

PA081: Programování numerických výpočtů

Aleš Křenek

jaro 2013

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

O čem to bude

- ▶ zajímá nás chování skutečného světa
 - ▶ problémy přírodovědné, technické, humanitní ...
- ▶ popisujeme matematickými prostředky
 - ▶ zejména pomocí reálných čísel
 - ▶ umělý aparát, leckdy zcela neodpovídá skutečnosti
 - ▶ za staletí celkem zvládnutý, vyučovaný od základní školy, obecně přijímaný

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

O čem to bude

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ zákonitosti zkoumaných systémů typicky vyjádřeny rovnicemi
- ▶ zajímavé systémy → složité rovnice
 - ▶ reprezentativní příklad – Schrödingerova rovnice

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}, t)$$

- ▶ analyticky řešitelná jen pro triviální případy
 - ▶ izolovaná částice, částice v potenciálové jámě, ..., atom vodíku
 - ▶ i tak je řešení dost komplikované
- ▶ numerické řešení je jediný realisticky možný přístup

O čem to bude

- ▶ numerická matematika
 - ▶ řešení matematicky formulovaného problému aritmetickými prostředky
 - ▶ zpravidla algoritmický postup - numerická metoda
- ▶ disciplína podstatně starší než počítače

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

O čem to bude

- ▶ numerická matematika
 - ▶ řešení matematicky formulovaného problému aritmetickými prostředky
 - ▶ zpravidla algoritmický postup - numerická metoda
- ▶ disciplína podstatně starší než počítače
- ▶ metody jsou známé, naprogramujeme je a je hotovo
- ▶ ne tak docela

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ pro dané n vypočítejte integrál

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ pro dané n vypočítejte integrál

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

- ▶ očekávané vlastnosti

- ▶ $E_0 = [e^{x-1}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$
- ▶ pro $0 \leq x \leq 1$ platí $x^n \geq 0$ a $0 < e^{x-1} \leq 1$,
tedy $E_n > 0$
- ▶ podobně

$$E_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ integrací per-partes $u = x^n$, $dv = e^{x-1} dx$

$$E_n = \left[x^n e^{x-1} \right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - n E_{n-1}$$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ integrací per-partes $u = x^n$, $dv = e^{x-1} dx$

$$E_n = \left[x^n e^{x-1} \right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - n E_{n-1}$$

```
float    e = 2.7182818;  
float    E[20];  
int      n;  
  
E[0] = 1.0-1.0/e;  
for (n=1; n<20; n++) {  
    E[n] = 1.0 - n * E[n-1];  
    printf("%d: %f\n",n,E[n]);  
}
```

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

1: 0.367879
2: 0.264241
3: 0.207277
4: 0.170893
5: 0.145534
6: 0.126796
7: 0.112430
8: 0.100563
9: 0.094933
10: 0.050674
11: 0.442581
12: -4.310974
13: 57.042664
14: -797.597290
15: 11964.958984
16: -191438.343750
17: 3254452.750000
18: -58580148.000000
19: 1113022848.000000

O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ co je špatně?
- ▶ pracujeme s konečnou reprezentací reálného čísla
 - ▶ společný problém ručního i strojového zpracování
 - ▶ v počítači daleko plíživější podoba (nevidíme mezivýsledky)

O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ co je špatně?
- ▶ pracujeme s konečnou reprezentací reálného čísla
 - ▶ společný problém ručního i strojového zpracování
 - ▶ v počítači daleko plíživější podoba (nevidíme mezivýsledky)
- ▶ v proměnné $E[n]$ není uloženo přesně E_n
už na začátku zatíženo chybou, $E[0] = E_0 + \epsilon$

