Matematika II – 8. týden
Nekonečné řady čísel a funkcí

Jan Slovák

Masarykova univerzita

8. 4. – 12. 4. 2013

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- Matimatematika drsně a svižně, učebnice v přípravě
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Doporučené čtení z učebnice

Teorie:
Základní čtení: odst. 6.36 – 6.45
Rozšiřující čtení: 6.46
Úlohy:
Výběr z úloh 6.81 – 6.88.

Plán přednášky

1. Integrální kriterium konvergence
2. Posloupnosti a řady funkcí
3. Znovu mocninné řady

Pomocí nevlastního integrálu také umíme rozhodnout o konvegenci některých nekonečných řad:

Theorem (Integrální kriterium konvergence řad)

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ řada taková, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je kladná a nerostoucí na intervalu $\langle 1, \infty)$. Pak tato řada konverguje právě tehdy, když konverguje intergrál

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Pokud interpretujeme integrál, jako plochu pod křivkou, je kriterium názorně vidět.
Pokud daná řada diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme pro k-tý částečný součet s'_k (řady bez prvního členu) nerovnost

$$s'_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) < \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x,$$

neboť s'_k je dolním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak ale je

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x > \lim_{k\to\infty} s'_k = \infty,$$

a uvažovaný integrál diverguje. □

pokračování.

Předpokládeme nyní, že daný integrál konverguje a označme k-tý částečný součet dané řady jako s_k. Potom máme nerovnosti

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x < \lim_{k\to\infty} s_k < \infty,$$

neboť s_k je horním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ a předpokádáme, že daná řada konverguje. $\square$

Jako příklad použití rozhodněme, pro jaká k konverguje řada

$$R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Jako příklad použití rozhodněme, pro jaká k konverguje řada

$$R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Všimněme si nejprve, že neumíme o konvergenci rozhodnout na základě podílového či odmocninového kriteria (obě limity $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ jsou rovny 1).

Jako příklad použití rozhodněme, pro jaká k konverguje řada

$$R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Všimněme si nejprve, že neumíme o konvergenci rozhodnout na základě podílového či odmocninového kriteria (obě limity $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ jsou rovny 1).
Pomocí integrálního kriteria pro konvergenci řad dostáváme pro $k \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to\infty} \Big[(1-k)x^{1-k}\Big]_1^{\delta} = \begin{cases} k-1 & k>1 \\ \infty & k<1 \end{cases}$$

a daná řada tedy konverguje pro všechna $k > 1$ a diverguje pro $k < 1$. V případě $k = 1$ je primitivní funkcí logaritmus a integrál i řada opět divergují.

Plán přednášky

1. Integrální kriterium konvergence
2. Posloupnosti a řady funkcí
3. Znovu mocninné řady

Při budování našeho zvířetníku funkcí jsme zavedli i mocninné řady, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů. S pomocí integrálního počtu konečně půjde ukázat, že je umíme diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích.

Při budování našeho zvířetníku funkcí jsme zavedli i mocninné řady, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů. S pomocí integrálního počtu konečně půjde ukázat, že je umíme diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích.
Uvažujme konvergentní řadu funkcí

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

na intervalu $[a, b]$. Přirozené dotazy:

Při budování našeho zvířetníku funkcí jsme zavedli i mocninné řady, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů. S pomocí integrálního počtu konečně půjde ukázat, že je umíme diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích.
Uvažujme konvergentní řadu funkcí

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

na intervalu $[a, b]$. Přirozené dotazy:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $S(x)$ v bodě x_0?

Při budování našeho zvířetníku funkcí jsme zavedli i mocninné řady, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů. S pomocí integrálního počtu konečně půjde ukázat, že je umíme diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích.
Uvažujme konvergentní řadu funkcí

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

na intervalu $[a, b]$. Přirozené dotazy:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $S(x)$ v bodě x_0?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ diferencovatelné v $a \in [a, b]$, je v něm diferencovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$?

