Matematika II – 7. týden
Integrální počet – pokračování

Jan Slovák

Masarykova univerzita

1. 4. – 4.4. 2013

Obsah přednášky

Doporučené čtení z učebnice

Teorie:
Základní čtení: odst. 6.30 – 6.36
Rozšiřující čtení: —
Úlohy:
Výběr z úloh 6.66 – 6.82.

Uvažme integraci racionálně lomené funkce

$$f(x) = \frac{4-x}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\int f(x)dx = \int \frac{5}{9(x+1)}dx - \int \frac{5x-16}{9(x-2)^2}dx$$

kde oba integrály už umíme přímo spočíst (coby primitivní funkce). Jak ale s určitými integrály, když integrační meze zahrnují singularitu f?

Integrovaná funkce na intervalu $[0, 3]$ je „tlustý“ neohraničený sloup (načrtněte si) kolem hodnoty $x = 2$ a dá se tušit, že to povede k nekonečné ploše pod grafem na zvoleném intervalu.
Protože není integrovaná funkce ani spojitá ani omezená, nebude existovat její Riemannův integrál a nemusí platit námi odvozené výsledky. Hovoříme o „nevlastním integrálu“.
Jednoduchým východiskem je diskutovat v takovém případě určité integrály na menších intervalech s hranicí blížící se problematickému bodu a zkoumat, zda existuje limitní hodnota takovýchto určitých integrálů. Pokud existuje, řekneme, že **příslušný nevlastní integrál existuje a je roven této limitě**.

Uvedeme postup na jednoduchém příkladě:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}$$

je nevlastní integrál, protože je má funkce $f(x) = (2-x)^{-1/4}$ v bodě $b = 2$ limitu zleva rovnou ∞. V ostatních bodech je integrovaná funkce spojitá. Zajímáme se proto o integrály

$$I_\delta = \int_0^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = \int_\delta^2 y^{-1/4}\, dy = \left[-\frac{4}{3}y^{3/4}\right]_\delta^2 = \frac{4}{3}2^{3/4} - \frac{4}{3}\delta^{3/4}.$$

Všimněme si, že jsme ve výpočtu substitucí dostali integrál s přepočtenou horní mezí δ a dolní mezí 2. Otočením mezí do obvyklé polohy jsme do výrazu přidali jedno znaménko $-$ navíc.

Limita pro $\delta \to 0$ zprava zjevně existuje a spočítali jsme tedy nevlastní určitý integrál

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = \frac{4}{3} 2^{3/4}.$$

Stejně budeme postupovat, pokud je zadáno integrování přes neohraničený interval. Hovoříme o **nekonečných integrálech**. Obecně tedy např. pro $a \in \mathbb{R}$

$$I = \int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

pokud limita vpravo existuje. Obdobně můžeme mít horní mez integrování konečnou a druhou nekonečnou.

Pokud jsou nekonečné obě meze, počítáme integrál jako součet dvou integrálů s libovolně pevně zvolenou pevnou mezí uprostřed, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Existence ani hodnota nezávisí na volbě takové meze, protože její změnou pouze o stejnou konečnou hodnotu měníme oba sčítance, ovšem s opačným znaménkem. Naopak limita při které by stejně rychle šla horní i dolní mez do $\pm\infty$ může vést k odlišným výsledkům! Např.

$$\int_{-a}^{a} x\,dx = [\frac{1}{2}x^2]_{-a}^{a} = 0,$$

přestože hodnoty integrálů $\int_a^\infty x\,dx$ s jednou pevnou mezí utečou rychle k nekončených hodnotám.

Ukažme si opět výpočet nekonečného integrálu na příkladě (jeden z typů parciálních zlomků, integrál vyřešíme snadno substitucí $x^2 + a^2 = t$, $2x\,dx = dt$)

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{2(x^2+a^2)}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2+2a^2}+\frac{1}{2a^2}\right) =$$

Při výpočtu určitého integrálu z racionální funkce lomené musíme tedy pečlivě rozdělit zadaný interval podle bodů nespojitosti integrované funkce a spočítat jednotlivé nevlastní integrály každý zvlášť. Navíc je nutné rozdělit celý interval tak, abychom vždy integrovali funkci neohraničenou pouze v okolí jednoho z krajních bodů.

