3 Průběh funkcí
- 4 Diferenciál funkce

Jestliže má první derivace  $f'(x)$  reálné nebo komplexní funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci  $(f')'(x_0)$ , říkáme že existuje **druhá derivace** funkce  $f$ , resp. derivace druhého řádu. Píšeme pak  $f''(x_0) = (f')'(x_0)$  nebo také  $f^{(2)}(x_0)$ .

Jestliže má první derivace  $f'(x)$  reálné nebo komplexní funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci  $(f')'(x_0)$ , říkáme že existuje **druhá derivace** funkce  $f$ , resp. derivace druhého řádu. Píšeme pak  $f''(x_0) = (f')'(x_0)$  nebo také  $f^{(2)}(x_0)$ .

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně:

Reálná nebo komplexní funkce  $f$  je v bodě  $x_0$   $(k + 1)$ -krát **diferencovatelná** pro nějaké přirozené číslo  $k$ , jestliže je  $k$ -krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu  $x_0$  a její  $k$ -tá derivace má v bodě  $x_0$  derivaci. Pro  $k$ -tou derivaci funkce  $f(x)$  píšeme  $f^{(k)}(x)$ . Pro  $k = 0$  rozumíme 0-krát diferencovatelnými funkcemi funkce spojitě.

Jestliže existují derivace všech řádů na intervalu, říkáme, že je tam funkce  $f$  **hladká**.



Jestliže má první derivace  $f'(x)$  reálné nebo komplexní funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci  $(f')'(x_0)$ , říkáme že existuje **druhá derivace** funkce  $f$ , resp. derivace druhého řádu. Píšeme pak  $f''(x_0) = (f')'(x_0)$  nebo také  $f^{(2)}(x_0)$ .

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně:

Reálná nebo komplexní funkce  $f$  je v bodě  $x_0$   $(k + 1)$ -**krát diferencovatelná** pro nějaké přirozené číslo  $k$ , jestliže je  $k$ -krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu  $x_0$  a její  $k$ -tá derivace má v bodě  $x_0$  derivaci. Pro  $k$ -tou derivaci funkce  $f(x)$  píšeme  $f^{(k)}(x)$ . Pro  $k = 0$  rozumíme 0-krát diferencovatelnými funkcemi funkce spojitě.

Jestliže existují derivace všech řádů na intervalu, říkáme, že je tam funkce  $f$  **hladká**.

Pro funkce se spojitou  $k$ -tou derivací používáme označení **třída funkcí**  $C^k(A)$  na intervalu  $A$ , kde  $k$  může nabývat hodnot  $0, 1, \dots, \infty$ . Často píšeme pouze  $C^k$ , je-li definiční obor znám z kontextu.

Již jsme viděli, že první derivace funkce je jejím lineárním přiblížením v okolí daného bodu a že ze znaménka nenulové derivace vyplývá, že funkce je v bodě  $x_0$  rostoucí nebo klesající. Body, ve kterých je první derivace nulová se nazývají **kritické body** dané funkce.

Již jsme viděli, že první derivace funkce je jejím lineárním přiblížením v okolí daného bodu a že ze znaménka nenulové derivace vyplývá, že funkce je v bodě  $x_0$  rostoucí nebo klesající. Body, ve kterých je první derivace nulová se nazývají **kritické body** dané funkce.

Je-li  $x_0$  kritický bod funkce  $f$ , může být chování funkce  $f$  v okolí bodu  $x_0$  jakékoliv. Vidíme to již z chování funkce  $f(x) = x^n$  v okolí nuly pro libovolné  $n$ . Pro lichá  $n > 0$  bude  $f(x)$  rostoucí, pro sudá  $n$  naopak bude nalevo klesající a napravo rostoucí, dosáhne tedy v bodě  $x_0$  své minimální hodnoty mezi body  $z$  (dostatečně malého) okolí bodu  $x_0 = 0$ .

Tentýž pohled můžeme aplikovat na funkci  $f'$ . V kritickém bodě  $x_0$  bude derivace  $f'(x)$

- rostoucí při kladné druhé derivaci
- klesající při záporné druhé derivaci.