Při budování našeho zvířetníku funkcí jsme zavedli i mocninné řady, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů. S pomocí integrálního počtu konečně půjde ukázat, že je umíme diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích.
Uvažujme konvergentní řadu funkcí

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

na intervalu $[a, b]$. Přirozené dotazy:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $S(x)$ v bodě x_0?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ diferencovatelné v $a \in [a, b]$, je v něm diferencovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ integrovatelné na intervalu $[a, b]$, je integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $\int S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx$?

Příklady ošklivých posloupností

(1) Uvažme nejprve funkce

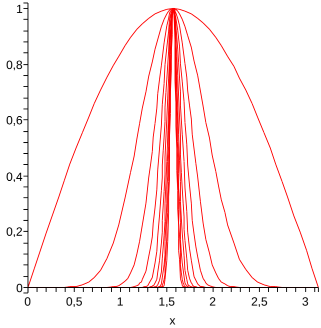
$$f_n(x) = (\sin x)^n$$

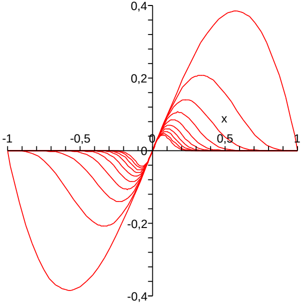
na intervalu $[0, \pi]$. Hodnoty těchto funkcí budou ve všech bodech $0 \leq x \leq \pi$ nezáporné a menší než jedna, kromě $x = \frac{\pi}{2}$, kde je hodnota 1. Proto na celém intervalu $[0, \pi]$ budou bod po bodu tyto funkce konvergovat k funkci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro všechna } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Zjevně tedy je limita posloupnosti funkcí f_n nespojitou funkcí, ačkoliv jsou všechny funkce $f_n(x)$ spojité. Problematický je přitom dokonce vnitřní bod intervalu.

Tentýž jev umíme najít i pro řady funkcí, protože součet je limitou částečných součtů. Stačí tedy v předchozím příkladě vyjádřit f_n jako n-tý částečný součet. Např. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = (\sin x)^2 - \sin x$, atd. Levý obrázek vykresluje funkce $f_{n^3}(x)$ pro $n = 1, \ldots, 10$.





(2) Podívejme se nyní na druhou otázku, tj. na špatně se chovající derivace. Celkem přirozená je idea na podobném principu jako výše sestavit posloupnost funkcí, které budou mít v jednom bodě stále stejnou nenlovou derivaci, ale budou čím dál tím menší, takže bodově dokonvergují k funkci identicky nulové.
Předchozí obrázek napravo vykresluje funkce

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n$$

na intervalu $[-1, 1]$ pro hodnoty $n = m^2$, $m = 1, \ldots, 10$.
Na první pohled je zjevné, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

a všechny funkce $f_n(x)$ jsou hladké. V bodě $x = 0$ je jejich derivace

$$f_n'(0) = \left((1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1}\right)|_{x=0} = 1$$

nezávisle na n. Limitní funkce pro posloupnost f_n přitom má samozřejmě všude derivaci nulovou!

(3) Protipříklad k třetímu tvrzení jsme už viděli dávno. Charakteristickou funkci $\chi_{\mathbb{Q}}$ racionálních čísel můžeme vyjádřit jako součet spočetně mnoha funkcí, které budou očíslovány právě racionálními čísly a budou vždy všude nulové, kromě jediného bodu, podle které jsou pojmenovány, kde jsou rovny 1. Riemannovy integrály všech takových funkcí budou nulové, jejich součet ale není Riemannovsky inegrovatelnou funkcí.
Právě tento příklad ukazuje na zásadní nedostatek Riemannova integrálu, ke kterému se ještě vrátíme.

Vidíme tedy, že odpověď na všechny otázky je „NE!“.
Existují však jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Je třeba jen vyžadovat, aby se rychlost bodové konvergence hodnot $f_n(x) \to f(x)$ bod od bodu příliš nelišila.

Vidíme tedy, že odpověď na všechny otázky je „NE!“.
Existují však jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Je třeba jen vyžadovat, aby se rychlost bodové konvergence hodnot $f_n(x) \to f(x)$ bod od bodu příliš nelišila.

