Matematika II – 6. týden
Newtonův a Riemannův integrál funkcí

Jan Slovák

Masarykova univerzita

25. 3. – 29.3. 2013

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- chystaná učebnice „Matematika drsně a svižně“, viz studijní materiály

Kde je dobré číst?

- chystaná učebnice „Matematika drsně a svižně“, viz studijní materiály
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Doporučené čtení z učebnice

Teorie:
Základní čtení: odst. 6.19 – 6.29
Rozšiřující čtení: —
Úlohy:
Výběr z úloh 6.41 – 6.66.

Plán přednášky

Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou nebo komplexní funkci $F(x)$ reálné proměnné x a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na n částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech x_i výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1}-x_i).$$

Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou nebo komplexní funkci $F(x)$ reálné proměnné x a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na n částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech x_i výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1}-x_i).$$

Funkci F nazýváme **neurčitý integrál** k funkci f.

Neurčitý integrál reálné funkce $f(x)$ nejspíš bude pro rozumné funkce vyjadřovat plochu vytyčenou grafem funkce f, souřadnou osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou x!).

Neurčitý integrál reálné funkce $f(x)$ nejspíš bude pro rozumné funkce vyjadřovat plochu vytyčenou grafem funkce f, souřadnou osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou x!).
Dá se tedy očekávat, že takovou plochu skutečně spočteme jako rozdíl hodnot neurčitého integrálu v krajních bodech intervalu.
Tomuto postupu se také říká **Newtonův integrál**. Píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

V případě komplexní funkce f je i reálná a imaginární část jejího integrálu jednoznačně dána reálnou a imaginární částí f, proto se v dalším omezíme na reálné funkce.

Poznámka

V dalším skutečně ukážeme, že lze rozumně definovat pojem plocha v rovině tak, aby ji bylo možné počítat právě uvedeným způsobem. Newtonův integrál má ale jednu podstatnou vadu — jeho vyčíslení vyžaduje znalost neurčitého integrálu. Tu obecně není snadné spočíst i když ukážeme, že ke všem spojitým funkcím f existuje. Proto budeme napřed diskutovat jinou definici integrálu.

Všimněme si ještě, že neurčitý integrál je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určen jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak Taylorův rozvoj prvního řádu se zbytkem v bodě a dává

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) + (f(c) - f(c))(x - a) = F(a) - G(a)$$

na nějakém okolí bodu a. Pokud by ale $x_0 < b$ bylo supremem hodnot, pro které tento vztah ještě platí, opětovnou volbou tohoto bodu za a dosáhneme rozšíření tohoto vztahu i napravo od něj. Musí tedy platit na celém intervalu.

Všimněme si ještě, že neurčitý integrál je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určen jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak Taylorův rozvoj prvního řádu se zbytkem v bodě a dává

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) + (f(c) - f(c))(x - a) = F(a) - G(a)$$

na nějakém okolí bodu a. Pokud by ale $x_0 < b$ bylo supremem hodnot, pro které tento vztah ještě platí, opětovnou volbou tohoto bodu za a dosáhneme rozšíření tohoto vztahu i napravo od něj. Musí tedy platit na celém intervalu.
S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

Plán přednášky

Neurčitý integrál nám formálně dovoluje spočíst Riemannův integrál pro každou spojitou funkci. Nicméně prakticky bývá zejména použitelný tam, kde v integrované funkci umíme derivaci přímo uvidět. K tomu v jednoduchých případech stačí číst tabulky pro derivace funkcí v našem zvěřinci naopak.
Dostáváme tak např. následující tvrzení pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$:

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} + C$$

$$\int \frac{a}{x}\,dx = a\ln x + C$$

$$\int a\cos bx\,dx = \frac{a}{b}\sin bx + C$$

$$\int a\sin bx\,dx = -\frac{a}{b}\cos bx + C$$

$$\int a\cos bx\sin^n bx\,dx = \frac{a}{b(n+1)}\sin^{n+1} bx + C$$

$$\int a\sin bx\cos^n bx\,dx = -\frac{a}{b(n+1)}\cos^{n+1} bx + C$$

$$\int a\,\mathrm{tg}\,bx\,dx = -\frac{a}{b}\ln(\cos bx) + C$$

$$\int \frac{a}{a^2+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Pozor definiční obor, na kterém je neurčitý integrál dobře definován!