O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

(De)motivační příklad

- ▶ co je špatně?
- ▶ pracujeme s konečnou reprezentací reálného čísla
 - ▶ společný problém ručního i strojového zpracování
 - ▶ v počítači daleko plíživější podoba (nevidíme mezivýsledky)
- ▶ v proměnné $E[n]$ není uloženo přesně E_n
už na začátku zatíženo chybou, $E[0] = E_0 + \epsilon$
- ▶ i při zcela přesném výpočtu:

$$E[1] = 1 - E[0] = 1 - E_0 - \epsilon = E_1 - \epsilon$$

$$E[2] = 1 - 2E[1] = 1 - 2E_1 + 2\epsilon = E_2 + 2\epsilon$$

$$E[3] = 1 - 3E[2] = 1 - 3E_2 - 3(2\epsilon) = E_3 - 3(2\epsilon)$$

$$\vdots$$

$$E[n] = \dots = E_n + (-1)^n n! \epsilon$$

O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtuPřetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

O čem to tedy bude

- ▶ představení numerických metod pro řešení vybraných problémů
 - ▶ pragmaticky, bez rozsáhlé teoretické analýzy, okrajových podmínek atd.
- ▶ formulace přiměřeně přesného a efektivního algoritmu
 - ▶ matematicky korektní metoda nestačí
 - ▶ pro různá použití jsou vhodné různé alternativy
- ▶ použití na smysluplném příkladu

O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ obecné zásady psaní numerického kódu
- ▶ nelineární rovnice

$$f(x) = y$$

- ▶ optimalizace (hledání lokálního minima)
- ▶ lineární úlohy

$$Ax = B$$

- ▶ automatické derivování
- ▶ diferenciální rovnice (zlehka)
 - ▶ modelování dynamických systémů
- ▶ zpracování signálů

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti
Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání
Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení
Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení
Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Předpoklady a návaznosti

- ▶ předpokládané znalosti
 - ▶ návrh algoritmů, elementární schopnost programování
 - ▶ porozumět kódu v C
 - ▶ programovat ve svém oblíbeném jazyce (C++, Java, Fortran, Python, ...)
 - ▶ základy lineární algebry a matematické analýzy
 - ▶ základní orientace v architektuře a assembleru x86
 - ▶ <http://www.intel.com/products/processor/manuals/>
 - ▶ pro referenci, netřeba číst všechno ;-)

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Předpoklady a návaznosti

- ▶ předpokládané znalosti
 - ▶ návrh algoritmů, elementární schopnost programování
 - ▶ porozumět kódu v C
 - ▶ programovat ve svém oblíbeném jazyce (C++, Java, Fortran, Python, ...)
 - ▶ základy lineární algebry a matematické analýzy
 - ▶ základní orientace v architektuře a assembleru x86
 - ▶ <http://www.intel.com/products/processor/manuals/>
 - ▶ pro referenci, netřeba číst všechno ;-)
- ▶ návaznosti
 - ▶ M4180: Numerické metody I
 - ▶ PV027: Optimalizace
 - ▶ IA039: Architektura superpočítačů a intenzivní výpočty
 - ▶ PV192: Paralelní technické systémy
 - ▶ PV197: GPU Programming
 - ▶ diplomové práce

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ znalosti v rozsahu přednášek
- ▶ písemná část
 - ▶ teorie i praktický příklad
 - ▶ 10 příkladů na cca. 1 hodinu
- ▶ ústní část
 - ▶ povídání nad písemkou
 - ▶ co se zvládne doplnit a opravit, to se počítá

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ domácí úkoly
 - ▶ dobrovolné, slouží k lepšímu pochopení problematiky
 - ▶ zadávány průběžně několikrát za semestr
 - ▶ řešení do dalšího týdne
 - ▶ drobné body k dobru ke zkoušce
- ▶ konzultace
 - ▶ v mezích možností kdykoli po domluvě emailem
 - ▶ ÚVT, Šumavská 15 (Gotex), 3. patro (CERIT-SC)

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Čísla v plovoucí řádové čárce