Definition

Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** na intervalu $[a, b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Vidíme tedy, že odpověď na všechny otázky je „NE!“.
Existují však jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Je třeba jen vyžadovat, aby se rychlost bodové konvergence hodnot $f_n(x) \to f(x)$ bod od bodu příliš nelišila.

Definition

Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** na intervalu $[a, b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

O řadě funkcí řekneme, že konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Graficky si definici můžeme představit tak, že do pásu vzniklého posunutím limitní funkce $f(x)$ na $f(x) \pm \epsilon$ pro libovolně malé, ale pevně zvolené kladné ϵ, vždy padnou všechny funkce $f_n(x)$, až na konečně mnoho z nich.

Graficky si definici můžeme představit tak, že do pásu vzniklého posunutím limitní funkce $f(x)$ na $f(x) \pm \epsilon$ pro libovolně malé, ale pevně zvolené kladné ϵ, vždy padnou všechny funkce $f_n(x)$, až na konečně mnoho z nich.
Následující tři věty lze stručně shrnout tvrzením, že všechna tři obecně neplatná tvrzení platí pro stejnoměrnou konvergenci (pozor ale na jemnosti u derivování).

Theorem

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Pak je také $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $[a, b]$.

Theorem

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Pak je také $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $[a, b]$.

Důkaz

Chceme ukázat, že pro libovolný pevný bod $x_0 \in [a, b]$ a jakékoliv pevně zvolené malé $\epsilon > 0$ bude $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x dostatečně blízká k x_0. Z definice stejnoměrné spojitosti je pro naše $\epsilon > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna dostatečně velká n.

Dokončení důkazu.

Zvolme si tedy nějaké takové n a uvažme $\delta > 0$ tak, aby $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x z δ-okolí x_0 (to je možné, protože všechny $f_n(x)$ jsou spojité). Pak

$$|f(x)-f(x_0)| < |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < 3\epsilon$$

pro všechna x z námi zvoleného δ-okolí bodu x_0. □

Dokončení důkazu.

Zvolme si tedy nějaké takové n a uvažme $\delta > 0$ tak, aby $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x z δ-okolí x_0 (to je možné, protože všechny $f_n(x)$ jsou spojité). Pak

$$|f(x)-f(x_0)| < |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < 3\epsilon$$

pro všechna x z námi zvoleného δ-okolí bodu x_0. □

Theorem

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí na konečném intervalu $[a, b]$, které stejnoměrně konvergují k funkci $f(x)$. Pak také $f(x)$ je integrovatelná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Definition

Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ je **stejnoměrně Cauchyovská**, jestliže pro každé (malé) kladné číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo N takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna $n \geq N$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Zřejmě je každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$ také stejnoměrně Cauchyovská na témže intervalu. Toto pozorování nám už stačí k důkazu naší věty, zastavíme se ale napřed u užitečného obráceného tvrzení.

Lemma

Každá stejnoměrně Cauchyovská posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci f na tomto intervalu.

Důkaz.

Z podmínky na funkce plyne, že pro každé $x \in [a, b]$ je $f_n(x)$ Cauchyovskou posloupností reálných (případně komplexních) čísel. Bodově tedy konverguje posloupnost funkcí $f_n(x)$ k nějaké $f(x)$.

Lemma

Každá stejnoměrně Cauchyovská posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci f na tomto intervalu.

Důkaz.

Z podmínky na funkce plyne, že pro každé $x \in [a, b]$ je $f_n(x)$ Cauchyovskou posloupností reálných (případně komplexních) čísel. Bodově tedy konverguje posloupnost funkcí $f_n(x)$ k nějaké $f(x)$. Ve skutečnosti $f_n(x) \to f(x)$ stejnoměrně: Zvolme N tak, aby $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ pro nějaké předem zvolené malé kladné ϵ a všechna $n \geq N$, $x \in [a, b]$. Nyní zvolíme pevně jedno takové n a odhadneme

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$. $\square$

Důkaz věty o záměně limity a integrálu

Víme: (1) každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská,

Důkaz věty o záměně limity a integrálu

Víme: (1) každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská, (2) Riemannovy součty pro jednotlivé členy naší posloupnosti konvergují k $\int_a^b f_n(x)\,dx$ nezávisle na výběru dělení a reprezentantů.