K takovýmto tabulkovým hodnotám lze relativně snadno dodávat další jednoduchými pozorováními vhodné struktury integrovaných funkcí. Např.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C.$$

Plán přednášky

Výpočet integrálu pomocí neurčitého integrálu, spolu s pravidlem

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$$

pro derivaci součinu funkcí, dává následující formuli pro neurčitý integrál

$$F(x) \cdot G(x) + C = \int F'(x)G(x)\,dx + \int F(x)G'(x)\,dx.$$

Tato formule se většinou používá v případě, že jeden z integrálů napravo máme počítat, zatímco druhý umíme počítat lépe.

Uveďme si nějaké příklady. Nejprve spočteme

$$I = \int x \sin x \, dx.$$

V tomto případě pomůže volba $F(x) = x$, $G'(x) = \sin x$. Odtud $G(x) = -\cos x$, proto také

$$I = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Obvyklým trikem je také použít tento postup s $F'(x) = 1$:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - x + C.$$

Je-li $F'(y) = f(y)$ a $y = \varphi(x)$, potom

$$\frac{dF(\varphi(x))}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x)$$

a tedy $F(y) + C = \int f(y)\,dy$ lze spočíst jako

$$F(\varphi(x)) + C = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Dosazením $x = \varphi^{-1}(y)$ pak dostaneme původně požadovaný neurčitý integrál. Častěji zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

a hovoříme o substituci za proměnnou y.

Je-li $F'(y) = f(y)$ a $y = \varphi(x)$, potom

$$\frac{dF(\varphi(x))}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x)$$

a tedy $F(y) + C = \int f(y)\,dy$ lze spočíst jako

$$F(\varphi(x)) + C = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Dosazením $x = \varphi^{-1}(y)$ pak dostaneme původně požadovaný neurčitý integrál. Častěji zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

a hovoříme o substituci za proměnnou y.
Pro Riemannovy součty je možné substituci porozumět snadno tak, že přírůstky v proměnné y a v x jsou vzájemně ve vztahu

$$dy = \varphi'(x)\,dx$$

který odpovídá vztahu $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ a snadno jej spočítáme výpočtem derivace.

Jako příklad:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

zvolíme substituci $x = \sin t$. Odtud $dx = \cos t\, dt$ a dostáváme

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\, dt = \int dt = t + C.$$

Zpětným dosazením $t = \mathrm{acrsin}\, x$ dopočítáme již známý vzorec $I = \arcsin x + C$.

Jako příklad:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

zvolíme substituci $x = \sin t$. Odtud $dx = \cos t\, dt$ a dostáváme

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\, dt = \int dt = t + C.$$

Zpětným dosazením $t = \operatorname{acrsin} x$ dopočítáme již známý vzorec $I = \arcsin x + C$.

Při substitucích je třeba dát pozor na skutečnou existenci inverzní funkce k $y = \varphi(x)$ a při výpočtu určitého integrálu je třeba řádně přepočítávat i meze.

Často vede použití substitucí a metody per partes k rekurentním vztahům, ze kterých teprve lze dopočíst hledané integrály. Spočtěme si alespoň jeden příklad. Metodou per partes počítáme

$$\begin{aligned} I_m = \int \cos^m x \, dx &= \int \cos^{m-1} x \cos x \, dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x - (m-1) \int \cos^{m-2} x (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Odtud díky vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dostáváme

$$m I_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) I_{m-2}$$

a počáteční hodnoty jsou

$$I_0 = x, \quad I_1 = \sin x.$$

Integrace racionálních funkcí lomených

U racionálních funkcí lomených si můžeme při integraci pomoci několika zjednodušeními. Zejména v případě, že je stupeň polynomu f v čitateli větší nebo roven stupni polynomu g v jmenovateli, je rozumné hned z kraje dělením se zbytkem převést integraci na součet dvou integrálů. První pak bude integrací polynomu a druhý integrací výrazu f/g se stupněm g ostře větším, než je stupeň f. Toho skutečně dosáhneme prostým vydělením polynomů:

$$f = q \cdot g + h, \quad \frac{f}{g} = q + \frac{h}{g}.$$

Můžeme tedy zrovna předpokládat, že stupeň g je ostře větší než stupeň f.