- ▶ standard IEEE 754
 - ▶ vychází návrhu reprezentace čísel v koprocесору Intel 8087
- ▶ základní formát $\pm 1.\text{mmmmmmmmmm} \dots \times 2^{\pm ee\dots}$
 - ▶ znaménko mantisy (1 bit)
 - ▶ mantisa $1.\text{mmmmmmmmmm}$
 - ▶ binárně, absolutní hodnota
 - ▶ číslo v intervalu $[1, 2)$ v dané přesnosti
 - ▶ nekonečná množina pokryta konečným počtem hodnot
 - ▶ **základní zdroj nepřesnosti**
 - ▶ exponent
 - ▶ binární číslo v rozsahu 1 až např. 254
 - ▶ znamená hodnoty exponentu -126 až +127
 - ▶ speciální význam hodnot 00...00 a 11...11 - kódování $\pm 0, \pm \infty, \pm \text{NaN}$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Čísla v plovoucí řádové čárce

- ▶ nejběžnější typy - velikosti v bitech a rozsah exponentu

typ	exp.	mantisa	celkem	rozsah exp.
Single (float)	8	23	32	127
Double	11	52	64	1023
Quad (long double)	15	112	128	16383

- ▶ tj. např. největší číslo typu `float` je $2^{127} \doteq 10^{38}$
- ▶ nejmenší nenulové $2^{-126} \doteq 10^{-37}$
- ▶ relativní chyba je omezena $2^{-25} \doteq 10^{-8}$
 - ▶ tedy počítáme na cca. 8 platných cifer

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Ztráta přesnosti sčítání

- ▶ pro zjednodušení v desítkové soustavě a na 3 platné cifry mantisy
- ▶ sečtěme $1.23e3$ a $1.00e0$
 - ▶ nutné sjednocení exponentů:
 $1.23e3 + 0.001e3 = 1.231e3 \doteq 1.23e3$
 - ▶ v rámci dané přesnosti korektní výsledek

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Ztráta přesnosti sčítání

- ▶ pro zjednodušení v desítkové soustavě a na 3 platné cifry mantisy
- ▶ sečteme $1.23e3$ a $1.00e0$
 - ▶ nutné sjednocení exponentů:
 $1.23e3 + 0.001e3 = 1.231e3 \doteq 1.23e3$
 - ▶ v rámci dané přesnosti korektní výsledek
- ▶ k $1.23e3$ desetkrát přičteme $1.00e0$
 - ▶ opakované aplikování předchozího postupu dává opět $1.23e3$
 - ▶ nemusí to být to, co jsme chtěli
 - ▶ $1.23e3 + (1.00e0 + \dots + 1.00e0) = 1.24e3$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Ztráta přesnosti sčítání

- ▶ pro zjednodušení v desítkové soustavě a na 3 platné cifry mantisy
- ▶ sečteme $1.23e3$ a $1.00e0$
 - ▶ nutné sjednocení exponentů:
 $1.23e3 + 0.001e3 = 1.231e3 \doteq 1.23e3$
 - ▶ v rámci dané přesnosti korektní výsledek
- ▶ k $1.23e3$ desetkrát přičteme $1.00e0$
 - ▶ opakované aplikování předchozího postupu dává opět $1.23e3$
 - ▶ nemusí to být to, co jsme chtěli
 - ▶ $1.23e3 + (1.00e0 + \dots + 1.00e0) = 1.24e3$
- ▶ operace v plovoucí řádové čárce nejsou asociativní
 - ▶ ani tam, kde jsme na to z algebry zvyklí

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Ztráta přesnosti sčítání

Čekáme-li kumulativní efekt, sčítání a odčítání je třeba provést nejprve na číslech se srovnatelným exponentem.

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Katastrofální zrušení

- ▶ odečtení dvou vzájemně blízkých čísel vede k výrazné ztrátě přesnosti

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Katastrofální zrušení

- ▶ odečtení dvou vzájemně blízkých čísel vede k výrazné ztrátě přesnosti
- ▶ rozdíl dvou měření s přesností na 3 platné cifry:

$$1.23 - 1.22$$

- ▶ binární reprezentace: 1.0011101 a 1.0011100
 - ▶ zatížena chybami 0.3% a 0.1%