Sama definice Riemanova integrálu byla odvozena od představy velikosti plochy v rovině se souřadnicemi x a y ohraničené osou x, hodnotami funkce $y = f(x)$ a hraničními přímkami $x = a$, $x = b$. Přitom je plocha nad osou x dána s kladným znaménkem zatímco hodnoty pod osou vedou ke znaménku zápornému.
Ve skutečnosti víme pouze, co je to plocha rovnoběžnostěnu určeného dvěma vektory, obecněji ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ víme, co je to objem rovnoběžnostěnu. Plochy jiných podmnožin je teprve třeba definovat. Pro některé jednoduché objekty jako třeba mnohoúhelníky je definice dána přirozeně předpokládanými vlastnostmi.

Námi vybudovaný koncept Riemannova integrálu je možné zatím přímo použít pouze k měření „objemu“ jednorozměrných podmnožin.
O podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je **(Riemannovsky) měřitelná**, jestliže je funkce $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je } x \in A \\ 0 & \text{jestliže je } x \notin A \end{cases}$$

Riemannovsky integrovatelná, tj. existuje integrál (ať už s konečnou nebo nekonečnou hodnotou)

$$m(A) = \int_{\infty}^{\infty} \chi_A(x)\, dx.$$

Funkci χ_A říkáme **charakteristická funkce množiny** A.

Všimněme si, že pro interval $A = [a, b]$ jde o velikost spočtenou takto:

$$\int_{\infty}^{\infty} \chi_A(x)\, dx = \int_a^b dx = b - a,$$

přesně jak jsme očekávali.
Zároveň má takováto definice „velikosti“ očekávanou vlastnost, že míra sjednocení dvou Riemannovsky měřitelných disjunktních množin vyjde jako součet.
Pokud ale vezmeme spočetné sjednocení, taková vlastnost již neplatí. Např. stačí vzít množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel jakožto sjednocení jednoprvkových podmnožin. Zatímco každá množina o konečně mnoha bodech má podle naší definice míru nulovou, charakteristická funkce $\chi_{\mathbb{Q}}$ není Riemannovsky integrovatelná.

Pro definici plochy (objemu) ve vícerozměrných prostorech budeme umět použít koncept Riemannova integrálu, až jej zobecníme do vícerozměrného případu. Již nyní ale můžeme počítat objemy v případech, které lze snadno převést na jednorozměrnou integraci. Začneme s ještě jednodušším použitím:

Střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu (konečném nebo nekonečném) $[a, b]$ je definována výrazem

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Z definice je m výška obdélníka (s orientací podle znaménka) nad intervalem $[a, b]$, který má stejnou plochu jako je plocha mezi osou x a grafem funkce $f(x)$.

Námi vybudovaný integrál jde také dobře použít pro výpočet **délky křivky** ve vícerozměrném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Pro jednoduchost si to předvedeme na případu křivky v rovině $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi x, y. Mějme tedy parametrický popis křivky $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$F(t) = [g(t), f(t)]$$

a představme si ji jako dráhu pohybu.
Derivací tohoto zobrazení dostaneme hodnoty, které budou odpovídat rychlosti pohybu po takovéto dráze. Proto celková délka křivky (tj. dráha uražená za dobu mezi hodnotami $t = a$, $t = b$) bude dána integrálem přes interval $[a, b]$, kde integrovanou funkcí $h(t)$ budou právě velikosti vektorů $F'(t)$.