Další postup si ukažme na jednoduchém příkladě. Zkusme si rozebrat, jak se dostaneme k výsledku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x+2}{x^2+3x+2} = \frac{-2}{x+1} + \frac{6}{x+2},$$

který již umíme integrovat přímo:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+3x+2}\,dx = -2\ln|x+1| + 6\ln|x+2| + C.$$

Především převedením součtu zlomků na společného jmenovatele tuto rovnost snadno ověříme. Pokud naopak víme, že lze náš výraz rozepsat ve tvaru

$$\frac{4x+2}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

a jde nám pouze o výpočet koeficientů A a B, můžeme pro ně získat rovnice pomocí roznásobení obou stran polynomem x^2+3x+2 ze jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x ve výsledných polynomech napravo i nalevo:

$$4x+2 = A(x+2) + B(x+1) \quad \Longrightarrow \quad 2A+B=2,\ A+B=4.$$

Plán přednášky

Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterou jsme právě odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterou jsme právě odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

Uvažme reálnou funkci f definovanou na intervalu $[a, b]$ a zvolme dělení tohoto intervalu, spolu s výběrem reprezentantů ξ_i jednotlivých částí, tj. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a zároveň $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Normou takového dělení nazýváme číslo $\min\{x_i - x_{i-1}\}$. **Riemannův součet** odpovídající zvolenému dělení $\Xi = (x_0, \ldots, x_n)$ a reprezentantům ξ je dán výrazem

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Řekneme, že **Riemannův integrál** funkce f na intervalu $[a, b]$ existuje, jestliže pro každou posloupnost dělení s reprezentanty (Ξ_k, ξ_k) s normou dělení jdoucí k nule existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} S_{\Xi_k,\xi_k} = S,$$

jejíž hodnota navíc nezávisí na volbě posloupnosti dělení a reprezentantů. Píšeme v takovém případě opět

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Řekneme, že **Riemannův integrál** funkce f na intervalu $[a, b]$ existuje, jestliže pro každou posloupnost dělení s reprezentanty (Ξ_k, ξ_k) s normou dělení jdoucí k nule existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} S_{\Xi_k,\xi_k} = S,$$

jejíž hodnota navíc nezávisí na volbě posloupnosti dělení a reprezentantů. Píšeme v takovém případě opět

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Tato definice nevypadá příliš prakticky, nicméně nám dovolí sformulovat a dokázat některé jednoduché vlastnosti Riemannova integrálu.

Theorem

(1) Je-li f omezená reálná funkce definovaná na reálném intervalu $[a, b]$ a $c \in [a, b]$ nějaký vnitřní bod, potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje tehdy a jen tehdy když existují oba integrály $\int_a^c f(x)dx$ a $\int_c^b f(x)dx$. V takovém případě pak také platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Theorem

(1) Je-li f omezená reálná funkce definovaná na reálném intervalu $[a, b]$ a $c \in [a, b]$ nějaký vnitřní bod, potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje tehdy a jen tehdy když existují oba integrály $\int_a^c f(x)dx$ a $\int_c^b f(x)dx$. V takovém případě pak také platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(2) Jsou-li f a g dvě reálné funkce definované na intervalu $[a, b]$, a existují-li integrály $\int_a^b f(x)dx$ a $\int_a^b g(x)dx$, pak existuje také integrál jejich součtu a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Theorem (pokračování)

(3) Je-li f reálná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, $C \in \mathbb{R}$ konstanta a existuje-li integrál $\int_a^b f(x)dx$, pak existuje také integrál $\int_a^b C \cdot f(x)dx$ a platí

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz.

(1) Předpokládejme nejprve, že existuje integrál přes celý interval. Při jeho výpočtu se omezíme na limity Riemannových součtů, jejichž dělení mají bod c mezi svými dělícími body. Každý takový součet dostaneme jako součet dvou dílčích Riemannových součtů. Pokud by tyto dílčí součty v limitě závisely na zvolených rozděleních a reprezentantech, pak by celkové součty nemohly být v limitě na volbách nezávislé (stačí ponechat jednu posloupnost dělení podintervalu stejnou a druhou měnit tak, aby se limita změnila).

Důkaz.

(1) Předpokládejme nejprve, že existuje integrál přes celý interval. Při jeho výpočtu se omezíme na limity Riemannových součtů, jejichž dělení mají bod c mezi svými dělícími body. Každý takový součet dostaneme jako součet dvou dílčích Riemannových součtů. Pokud by tyto dílčí součty v limitě závisely na zvolených rozděleních a reprezentantech, pak by celkové součty nemohly být v limitě na volbách nezávislé (stačí ponechat jednu posloupnost dělení podintervalu stejnou a druhou měnit tak, aby se limita změnila). Naopak, jestliže existují oba integrály na podintervalech, jsou libovolně přesně aproximovatelné Riemannovými součty a to navíc nezávisle na jejich volbě. Pokud do libovolné posloupnosti Riemannových součtů přes celý interval $[a, b]$ přidáme jeden dělící bod c navíc, změníme hodnotu celého součtu i částečných součtů přes intervaly patřící do $[a, c]$ a $[c, b]$ nejvýše o násobek normy dělení a možných rozdílů omezené funkce f na celém $[a, b]$. To je libovolně blízko k nule při zmenšující se normě dělení. □

pokračování.