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

**Katastrofální
zrušení**

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Katastrofální zrušení

- ▶ odečtení dvou vzájemně blízkých čísel vede k výrazné ztrátě přesnosti
- ▶ rozdíl dvou měření s přesností na 3 platné cifry:

$$1.23 - 1.22$$

- ▶ binární reprezentace: 1.0011101 a 1.0011100
 - ▶ zatížena chybami 0.3% a 0.1%
- ▶ odečtením dostaneme binárně 0.0000001, tj. 0.0078125
 - ▶ správný výsledek byl 0.01, relativní chyba **22%**
 - ▶ navíc působí dojmem **falešné přesnosti**

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

**Katastrofální
zrušení**

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Katastrofální zrušení

- ▶ odečtení dvou vzájemně blízkých čísel vede k výrazné ztrátě přesnosti
- ▶ rozdíl dvou měření s přesností na 3 platné cifry:

$$1.23 - 1.22$$

- ▶ binární reprezentace: 1.0011101 a 1.0011100
 - ▶ zatížena chybami 0.3% a 0.1%
- ▶ odečtením dostaneme binárně 0.0000001, tj. 0.0078125
 - ▶ správný výsledek byl 0.01, relativní chyba **22%**
 - ▶ navíc působí dojmem **falešné přesnosti**

Vyhněme se odčítání dvou blízkých čísel. Je-li to i tak nezbytné, počítejme s výsledkem zatíženým potenciálně velkou chybou.

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

**Katastrofální
zrušení**

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Násobení a dělení

- ▶ samo o sobě nezanáší významnou chybu
- ▶ zachovává existující chybu

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Násobení a dělení

- ▶ samo o sobě nezanáší významnou chybu
- ▶ zachovává existující chybu
- ▶ příklad: $(a + b)^2$ pro $a = 1.23, b = 0.0155$, na 3 cifry
- ▶ přesný výsledek je 1.55127025

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Násobení a dělení

- ▶ samo o sobě nezanáší významnou chybu
- ▶ zachovává existující chybu
- ▶ příklad: $(a + b)^2$ pro $a = 1.23$, $b = 0.0155$, na 3 cifry
- ▶ přesný výsledek je 1.55127025
- ▶ přímý výpočet na 3 platné cifry:

$$a + b \doteq 1.23 + 0.02 = 1.25$$

- ▶ tedy $(a + b)^2 = 1.56$, chyba 0.56%
 - ▶ není to tak zlé, ale může být lepší

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Násobení a dělení

- ▶ po transformaci $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} 1.51 + 2 \times 0.0191 + 0.000240 &= \\ 1.51 + 0.0382 + 0.000240 &\doteq 1.55 \end{aligned}$$

- ▶ chyba 0.082 %, tedy téměř o řád menší
- ▶ za cenu 6 aritmetických operací místo 2
- ▶ bude 3× pomalejší

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Násobení a dělení

- ▶ po transformaci $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}1.51 + 2 \times 0.0191 + 0.000240 &= \\1.51 + 0.0382 + 0.000240 &\doteq 1.55\end{aligned}$$

- ▶ chyba 0.082 %, tedy téměř o řád menší
- ▶ za cenu 6 aritmetických operací místo 2
- ▶ bude 3× pomalejší
... uvidíme

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Měření rychlosti výpočtu

Naivní přístup

- ▶ POSIX volání `gettimeofday()`

```
gettimeofday(&start, NULL);  
c = a + b;  
c *= c;  
gettimeofday(&stop, NULL);
```

- ▶ současné CPU 2–3 GHz
- ▶ 1 aritmetická operace ~ 1–10 ns
- ▶ nemáme tak přesné hodiny

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Číslo v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Měření rychlosti výpočtu

Zopakujeme v cyklu

- ▶ opakování 10^9 × navýší čas na měřitelnou ~ 1 s

```
gettimeofday(&start, NULL);  
for (i=0; i<1000000000; i++) {  
    c = a + b;  
    c *= c;  
}  
gettimeofday(&stop, NULL);
```

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

**Měření rychlosti
výpočtu**

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Měření rychlosti výpočtu

Zopakujeme v cyklu

- ▶ opakování $10^9 \times$ navýší čas na měřitelnou ~ 1 s

```
gettimeofday(&start, NULL);  
for (i=0; i<1000000000; i++) {  
    c = a + b;  
    c *= c;  
}  
gettimeofday(&stop, NULL);
```