Důkaz věty o záměně limity a integrálu

Víme: (1) každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská, (2) Riemannovy součty pro jednotlivé členy naší posloupnosti konvergují k $\int_a^b f_n(x)\,dx$ nezávisle na výběru dělení a reprezentantů.
Proto jestliže platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$, pak také

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx \right| \le \epsilon |b - a|.$$

Důkaz věty o záměně limity a integrálu

Víme: (1) každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská, (2) Riemannovy součty pro jednotlivé členy naší posloupnosti konvergují k $\int_a^b f_n(x)\,dx$ nezávisle na výběru dělení a reprezentantů.

Proto jestliže platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$, pak také

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx \right| \le \epsilon |b - a|.$$

Je tedy posloupnost čísel $\int_a^b f_n(x)\,dx$ Cauchyovská a proto konvergentní. Současně díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti $f_n(x)$ platí pro $f(x)$ ze stejného důvodu, že její Riemannovy součty jsou libovolně blízké Riemannových součtům pro funkce f_n s dostatečně velkým n a limitní funkce $f(x)$ bude tedy opět

integrovatelná.

Důkaz věty o záměně limity a integrálu

Víme: (1) každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská, (2) Riemannovy součty pro jednotlivé členy naší posloupnosti konvergují k $\int_a^b f_n(x)\,dx$ nezávisle na výběru dělení a reprezentantů.
Proto jestliže platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$, pak také

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx \right| \leq \epsilon |b - a|.$$

Je tedy posloupnost čísel $\int_a^b f_n(x)\,dx$ Cauchyovská a proto konvergentní. Současně díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti $f_n(x)$ platí pro $f(x)$ ze stejného důvodu, že její Riemannovy součty jsou libovolně blízké Riemannových součtům pro funkce f_n s dostatečně velkým n a limitní funkce $f(x)$ bude tedy opět integrovatelná. Zároveň $\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \epsilon |b - a|$, musí proto jít o správnou limitní hodnotu.

Theorem

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu $[a, b]$, jejichž hodnoty $f_n(x_0)$ v nějakém bodu x_0 tohoto intervalu konvergují k hodnotě $f(x_0)$. Dále nechť jsou všechny derivace $g_n(x) = f_n'(x)$ spojité a nechť konvergují na témže intervalu stejnoměrně k funkci $g(x)$. Pak je také funkce $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ diferencovatelná na intervalu $[a, b]$, funkce $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ a platí zde $f'(x) = g(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny naše funkce splňují $f_n(x_0) = 0$ (v opačném případě je pozměníme o konstanty a na výsledku úvah se nic nezmění). Pak ovšem můžeme psát pro všechny $x \in [a, b]$

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} g_n(t)\, dt.$$

Pokračování důkazu

Protože ale funkce g_n stejnoměrně konvergují k funkci g na celém $[a, b]$, tedy tím spíše na intervalech $[a, x]$, kde $a \leq x \leq b$, platí také

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Protože je funkce g coby stejnoměrná limita spojitých funkcí opět spojitou funkcí, dokázali jsme vše potřebné, viz Věta o Riemannově integrálu a antiderivaci.

Pro nekonečné řady můžeme předchozí výsledky shrnout takto:

Theorem

Uvažme funkce $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$.

(1) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$, je i funkce $S(x)$ spojitá na I.*

Pro nekonečné řady můžeme předchozí výsledky shrnout takto:

Theorem

Uvažme funkce $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$.

(1) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$, je i funkce $S(x)$ spojitá na I.*

(2) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojitě diferencovatelné na I, a obě řady*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

konvergují stejnoměrně, pak je také funkce $S(x)$ spojitě diferencovatelná a platí $S'(x) = T(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Theorem

(3) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ Riemannovsky integrovatelné na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$ na I, je tamtéž integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často **Weierstrassův test**.