Tentýž pohled můžeme aplikovat na funkci  $f'$ . V kritickém bodě  $x_0$  bude derivace  $f'(x)$

- rostoucí při kladné druhé derivaci
- klesající při záporné druhé derivaci.

Jestliže je ale rostoucí, znamená to, že nutně bude záporná nalevo od kritického bodu a kladná napravo od něj. Funkce  $f$  v takovém případě je klesající nalevo od kritického bodu a rostoucí napravo od něj. To znamená, že má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  minimum ze všech hodnot z nějakého malého okolí bodu  $x_0$ .

Tentýž pohled můžeme aplikovat na funkci  $f'$ . V kritickém bodě  $x_0$  bude derivace  $f'(x)$

- rostoucí při kladné druhé derivaci
- klesající při záporné druhé derivaci.

Jestliže je ale rostoucí, znamená to, že nutně bude záporná nalevo od kritického bodu a kladná napravo od něj. Funkce  $f$  v takovém případě je klesající nalevo od kritického bodu a rostoucí napravo od něj. To znamená, že má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  minimum ze všech hodnot z nějakého malého okolí bodu  $x_0$ .

Naopak, je-li druhá derivace záporná v  $x_0$ , je první derivace klesající, tedy záporná vlevo od  $x_0$  a kladná vpravo. Funkce  $f$  bude tedy mít v bodě  $x_0$  maximální hodnotu ze všech hodnot na nějakém okolí.

# Extrémy funkce

Funkce diferencovatelná na  $(a, b)$  a spojitá na  $[a, b]$  má jistě na tomto intervalu absolutní maximum a minimum. Může ho dosáhnout pouze buď na hranici nebo v bodě s nulovou derivací, tj. v kritickém bodě. Pro diskusi extrémů nám tedy mohou stačit kritické body a druhé derivace pomůžou určit typy extrémů, pokud jsou nenulové. Pro přesnější diskusi ale potřebujeme lepší než lineární aproximace zkoumaných funkcí. Proto se nejprve budeme věnovat úvahám v tomto směru a teprve poté se vrátíme k diskusi průběhu funkcí.

# Plán přednášky

- 1 Derivace vyšších řádů
- 2 Taylorův rozvoj, analytické a hladké funkce
- 3 Průběh funkcí
- 4 Diferenciál funkce



Jako překvapivě jednoduché využití Rolleovy věty teď odvodíme mimořádně důležitý výsledek. Říkává se mu **Taylorův rozvoj se zbytkem**.

Jako překvapivě jednoduché využití Rolleovy věty teď odvodíme mimořádně důležitý výsledek. Říkává se mu **Taylorův rozvoj se zbytkem**.

Intuitivně se k němu můžeme dostat obrácením našich úvah kolem mocninných řad. Máme-li totiž mocninnou řadu

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  a derivujeme-li ji opakovaně, dostáváme mocninné řady (víme, že je možné takový výraz derivovat člen po členu, i když jsme to ještě nedokázali)

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Jako překvapivě jednoduché využití Rolleovy věty teď odvodíme mimořádně důležitý výsledek. Říkává se mu **Taylorův rozvoj se zbytkem**.

Intuitivně se k němu můžeme dostat obrácením našich úvah kolem mocninných řad. Máme-li totiž mocninnou řadu

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  a derivujeme-li ji opakovaně, dostáváme mocninné řady (víme, že je možné takový výraz derivovat člen po členu, i když jsme to ještě nedokázali)

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

V bodě  $x = a$  je  $S^{(k)}(a) = k!a_k$ . Můžeme tedy naopak číst poslední tvrzení jako rovnici pro  $a_k$  a původní řadu přepsat jako

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Jestliže místo mocninné řady máme nějakou dostatečně hladkou funkci  $f(x)$ , je tedy na místě se ptát, zda ji můžeme vyjádřit jako mocninnou řadu a jak rychle budou konvergovat částečné součty (tj. přiblížení funkce  $f$  polynomy). Naše úvaha právě naznačila, že můžeme očekávat v okolí bodu  $a$  dobrou aproximaci polynomy, tzv. **Taylorovými polynomy  $k$ -tého řádu**:

$$P_k f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Přesná odpověď vypadá podobně jako věta o střední hodnotě, jen pracujeme s vyššími stupni polynomů (tzv. **Taylorův rozvoj se zbytkem**).