- ▶ počítá podstatně rychleji
 - ▶ trochu podezřelé

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

**Měření rychlosti
výpočtu**

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Měření rychlosti výpočtu

Zopakujeme v cyklu

- ▶ optimalizující kompilátor `gcc -O3 -funroll-loops`

```
.L2:
    movss    44(%rsp), %xmm0
    xorl    %eax, %eax
    addss   40(%rsp), %xmm0
    mulss   %xmm0, %xmm0
    addl    $8, %eax
    cmpl   $1000000000, %eax
    jne    .L2
    movss   %xmm0, 36(%rsp)
```

- ▶ v těle cyklu se nic nepočítá
- ▶ optimalizaci obecně chceme
 - ▶ použití registrů pro proměnné, max. využití FPU, ...
- ▶ eliminace zbytečného opakování je příliš

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

**Měření rychlosti
výpočtu**

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Měření rychlosti výpočtu

Zopakujeme v cyklu

- ▶ brzdící kód
 - ▶ uměle vložený do těla cyklu
 - ▶ za běhu programu se nevyvolá – nebrzdí doopravdy
 - ▶ zabrání příliš agresivní optimalizaci cyklu

```
nikdy = (strlen(argv[0]) == 0);
for (i=0; i<1000000000; i++) {
    c = a + b;
    c *= c;
    if (nikdy) brzda(&nikdy,&a,&b,&c);
}
```

- ▶ kompilátor musí předpokládat:
 - ▶ proměnná `nikdy` nemusí být 0
 - ▶ funkce `brzda()` má vliv na odkazované proměnné

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

**Měření rychlosti
výpočtu**

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Měření rychlosti výpočtu

Jak to dopadlo

- ▶ Intel Core2 P9400 2.4 GHz

vzorec	čas	Mflop/s	cyklů/s
$(a + b)^2$	1.20	1668	834
$a^2 + 2ab + b^2$	1.67	3578	596

- ▶ rozvinutý výpočet jen 1.4× pomalejší
 - ▶ vnitřní paralelismus procesoru
 - ▶ více FPU jednotek
 - ▶ pipelining
 - ▶ spekulativní výpočet větví programu

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Násobení a dělení

Snažme se vzorce transformovat tak, aby se nejdříve násobilo/dělilo, pak teprve sčítalo/odčítalo. Je šance na přesnější výsledek, dopad na výkon nemusí být významný.

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
ná vaznosti

Zkouška

Číslo v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Přetečení a podtečení

- ▶ násobení dvou velkých čísel může vést k nerepresentovatelnému exponentu

$$1.2e30 \times 1.2e30 = 1.44e61$$

- ▶ typ `float` umí exponent $[-37, 38]$
- ▶ výsledek operace už je ∞

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

**Přetečení a
podtečení**

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Přetečení a podtečení

- ▶ násobení dvou velkých čísel může vést k nerepresentovatelnému exponentu

$$1.2e30 \times 1.2e30 = 1.44e61$$

- ▶ typ `float` umí exponent $[-37, 38]$
- ▶ výsledek operace už je ∞
- ▶ podobně násobení dvou malých čísel vede k podtečení
 - ▶ podle nastavení aritmetiky je výsledek ± 0 nebo **denormalizované číslo**

$$0.000000\text{mmm} \times 10^{-37}$$

- ▶ další výpočty nepřesné a navíc citelně pomalejší

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

**Přetečení a
podtečení**

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Přetečení a podtečení

Při násobení a dělení více čísel uspořádejme posloupnost operací, abychom nedělili velmi malé číslo velkým, velké malým, a nenásobili vzájemně velká nebo malá čísla.

