Diskrétní matematika B – 11. týden
Kombinatorické výpočty

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2013

Obsah přednášky

1. Motivace
   - Opakování kombinatorických vztahů
2. Vytvořující funkce
3. (Formální) mocninné řady
   - Přehled mocninných řad
   - Operace s vytvořujícími funkcemi
4. Řešení rekurencí
   - Fibonacciho čísla
   - Catalanova čísla

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, průběžně připravovaný *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. **Introduction to Algorithms**, MIT Press, 2009.
- Robert Sedgewick, Philippe Flajolet, **An Introduction to the Analysis of Algorithms**, Addison-Wesley, 1995.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, **Concrete Mathematics**, Addison-Wesley, 1994.
- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)

Úvodní motivace

Naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

odvození Cayleyho formule Určete počet stromů na daných n vrcholech.

Analýza algoritmů Určete očekávaný počet porovnání během algoritmu `Quicksort`.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k-1$ a $n-k$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right).$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \ C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \qquad \textit{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n-1) + 2 \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \qquad \textit{vynásob } n$$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} \qquad \textit{tentýž výraz pro } C_{n-1}$$

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1) \qquad \textit{odečteno a upraveno}$$

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n.

Nejprve si pomůžeme drobným trikem, kdy vydělíme obě strany výrazem $n(n+1)$:

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

Nyní tento vztah „rozbalíme“ (*telescope*, příp. si pomůžeme substitucí $B_n = C_n/n+1$):

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} + \cdots + \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} + \frac{C_1}{2}$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1}\right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady). Přitom je možné odhadnout $H_n \sim \int_1^n \frac{dx}{x} + \gamma$, odkud

$$C_n \sim 2(n+1)(\ln(n+1) + \gamma - 2) + 2.$$

Opakování kombinatorických vztahů

Stručně nyní zopakujme některé důležité kombinatorické pojmy a vztahy:

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Vandermondova konvoluce $$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i + j + k = 22$ a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \ j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \ k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(x^0+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři možnosti** $3*5+3*2+1*1$, $3*5+2*2+3*1$, $2*5+5*2+2*1$ a $2*5+4*2+4*1$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah". Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.
Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$ a a_{50} taková, že a_i je násobkem i pro všechna $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ a zároveň $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$. Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u x^{100} v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$
$$(1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$

Podobným způsobem můžeme znovu velmi snadno odvodit některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Věta (binomická)

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $r \in \mathbb{R}$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Na levou stranu se můžeme dívat jako na součin n polynomů, pravá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením. Dosazením čísel $x = 1$, resp. $x = -1$ dostáváme známé vzorce:

Důsledek

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

Důsledek

Platí

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme $n(1+x)^{n-1}$, derivací pravé strany (člen po členu) pak $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Dosazením $x = 1$ dostaneme tvrzení. $\square$

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninných řad k příslušným funkcím.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci,...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro n-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo alespoň asymptotické chování.

Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty[1].

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

Poznámka

Jméno vychází z toho, že exponenciální funkce e^x je (exponenciální) vytvořující funkcí pro základní posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$.
V některých případech (např. v důkazu Cayleyho věty) je použití exponenciálních vytvořujících funkcí výhodnější.

[1] Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $K \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $n \geq 1$ *je* $|a_n| \leq K^n$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$. *Hodnotami funkce* $a(x)$ *na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má* $a(x)$ *v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Přehled mocninných řad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n,$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{0+n-1}{n-1} + \cdots + \binom{k+n-1}{n-1} x^k + \cdots .$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.
- Substitucí polynomu $f(x)$ s nulovým absolutním členem za x vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro $f(x) = \alpha x$, což odpovídá vynásobení k–tého členu posloupnosti skalárem α^k. Dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

  tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k)$. Posloupnost (c_n) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_n), (b_n)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \ldots)$ se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} x^n,$$

což již sice máme dokázáno z dřívějška (dokonce dvakrát – jednou díky zobecněné binomické větě a podruhé díky derivaci řady), ale další důkaz jistě neuškodí ☺

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{50}).$$

Tento součin upravíme na tvar $(1-x)^{-3}(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$, odkud pomocí zobecněné binomické věty dostaneme

$$\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}x^2+\cdots\right)(1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+x^{72}+\dots)$$

a tedy koeficientem u x^{70} je zřejmě $\binom{70+2}{2}-\binom{70+2-31}{2}-\binom{70+2-41}{2}-\binom{70+2-51}{2}=1061.$

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Řešení

Potřebnou konvoluci získáme součinem řad $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$. Odtud

$$[x^n]\frac{1}{(1-x)^2} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(n+1-k),$$

odkud již snadnou úpravou dostaneme požadované.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n, tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_n = 3^n - 2^n$.

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{n\geq 0} nC_n x^n = \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n + 2\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}x^n$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu (vynásobíme integračním faktorem $e^{\int -\frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x} = (1-x)^2$, odkud $[(1-x)^2 C(x)]' = \frac{2x}{1-x}$,) a tedy

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\left(\ln\frac{1}{1-x} - x\right),$$

odkud konečně $C_n = 2(n+1)(H_{n+1}-1) - 2n$.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`).
Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.
Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.
Pro vyjádření koeficientu u x^n ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^n]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1 - x - x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x_2$ dostáváme vztah

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - \lambda_1 x} + \frac{b}{1 - \lambda_2 x},$$

odkud snadno pomocí znalostí o vytvořujících funkcích $F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n$

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$. Navíc je vidět, že $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.
Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny, je situace jednodušší – viz dříve.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$:

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$B(x) = \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n =$$
$$= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 =$$
$$= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že ve výše uvedeném výpočtu jsme nahradili konvoluci $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0$ vztahem $b_n = b_0 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_0 + b_n b_{-1} + b_{n+1} b_{-2} + \cdots$. Díky naší konvenci to ale není problém a velmi to usnadňuje práci se sumami (s nekonečnými součty se zde pracuje podstatně snadněji než s konečnými, kdy musíme neustále hlídat meze).

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady. Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0,0]$ do $[n,n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n+2)$-úhelníku.

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).[a]

[a] Narozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:
$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$
- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování „na kraji" zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n=0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1-x^2}{1-4x^2+x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1-4x^2+x^4}.$$

- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1-4z+z^2)$, pak totiž $C(x) = (1-x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1-x^2)D(x^2) = [x^n](1-x)D(x)$, a tedy $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lfloor \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rfloor.$$

Např. $c_{20} = 413403$.