## Theorem

*Nechť je  $f(x)$  funkce  $k$ -krát diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$  a spojitá na  $[a, b]$ . Pak pro každé  $x \in (a, b)$  existuje číslo  $c \in (a, x)$  takové, že*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)(x - a)^{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - a)^k \\ &= P_{k-1}f(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - a)^k. \end{aligned}$$

Pokud tedy umíme odhadnout velikost  $k$ -té derivace na celém intervalu, dostaneme přímo odhady chyb. Speciálním případem je samozřejmě věta o střední hodnotě coby aproximace řádu nula.

Pokud tedy umíme odhadnout velikost  $k$ -té derivace na celém intervalu, dostaneme přímo odhady chyb. Speciálním případem je samozřejmě věta o střední hodnotě coby aproximace řádu nula. Iterováním derivace funkce  $\sin x$  dostaneme vždy buď sinus nebo cosinus s nějakým znaménkem, ale v absolutní hodnotě budou hodnoty vždy nejvýše jedna. Dostáváme tedy přímý odhad rychlosti konvergence mocninné řady

$$|\sin x - (P_k \sin)(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Vidíme tedy, že pro  $x$  výrazně menší než  $k$  bude chyba malá, pro  $x$  srovnatelné s  $k$  nebo větší ale bude obrovská.

## Theorem (Taylorova věta)

*Předpokládejme, že funkce  $f(x)$  je na intervalu  $(a - b, a + b)$  hladká a že všechny její derivace jsou zde omezeny stejnoměrně konstantou  $M > 0$ , tj.*

$$|f^{(k)}(x)| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, \quad x \in (a - b, a + b).$$

*Pak mocninná řada  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n$  konverguje na intervalu  $(a - b, a + b)$  k funkci  $f(x)$ .*



## Theorem (Taylorova věta)

*Předpokládejme, že funkce  $f(x)$  je na intervalu  $(a - b, a + b)$  hladká a že všechny její derivace jsou zde omezeny stejnoměrně konstantou  $M > 0$ , tj.*

$$|f^{(k)}(x)| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, \quad x \in (a - b, a + b).$$

*Pak mocninná řada  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n$  konverguje na intervalu  $(a - b, a + b)$  k funkci  $f(x)$ .*

## Důkaz.

Důkaz je shodný s úvahou v konkrétním případě funkce  $\cos x$ . □

Je-li  $f$  v bodě  $a$  hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je  $S(x) = f(x)$  na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme **analytické funkce** v bodě  $a$ . Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě.

Je-li  $f$  v bodě  $a$  hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x - a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je  $S(x) = f(x)$  na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme **analytické funkce** v bodě  $a$ . Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě. Ne všechny hladké funkce jsou ale analytické. Ve skutečnosti lze dokázat, že pro každou posloupnost čísel  $a_n$  umíme najít hladkou funkci, jejíž derivace řádů  $k$  budou tato čísla  $a_k$ .

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = e^{-1/x^2}.$$

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = e^{-1/x^2}.$$

Je dobře definovaná hladká funkce pro všechny body  $x \neq 0$ .

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = e^{-1/x^2}.$$

Je dobře definovaná hladká funkce pro všechny body  $x \neq 0$ . Derivací dostaneme  $f'(x) = f(x) \cdot 2x^{-3}$  a iterovanou derivací dostaneme součet konečně mnoha členů tvaru  $C \cdot f(x) \cdot x^{-k}$ , kde  $C$  je nějaké celé číslo a  $k$  je přirozené číslo. Pro takové výrazy lze opakovanou aplikací L'Hospitalova pravidla zjistit, že jdou limitně k nule, při  $x$  jdoucím k nule. Dodefinujeme-li tedy hodnoty všech derivací naší funkce v nule rovnicí

$$f^{(k)} = 0,$$

získáme hladkou funkci na celém  $\mathbb{R}$ . Je vidět, že skutečně jde o nenulovou funkci všude mimo  $x = 0$ , všechny její derivace v tomto bodě jsou ale nulové. Samozřejmě to tedy není analytická funkce v bodě  $x_0 = 0$ .