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ nevinný výpočet

```
float a=1.505, b1=1.315, b2=1.695,  
      c=a+a, d=b1+b2;
```

```
printf("%f %f %s\n",c,d,c == d ?  
      "jsou stejna" : "jsou ruzna");
```

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ nevinný výpočet

```
float a=1.505, b1=1.315, b2=1.695,  
      c=a+a, d=b1+b2;
```

```
printf("%f %f %s\n",c,d,c == d ?  
      "jsou stejna" : "jsou ruzna");
```

- ▶ má překvapivý výstup

3.010000 3.010000 jsou ruzna

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ nevinný výpočet

```
float a=1.505, b1=1.315, b2=1.695,  
      c=a+a, d=b1+b2;
```

```
printf("%f %f %s\n",c,d,c == d ?  
      "jsou stejna" : "jsou ruzna");
```

- ▶ má překvapivý výstup

3.010000 3.010000 jsou ruzna

- ▶ přesnější formát výpisu "%15.12f":

3.009999990463 3.010000228882 jsou ruzna

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ operátor `==` na reálných číslech nemá valný smysl
 - ▶ téměř vždy je zasažen chybou předchozího výpočtu
- ▶ místo něj test na dostatečnou blízkost
$$\text{fabs}(c-d) < \text{EPSILON}$$
- ▶ stanovení toleranční konstanty zpravidla empiricky
 - ▶ různá pro hodnoty $1e-15$ a $1e30$
 - ▶ silně záleží na dané úloze
 - ▶ ovlivněna i každým konkrétním výpočtem

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

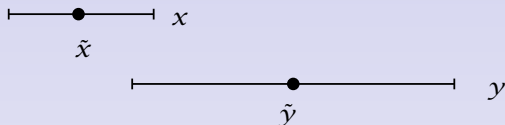
Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ porovnávání $<$ a $>$ trpí stejným problémem
 - ▶ záludnější podoba a komplikovanější řešení
- ▶ chci porovnat přesné hodnoty x a y
 - ▶ znám jen přibližná (spočtená) $\tilde{x} = x \pm \epsilon_x$, $\tilde{y} = y \pm \epsilon_y$:



O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

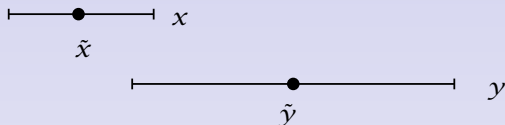
Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ porovnávání $<$ a $>$ trpí stejným problémem
 - ▶ záludnější podoba a komplikovanější řešení
- ▶ chci porovnat přesné hodnoty x a y
 - ▶ znám jen přibližná (spočtená) $\tilde{x} = x \pm \epsilon_x$, $\tilde{y} = y \pm \epsilon_y$:



- ▶ **opatrný** („miserly“) přístup
 - ▶ intervaly se i částečně překrývají \Rightarrow tvrdíme $x = y$
 - ▶ jinak porovnáme $\tilde{x} \leq \tilde{y}$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

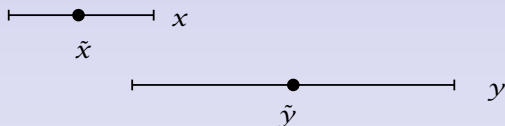
Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

- ▶ porovnávání $<$ a $>$ trpí stejným problémem
 - ▶ záludnější podoba a komplikovanější řešení
- ▶ chci porovnat přesné hodnoty x a y
 - ▶ znám jen přibližná (spočtená) $\tilde{x} = x \pm \epsilon_x$, $\tilde{y} = y \pm \epsilon_y$:



- ▶ **opatrný** („miserly“) přístup
 - ▶ intervaly se i částečně překrývají \Rightarrow tvrdíme $x = y$
 - ▶ jinak porovnáme $\tilde{x} \leq \tilde{y}$
- ▶ **hladový** („eager“) přístup
 - ▶ chceme vědět, že mohlo nastat $x > y$
 - ▶ porovnááme $\tilde{x} + \epsilon_x > \tilde{y} - \epsilon_y$.

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Problémy konečné reprezentace

Porovnávání

Na rovnost porovnávejme vždy s tolerancí.

U porovnání na nerovnost si uvědomme, co chceme vědět.