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často **Weierstrassův test**.

Předpokládejme tedy, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné reálné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$.

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často **Weierstrassův test**.
Předpokládejme tedy, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné reálné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$.
Odhadneme rozdíly částečných součtů $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ pro různé indexy k. Pro $k > m$:

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často **Weierstrassův test**.

Předpokládejme tedy, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \le a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné reálné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$.

Odhadneme rozdíly částečných součtů $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ pro různé indexy k. Pro $k > m$: $|s_k(x) - s_m(x)| \le \left|\sum_{n=m+1}^{k} f_n(x)\right| \le \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(x)| \le \sum_{n=m+1}^{k} a_k$.

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často **Weierstrassův test**.
Předpokládejme tedy, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné reálné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$.
Odhadneme rozdíly částečných součtů $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ pro různé indexy k. Pro $k > m$: $|s_k(x) - s_m(x)| \leq \left|\sum_{n=m+1}^{k} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^{k} a_k$.
Pokud je řada (kladných) konstant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak bude posloupnost jejích částečných součtů Caychyovská. Právě jsme proto zjistili, že posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ je stejnoměrně Caychyovská.

Dokázali jsme tedy:

Theorem

Nechť $f_n(x)$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* $I = [a, b]$ *a platí* $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$. *Je-li řada čísel* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak řada* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně.*

Plán přednášky

Důsledky pro mocninné řady

Weierstrassův test je velice užitečný pro diskusi mocninných řad $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se středem v bodě x_0.

Důsledky pro mocninné řady

Weierstrassův test je velice užitečný pro diskusi mocninných řad $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se středem v bodě x_0.
Kdysi jsme ukázali, že každá taková řada konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde tzv. poloměr konvergence $\delta \geq 0$ může být také nula nebo ∞. Zejména jsme v důkazu konvergence řady $S(x)$ používali srovnání s vhodnou geometrickou posloupností. Podle Weistrassova testu je proto řada $S(x)$ stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním (tj. konečném) intervalu [a,b] uvnitř intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dokázali jsme tedy:

Důsledky pro mocninné řady

Weierstrassův test je velice užitečný pro diskusi mocninných řad $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se středem v bodě x_0.
Kdysi jsme ukázali, že každá taková řada konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde tzv. poloměr konvergence $\delta \geq 0$ může být také nula nebo ∞. Zejména jsme v důkazu konvergence řady $S(x)$ používali srovnání s vhodnou geometrickou posloupností. Podle Weistrassova testu je proto řada $S(x)$ stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním (tj. konečném) intervalu [a,b] uvnitř intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dokázali jsme tedy:

Theorem

Každá mocninná řada $S(x)$ je ve všech bodech uvnitř svého intervalu konvergence spojitá a spojitě diferencovatelná. Funkce $S(x)$ je také integrovatelná a derivování i integrování lze provádět člen po členu.

Ve skutečnosti platí také tzv. **Abelova věta**, která říká, že mocninné řady jsou spojité i v hraničních bodech svého definičního oboru (včetně případných nekonečných limit). Tu zde nedokazujeme.

Ve skutečnosti platí také tzv. **Abelova věta**, která říká, že mocninné řady jsou spojité i v hraničních bodech svého definičního oboru (včetně případných nekonečných limit). Tu zde nedokazujeme.

Právě dokázané příjemné vlastnosti mocninných řad zároveň poukazují na hranice jejich použitelnosti při modelování závislostí nějakých praktických jevů nebo procesů. Zejména není možné pomocí mocninných řad dobře modelovat po částech spojité funkce. Jak uvidíme v zápětí, je možné pro konkrétněji vymezené potřeby nacházet lepší sady funkcí $f_n(x)$ než jsou hodnoty $f_n(x) = x^n$. Nejznámějšími příklady jsou Fourierovy řady a tzv. wawelety, které přibolížíme v další kapitole.