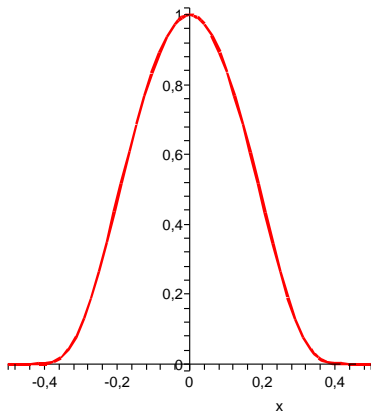
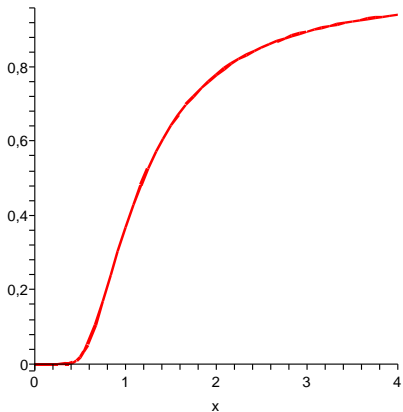
Snadno teď můžeme naši funkci modifikovat takto:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{je-li } x > 0 \end{cases}.$$

Opět jde o hladkou funkci na celém  $\mathbb{R}$ . Další úpravou můžeme získat funkci nenulovou ve všech vnitřních bodech intervalu  $[-a, a]$ ,  $a > 0$  a nulovou jinde:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

Tyto funkce je hladké na celém  $\mathbb{R}$ . Poslední dvě funkce jsou na obrázcích, vpravo je použit parametr  $a = 1$ .





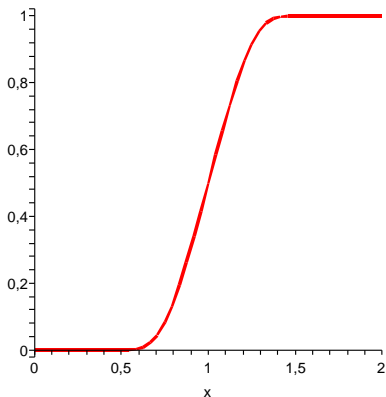
Nakonec ještě ukážeme, jak lze dostat hladké analogie Heavisideových funkcí. Pro dvě pevně zvolená reálná čísla  $a < b$  definujeme funkci  $f(x)$  s použitím výše definované funkce  $g$  takto:

$$f(x) = \frac{g(x - a)}{g(x - a) + g(b - x)}.$$

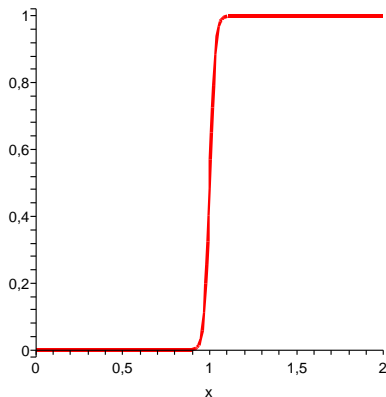
Zjevně je pro každé  $x \in \mathbb{R}$  jmenovatel zlomku kladný (pro každý z intervalů určených čísly  $a$  a  $b$  je totiž alespoň jeden ze sčítanců jmenovatele nenulový a tedy je celý jmenovatel kladný). Dostáváme z našeho definičního vztahu proto hladkou funkci  $f(x)$  na celém  $\mathbb{R}$ . Při  $x \leq a$  je přitom jmenovatel zlomku přímo dle definice funkce  $g$  nulový, při  $x \geq b$  je čítec i jmenovatel stejný.

Na dalších dvou obrázcích jsou právě funkce  $f(x)$  a to s parametry  $a = 1 - \alpha$ ,  $b = 1 + \alpha$ , kde nalevo je  $\alpha = 0.8$  a napravo  $\alpha = 0.4$ .

alpha = .8



alpha = .40000



# Plán přednášky

- 1 Derivace vyšších řádů
- 2 Taylorův rozvoj, analytické a hladké funkce
- 3 Průběh funkcí**
- 4 Diferenciál funkce

Budeme v dalším uvažovat funkce s dostatečným počtem spojitých derivací, aniž bychom tento předpoklad přímo uváděli.