Chceme tedy spočíst délku s rovnou

$$s = \int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt.$$

Ve speciálním případě, kdy křivka je grafem funkce $y = f(x)$ mezi body $a < b$ obdžíme pro její délku

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Tentýž výsledek lze intuitivně vidět jako důsledek Pythagorovy věty: pro lineární přírůstek délky křivky Δs odpovídající přírůstku Δx proměnné x spočteme totiž právě

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

a to při pohledu přímo na naši definici integrálu znamená

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Jako snadný příklad spočteme délku jednotkové kružnice jako dvojnásobek integrálu funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ v mezích $[-1, 1]$. Víme již, že musí vyjít číslo 2π, protože jsme takto číslo π definovali.

$$s = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx$$
$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 2[\arcsin x]_{-1}^{1} = 2\pi.$$

Jestliže v předchozím výpočtu budeme počítat s $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - (x/r)^2}$ a meze budou $[-r, r]$, dostaneme substitucí $x = rt$ déku kružnice o poloměru r:

$$s(r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{(x/r)^2}{1 - (x/r)^2}}\, dx = 2\int_{-1}^{1} \frac{r}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = 2r[\arcsin x]_{-1}^{1},$$

tj. $2\pi r$. Zejména je skutečně délka kružnice lineárně závislá na jejím poloměru.

Podobně plochu takové kružnice spočteme substitucí $x = r \sin t$, $dx = r \cos t \, dt$ (s využitím výsledku pro I_2 z minulé přednášky)

$$\begin{aligned} a(r) &= 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{2r^2}{2} [\cos t \sin t + t]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

Další obdobou téhož principu je výpočet **povrchu nebo objemu rotačního tělesa**. Pokud vznikne těleso rotací grafu funkce f kolem osy x v intervalu $[a, b]$, vzniká při přírůstku Δx nárůst plochy o násobek Δs délky křivky zadané grafem funkce f a velikosti kružnice o poloměru $f(x)$. Plocha se proto spočte formulí

$$A(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ je dán přírůstkem délky křivky $y = f(x)$. Objem stejného tělesa naroste při změně Δx o násobek tohoto přírůstku a plochy kružnice o poloměru $f(x)$. Proto je dán formulí

$$V(f) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Jako příklad užití posledních dvou vzorců odvodíme známé formule pro plochu sféry a objem koule.

$$A_r = 2\pi \int_{-r}^{r} r\sqrt{1-(x/r)^2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/r)^2}}\,dt = 2\pi r\int_{-r}^{r} dt = 4\pi r^2$$

$$V_r = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,dx = 2r\pi r^2 - \pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Kdy lze najít neurčitý integrál pomocí výrazů složených ze známých elementárních funkcí?

Drtivá většina spojitých funkcí vede na integrály, které tak vyjádřit neumíme.

Protože se integrací získané funkce velice často v praxi vyskytují, mnohé mají jména a před nástupem počítačů byly pro potřeby inženýrů vydávány obsáhlé tabulky hodnot takových funkcí.

Uvedeme si nyní aspoň nějaké příklady.

V metodách pro zpracování signálu je velice důležitá funkce

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Docela přímočaře, byť pracně, lze ověřit, že jde o hladkou funkci s limitními hodnotami

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

Je tedy okamžitě vidět, že tato sudá funkce bude mít v bodě $x = 0$ absolutní maximum a s narůstající absolutní hodnotou x se bude vlnit se stále se zmenšující amplitudou.

Funkce Sinusintegrál je definovaná vztahem

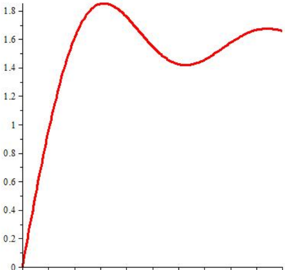
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \mathrm{sinc}(t)\, dt.$$

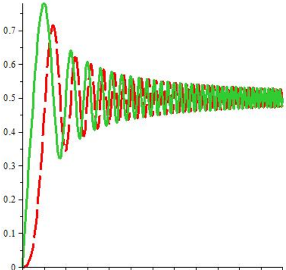
Důležité jsou také Fresnelovy sinové a kosinové integrály

$$\mathrm{FresnelS}(x) = \int_0^x \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

$$\mathrm{FresnelC}(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt.$$

Na levém obrázku je průběh funkce $Si(x)$, na pravém vidíme obě Fresnelovy funkce.