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

Numerická stabilita

(Pseudo)definice

- ▶ „metoda počítá sice špatně, ale jenom trochu špatně“
 - ▶ žádoucí a přitom realistická vlastnost všech numerických algoritmů

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

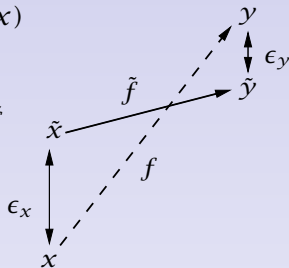
Domácí úkol

Shrnutí

Numerická stabilita

(Pseudo)definice

- ▶ „metoda počítá sice špatně, ale jenom trochu špatně“
 - ▶ žádoucí a přitom realistická vlastnost všech numerických algoritmů
- ▶ pro vstup x hledáme řešení $y = f(x)$
- ▶ ve skutečnosti
 - ▶ na aproximaci vstupu $\tilde{x} = x + \epsilon_x$
 - ▶ nepřesnou numerickou metodou \tilde{f}
 - ▶ dostaneme výsledek $\tilde{y} = y + \epsilon_y$



O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

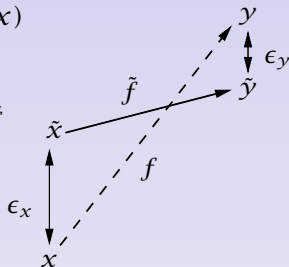
Domácí úkol

Shrnutí

Numerická stabilita

(Pseudo)definice

- ▶ „metoda počítá sice špatně, ale jenom trochu špatně“
 - ▶ žádoucí a přitom realistická vlastnost všech numerických algoritmů
- ▶ pro vstup x hledáme řešení $y = f(x)$
- ▶ ve skutečnosti
 - ▶ na aproximaci vstupu $\tilde{x} = x + \epsilon_x$
 - ▶ nepřesnou numerickou metodou \tilde{f}
 - ▶ dostaneme výsledek $\tilde{y} = y + \epsilon_y$
- ▶ algoritmus je **stabilní**, existuje-li pro každé x malé ϵ_x tak, že ϵ_y je malé
 - ▶ „malé ϵ “ znamená zpravidla $|\epsilon| \leq |\delta x|$



O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Číslo v plovoucí řádové čáře

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

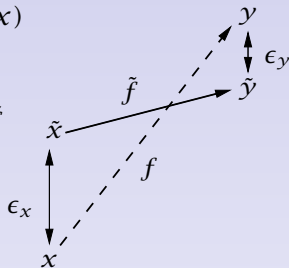
Domácí úkol

Shrnutí

Numerická stabilita

(Pseudo)definice

- ▶ „metoda počítá sice špatně, ale jenom trochu špatně“
 - ▶ žádoucí a přitom realistická vlastnost všech numerických algoritmů
- ▶ pro vstup x hledáme řešení $y = f(x)$
- ▶ ve skutečnosti
 - ▶ na aproximaci vstupu $\tilde{x} = x + \epsilon_x$
 - ▶ nepřesnou numerickou metodou \tilde{f}
 - ▶ dostaneme výsledek $\tilde{y} = y + \epsilon_y$
- ▶ algoritmus je **stabilní**, existuje-li pro každé x malé ϵ_x tak, že ϵ_y je malé
 - ▶ „malé ϵ “ znamená zpravidla $|\epsilon| \leq |\delta x|$
- ▶ silnější definice **zpětné stability** - $\epsilon_y = 0$



O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návnaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