Řekneme, že bod  $a$  v definičním oboru funkce  $f$  je **kritický bod řádu  $k$** , jestliže platí  $f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0$ ,  $f^{(k+1)}(a) \neq 0$ .

Předpokládejme, že  $f^{(k+1)}(a) > 0$ . Pak je tato spojitá derivace kladná i na jistém okolí  $\mathcal{O}(a)$  bodu  $a$ . Taylorův rozvoj se zbytkem nám v takovém případě dává pro všechna  $x$  z  $\mathcal{O}(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}.$$

Je proto změna hodnot  $f(x)$  v okolí bodu  $a$  dána chováním funkce  $(x-a)^{k+1}$ .

Budeme v dalším uvažovat funkce s dostatečným počtem spojitých derivací, aniž bychom tento předpoklad přímo uváděli.

Řekneme, že bod  $a$  v definičním oboru funkce  $f$  je **kritický bod řádu  $k$** , jestliže platí  $f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0$ ,  $f^{(k+1)}(a) \neq 0$ .

Předpokládejme, že  $f^{(k+1)}(a) > 0$ . Pak je tato spojitá derivace kladná i na jistém okolí  $\mathcal{O}(a)$  bodu  $a$ . Taylorův rozvoj se zbytkem nám v takovém případě dává pro všechna  $x$  z  $\mathcal{O}(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}.$$

Je proto změna hodnot  $f(x)$  v okolí bodu  $a$  dána chováním funkce  $(x-a)^{k+1}$ .

Je-li  $k+1$  sudé číslo, jsou hodnoty  $f(x)$  v takovém okolí větší než hodnota  $f(a)$  — bod  $a$  bodem lokálního minima.

Pokud je  $k$  sudé číslo, pak jsou hodnoty vlevo menší a vpravo větší než  $f(a)$ , extrém tedy ani lokálně nenastává. Zato graf funkce  $f(x)$  protíná svoji tečnu  $y = f(a)$  bodem  $[a, f(a)]$ .

Naopak, je-li  $f^{(k+1)}(a) < 0$ , pak ze stejného důvodu jde o lokální maximum při lichém  $k$  a extrém opět nenastává pro  $k$  sudé.

Funkce  $f$  je v bodě  $a$  **konkávní**, jestliže se její graf nachází v jistém okolí celý pod tečnou v bodě  $[a, f(a)]$ , tj. požadujeme

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Říkáme, že funkce  $f$  je **konvexní** v bodě  $a$ , jestliže naopak je její graf nad tečnou v bodě  $a$ , tj.

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkce je konvexní nebo konkávní na intervalu, jestliže má tuto vlastnost v každém jeho bodě.

Má-li funkce  $f$  spojitě druhé derivace v okolí bodu  $a$ , z Taylorova rozvoje druhého řádu se zbytkem

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(c)(x - a)^2.$$

Proto je zjevně funkce konvexní, kdykoliv je  $f''(a) > 0$ , a je konkávní, kdykoliv  $f''(a) < 0$ .

Pokud je druhá derivace nulová, můžeme (opatrně) použít derivace vyšších řádů.

Bod  $a$  nazýváme **inflexní bod** diferencovatelné funkce  $f$ , jestliže graf funkce  $f$  přechází z jedné strany tečny na druhou.

Předpokládejme, že  $f$  má spojitě třetí derivace a napišme si Taylorův rozvoj třetího řádu se zbytkem:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(c)(x-a)^3.$$

Je-li  $a$  nulový bod druhé derivace takový, že  $f'''(a) \neq 0$ , pak je třetí derivace nenulová i na nějakém okolí a jde proto zjevně o inflexní bod. Znaménko třetí derivace nám v takovém případě určuje, zda graf funkce přechází tečnu zdola nahoru nebo naopak.

Pokud je bod  $a$  navíc izolovaným nulovým bodem druhé derivace a zároveň inflexním bodem, pak zjevně je na nějakém malém okolí bodu  $a$  funkce na jedné straně konkávní a na druhé konvexní.

Inflexní body tedy můžeme také vnímat jako body přechodu mezi konkávním a konvexním chováním grafu funkce.