Nové typy funkcí dostáváme také, když do integrovaného výrazu povolíme volný parametr, na kterém pak výsledek závisí. Příkladem může být jedna z nejdůležitějších funkcí v matematice vůbec — tzv. Gamma funkce. Je definovaná vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} dt.$$

Lze ukázat, že tato funkce je analytická ve všech bodech $z \notin \mathbb{Z}$ a pro malá $z \in \mathbb{N}$ můžeme počítat:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^0 dt = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty = 1$$

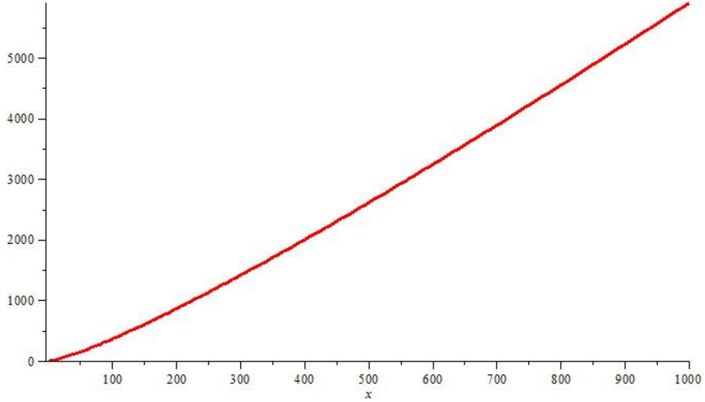
$$\Gamma(2) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^1 dt = [-\mathrm{e}^{-t}\, t]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, dt = 0 + 1 = 1$$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^2 dt = 0 + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t dt = 0 + 2 = 2$$

omocí indukce snadno dovodíme, že pro všechna kladná celá čísla n dává tato funkce hodnotu faktoriálu:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Následující obrázek ukazuje v logaritmickém měřítku závislé proměnné průběh funkce $f(x) = \ln(\Gamma(x))$. Vidíme z něj tedy, jak rychle skutečně roste faktoriál.



Pomocí nevlastního integrálu také umíme rozhodnout o konvegenci některých nekonečných řad:

Theorem (Integrální kriterium konvergence řad)

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *řada taková, že funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je kladná a nerostoucí na intervalu* $\langle 1, \infty)$. *Pak tato řada konverguje právě tehdy, když konverguje intergrál*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Pokud interpretujeme integrál, jako plochu pod křivkou, je kriterium názorně vidět.
Pokud daná řada diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme pro k-tý částečný součet s'_k (řady bez prvního členu) nerovnost

$$s'_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) < \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x,$$

neboť s'_k je dolním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak ale je

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x > \lim_{k\to\infty} s'_k = \infty,$$

a uvažovaný integrál diverguje. $\square$

pokračování.

Předpokládeme nyní, že daný integrál konverguje a označme k-tý částečný součet dané řady jako s_k. Potom máme nerovnosti

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x < \lim_{k\to\infty} s_k < \infty,$$

neboť s_k je horním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ a předpokádáme, že daná řada konverguje. $\square$

Jako příklad použití rozhodněme, pro jaká k konverguje řada

$$R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Všimněme si nejprve, že neumíme o konvergenci rozhodnout na základě podílového či odmocninového kriteria (obě limity $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ jsou rovny 1).
Pomocí integrálního kriteria pro konvergenci řad dostáváme pro $k \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\, \mathrm{d}x = \lim_{\delta\to\infty} \Big[(1-k)x^{1-k}\Big]_1^{\delta} = \begin{cases} k-1 & k > 1 \\ \infty & k < 1 \end{cases}$$

a daná řada tedy konverguje pro všechna $k > 1$ a diverguje pro $k < 1$. V případě $k = 1$ je primitivní funkcí logaritmus a integrál i řada opět divergují.