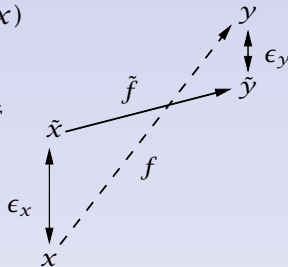
Domácí úkol

Shrnutí

Numerická stabilita

(Pseudo)definice

- ▶ „metoda počítá sice špatně, ale jenom trochu špatně“
 - ▶ žádoucí a přitom realistická vlastnost všech numerických algoritmů
- ▶ pro vstup x hledáme řešení $y = f(x)$
- ▶ ve skutečnosti
 - ▶ na aproximaci vstupu $\tilde{x} = x + \epsilon_x$
 - ▶ nepřesnou numerickou metodou \tilde{f}
 - ▶ dostaneme výsledek $\tilde{y} = y + \epsilon_y$
- ▶ algoritmus je **stabilní**, existuje-li pro každé x malé ϵ_x tak, že ϵ_y je malé
 - ▶ „malé ϵ “ znamená zpravidla $|\epsilon| \leq |\delta x|$
- ▶ silnější definice **zpětné stability** - $\epsilon_y = 0$
- ▶ pro speciální druhy problémů jiné definice stability
 - ▶ např. numerické integrování - „systém nevybuchne“



O čem to bude

(De)motivační příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čarce

Reprezentace IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti výpočtu

Přetečení a podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ `adds` je numericky stabilní implementace sčítání

$$y = x_1 + x_2$$

- ▶ zvolíme $\delta = 2^{-22}$
- ▶ relativní chyba sčítání v typu `float` je $|\delta_a| \leq 2^{-25}$
- ▶ relativní chyba uložení čísel $\delta_{1,2} \leq 2^{-25}$

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \text{adds}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)(1 + \delta_a) = \\ & x_1(1 + \delta_1)(1 + \delta_a) + x_2(1 + \delta_2)(1 + \delta_a) = \\ & (x_1 + x_2) + x_1(\delta_1 + \delta_a + \delta_1\delta_a) + x_2(\delta_2 + \delta_a + \delta_2\delta_a)\end{aligned}$$

- ▶ i v nejhorším případě $|\delta_{1,2} + \delta_a + \delta_{1,2}\delta_a| \leq 3 \times 2^{-25}$
- ▶ pro nejhorší případ $x_1 = x_2$ nastane

$$|\tilde{y} - y| = |2x_1(\delta_1 + \delta_a + \delta_1\delta_a)| \leq |\delta y|$$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ sčítání řady čísel $1230 + 1 + 1 + 1 + \dots$ je nestabilní
 - ▶ stabilní alternativa – seřadit a začít od nejmenšího

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ sčítání řady čísel $1230 + 1 + 1 + 1 + \dots$ je nestabilní
 - ▶ stabilní alternativa - seřadit a začít od nejmenšího

- ▶ úvodní příklad $E_n = 1 - nE_{n-1}$
 - ▶ pro dostatečně velké N položíme $E_N = 0$
 - ▶ počítáme

$$E_{n-1} = \frac{1 - E_n}{n}$$

- ▶ v každém kroku je chyba redukována faktorem $1/n$

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ vhodně instrumentujte program:

```
float a = 0.1;

while(a != 0) {
    a /= 2;
}
```

a změřte dobu trvání **každé iterace** cyklu zvlášť

- ▶ pozorujte různé chování programu při volbě `-ffast-math` kompilátoru gcc
- ▶ odevzdejte
 - ▶ instrumentovaný program
 - ▶ dobu trvání pro jednotlivé iterace
 - ▶ komentáře k zajímavým průvodním jevům

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v
plovoucí
řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická
stabilita

Domácí úkol

Shrnutí

- ▶ matematické modely reality
- ▶ použití idealizovaného aparátu reálných čísel
- ▶ konečná reprezentace čísel je zdrojem problémů
 - ▶ různé projevy pro různé operace
- ▶ míra závadnosti formalizována pojmem numerické stability
 - ▶ cílem je najít numericky stabilní metodu
- ▶ rychlost kritické části výpočtu
 - ▶ změření nemusí být triviální
- ▶ příště se pustíme do konkrétních problémů

O čem to bude

(De)motivační
příklad

Obsah předmětu

Předpoklady a
návaznosti

Zkouška

Čísla v plovoucí řádové čárce

Reprezentace
IEEE 754

Nepřesné sčítání

Katastrofální
zrušení

Násobení a dělení

Měření rychlosti
výpočtu

Přetečení a
podtečení

Porovnávání

Numerická stabilita

Domácí úkol

Shrnutí