Asymptotou funkce  $f$  v nevlastním bodě  $\infty$  je taková přímka  $y = ax + b$ , pro kterou je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Říkáme jí také **asymptota se směrnicí**. Pokud taková asymptota existuje, platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

a tedy existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Pokud ovšem existují poslední dvě limity, existuje i limita z definice asymptoty, jde proto i o podmínky dostatečné. Obdobně v  $-\infty$ . Zbývají nám případné přímky kolmé na osu  $x$ : Asymptoty v bodech  $a \in \mathbb{R}$  jsou přímky  $x = a$  takové, že funkce  $f$  má v bodě  $a$  alespoň jednu jednostrannou limitu nekonečnou. Hovoříme tako o **asymptotách bez směrnice**.



# Plán přednášky

- 1 Derivace vyšších řádů
- 2 Taylorův rozvoj, analytické a hladké funkce
- 3 Průběh funkcí
- 4 Diferenciál funkce**

Závislostmi mezi různými veličinami, řekněme  $y$  a  $x$ , často nejsou dány pevně. Explicitní vztah  $y = f(x)$  s nějakou funkcí  $f$  je tedy jen jednou z možností. Derivování pak vyjadřuje, že okamžitá změna  $y = f(x)$  je úměrná okamžité změně  $x$  a to s úměrou  $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ . Tento vztah pak píšeme

$$df(x) = \frac{df}{dx}(x)dx,$$

kde  $df(x)$  interpretujeme jako lineární zobrazení přírůstků dané  $df(x)(\Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x$ , zatímco  $dx(x)(\Delta x) = \Delta x$ . Hovoříme o **diferenciálu funkce  $f$**  pokud platí aproximační vlastnost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - df(x)(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Z Taylorovy věty tedy vyplývá, že funkce s ohraničenou derivací  $f'$  má diferenciál  $df$ . To zejména v bodě  $x$  nastane, když je v něm první derivace  $f'(x)$  existuje a je spojitá.

Pokud je veličina  $x$  vyjádřena pomocí další veličiny  $t$ , tj.  $x = g(t)$ , a to opět funkcí se spojitou první derivací, pak pravidlo o derivaci složené funkce říká, že i složená funkce  $f \circ g$  má opět diferenciál

$$df(t) = \frac{df}{dx}(x) \frac{dx}{dt}(t) dt.$$

Můžeme proto vnímat  $df$  jako lineární přiblížení dané veličiny v závislosti na přírůstcích závislé proměnné, ať už je tato závislost dána jakkoliv.

# Křivost grafu funkce

Graf hladké funkce  $f(x)$  teď budeme diskutovat jako zvláštní případ parametrizované křivky v rovině. Můžeme si ji představit jako pohyb v rovině parametrizovaný pomocí nezávislé proměnné  $x$ . Pro libovolný bod  $x$  z definičního oboru naší funkce můžeme okamžitě výpočtem první derivace vidět vektor  $(1, f'(x)) \in \mathbb{R}^2$ , který představuje okamžitou rychlost takového pohybu. Tečna bodem  $[x, f(x)]$  parametrizovaná pomocí tohoto směrového vektoru pak představuje lineární přiblížení křivky.

Viděli jsme už také, že v případě, že  $f''(x) = 0$  a zároveň  $f'''(x) \neq 0$ , přechází graf naší funkce přes svoji tečnu, tzn. že tečna je i nejlepším přiblížením křivky v bodě  $x$  i do druhého řádu. To zpravidla popisujeme tvrzením, že má graf funkce  $f$  v bodě  $x$  nulovou křivost.

Tečnu grafu v pevném bodě  $P = [x, f(x)]$  jsme dostali pomocí limity sečen, tj. přímek procházejícími body  $P$  a  $Q = [x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$ . Chceme-li přiblížit druhou derivaci, budeme body  $P$  a  $Q \neq P$  prokládat kružnicí  $C_Q$ , jejíž střed je na průsečíku kolmic na tečny, vztyčených v bodech  $P$  a  $Q$ . Pro poloměr této tzv. **oskulační kružnice** platí

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\alpha} = \frac{(1 + (f')^2)^{3/2}}{f''}.$$