(2) V každém Riemannově součtu se součet funkcí projeví jako součet hodnot ve vybraných reprezentantech. Protože je násobení reálných čísel distributivní, vyplývá odtud právě dokazované tvrzení.

(3) Stejná úvaha jako v předchozím případě. □

Theorem

Pro každou spojitou funkci f na konečném intervalu $[a, b]$ existuje její Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$. Navíc, je funkce $F(t)$ zadaná na intervalu $[a, b]$ pomocí Riemannova integrálu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

neurčitým integrálem funkce f na tomto intervalu.

Theorem

Pro každou spojitou funkci f na konečném intervalu $[a, b]$ existuje její Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$. Navíc, je funkce $F(t)$ zadaná na intervalu $[a, b]$ pomocí Riemannova integrálu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

neurčitým integrálem funkce f na tomto intervalu.

Důkaz.

Docela složitý. . . $\square$

Poznámky

(1) Předchozí dvě věty nám říkají, že integrál je lineární zobrazení

$$\int : C[a, b] \to \mathbb{R}$$

vektorového prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ do reálných čísel (tj. lineární forma).

Poznámky

(1) Předchozí dvě věty nám říkají, že integrál je lineární zobrazení

$$\int : C[a, b] \to \mathbb{R}$$

vektorového prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ do reálných čísel (tj. lineární forma).

(2) Dokázali jsme, že každá spojitá funkce je derivací nějaké funkce. Newtonův a Riemannův integrál tedy jako koncepty pro spojité funkce splývají. Riemannův integrál spojitých funkcí lze proto spočíst pomocí rozdílu hodnot $F(b) - F(a)$ neurčitého integrálu F.

Poznámky

(1) Předchozí dvě věty nám říkají, že integrál je lineární zobrazení

$$\int : C[a,b] \to \mathbb{R}$$

vektorového prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ do reálných čísel (tj. lineární forma).
(2) Dokázali jsme, že každá spojitá funkce je derivací nějaké funkce. Newtonův a Riemannův integrál tedy jako koncepty pro spojité funkce splývají. Riemannův integrál spojitých funkcí lze proto spočíst pomocí rozdílu hodnot $F(b) - F(a)$ neurčitého integrálu F.
(3) V prvním pomocném tvrzení v důkazu předchozí věty jsme dokázali důležité tvrzení, že pro omezenou funkci f na intervalu $[a, b]$ vždy existují limity horních součtů i dolních součtů. Říká se jim také **horní Riemannův integrál** a **dolní Riemannův integrál**. Takto lze pro omezené funkce ekvivalentně definovat i Riemannův integrál (jak jsme konečně v důkazu i činili).

Poznámky – pokračování

(4) V dalším tvrzení v důkazu jsme odvodili důležitou vlastnost spojitých funkcí, které se říká **stejnoměrná spojitost** na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Zjevně je každá stejnoměrně spojitá funkce také spojitá, naopak to ale na otevřených intervalech platit nemusí.

Poznámky – pokračování

(4) V dalším tvrzení v důkazu jsme odvodili důležitou vlastnost spojitých funkcí, které se říká **stejnoměrná spojitost** na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Zjevně je každá stejnoměrně spojitá funkce také spojitá, naopak to ale na otevřených intervalech platit nemusí.
(5) Nechť f je na $[a, b]$ **po částech spojitá**, tj. všude kromě konečně mnoha **bodů nespojitosti** c_i, $a < c_i < b$, ve kterých však existují jednostranné limity. Vzhledem k aditivnosti integrálu vůči intervalu přes který se integruje existuje podle poslední věty v takovém případě integrál $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ pro $t \in [a, b]$ a derivace funkce $F(t)$ existuje ve všech bodech t, ve kterých je f spojitá. Ve zbývajících bodech je funkce $F(t)$ spojitá, je to tedy spojitá funkce na celém intervalu $[a, b]$. Pokud zvolíme neurčítý integrál tak, aby na sebe funkce navazovaly, pak bude i celý integrál vyčíslen jako rozdíl v krajních hodnotách.