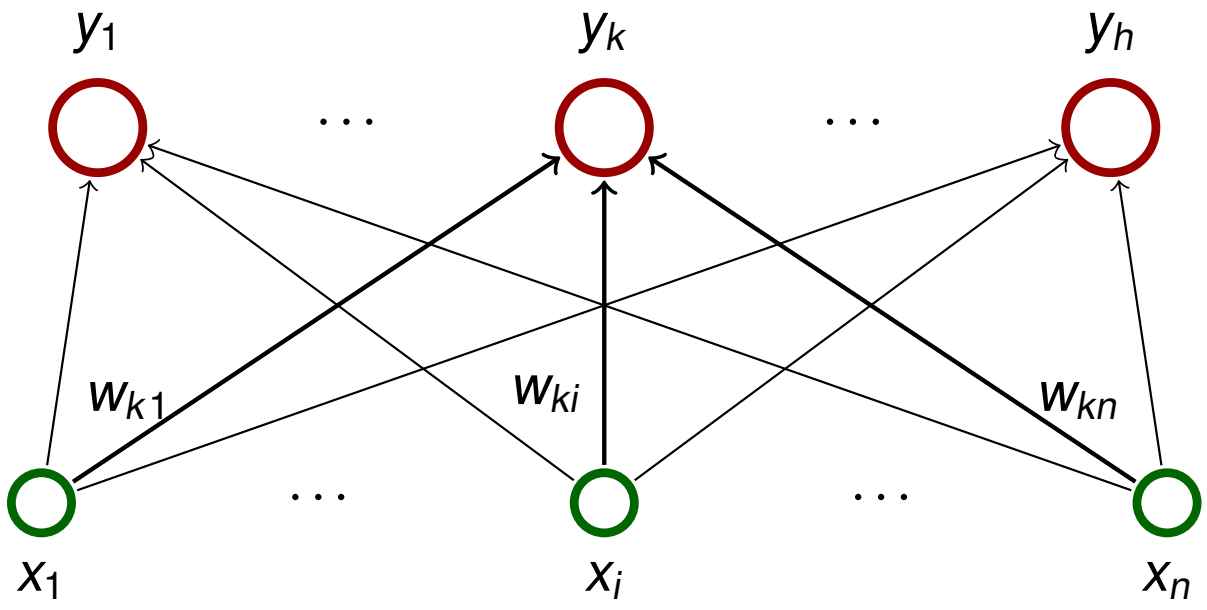
Kohonenova mapa - opakování

Organizační dynamika: Jednovrstvá síť



- Mezi neurony je navíc zavedena **topologická struktura** (tj. neurony tvoří uzly neorientovaného grafu).
- V drtivé většině případů je tato struktura buď jednorozměrná řada jednotek nebo dvojrozměrná mřížka.

Kohonenova mapa

Aktivní dynamika: Pro vstup $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a $k = 1, \ldots, h$:

$$y_k = \begin{cases} 1 & k = \arg\min_{i=1,\ldots,h} \left\| \vec{x} - \vec{w}_i \right\| \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Adaptivní dynamika: V adaptivním režimu využijeme topologickou strukturu.

- Označme $d(c, k)$ délku nejkratší cesty z neuronu c do neuronu k v topologické struktuře.
- Pro neuron c a dané $s \in \mathbb{N}_0$ definujeme **okolí** neuronu c velikosti s takto: $N_s(c) = \{k \mid d(c, k) \leq s\}$

V kroku t po předložení vstupu $\vec{x}_t$ adaptujeme každé $\vec{w}_k$ takto:

$$\vec{w}_k^{(t)} = \begin{cases} \vec{w}_k^{(t-1)} + \theta \cdot \left(\vec{x}_t - \vec{w}_k^{(t-1)} \right) & k \in N_s(c) \\ \vec{w}_k^{(t-1)} & \text{jinak} \end{cases}$$

kde $c = \arg\min_{i=1,\ldots,h} \left\| \vec{x}_t - \vec{w}_i^{(t-1)} \right\|$ a kde $\theta \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{N}_0$ jsou parametry, které se mohou v průběhu učení měnit.

Kohonenova mapa - adaptivní dynamika

Obecnější formulace adaptivní dynamiky:

$$\vec{w}_k^{(t)} = \vec{w}_k^{(t-1)} + \Theta(c,k) \cdot \left(\vec{x} - \vec{w}_k^{(t-1)}\right)$$

kde $c = \arg\min_{i=1,\ldots,h} \left\|\vec{x}_t - \vec{w}_i^{(t-1)}\right\|$. Předchozí případ potom odpovídá

$$\Theta(c,k) = \begin{cases} \theta & k \in N_s(c) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Obvykle se používá plynulejší přechod mezi nenulovými a nulovými hodnotami, např.

$$\Theta(c,k) = \theta_0 \cdot \exp\left(\frac{-d(c,k)^2}{\sigma^2}\right)$$

kde $\theta_0 \in \mathbb{R}$ určuje maximální míru změny vah a $\sigma \in \mathbb{R}$ je šířka (oba parametry se mohou v průběhu měnit).

LVQ - klasifikace - opakování

Přepodkládejme, že máme náhodně generované vzory tvaru $(\vec{x}_t, d_t)$ kde $\vec{x}_t \in \mathbb{R}^n$ je **vektor vlastností** a $d_t \in \{C_1, \ldots, C_q\}$ určuje jednu z q **tříd**.

Cílem je klasifikovat vstupy do tříd na základě znalosti vlastností, tj. každému $\vec{x}_t$ chceme přiřadit třídu tak, abychom minimalizovali pravděpodobnost chyby.

Př.: Po pásu jede náhodně „naházené“ ovoce dvou druhů: jablka a meruňky. Námi sledovaná data budou $(\vec{x}_t, d_t)$ kde

- $\vec{x}_t \in \mathbb{R}^2$, první vlastnost je hmotnost, druhá je průměr
- d_t je buď J nebo M v závislosti na tom, jestli je daný kus jablko nebo meruňka

Připouštíme možnost, že se najde jablko a meloun se stejnými mírami.

Cílem je třídit ovoce na základě hmotnosti a průměru.

LVQ - klasifikace - opakování

Využijeme vektorovou kvantizaci (Kohonenovu mapu) takto:

1. Natrénujeme mapu na vektorech vlastností $\vec{x}_t$ kde $t = 1, \ldots, \ell$.
2. Jednotlivé neurony označíme třídami. Třídu v_c neuronu c nalezneme takto:

   Pro každý neuron c a třídu C_i spočítáme četnost vzorů třídy C_i, které jsou reprezentovány neuronem c.

   Toto lze provést jedním průchodem přes vzory

   Neuronu c přiřadíme třídu s maximální četností.
3. Doladíme síť pomocí algoritmu LVQ.

Klasifikaci pomocí natrénované sítě provádíme takto: Na vektor vlastností $\vec{x}$ aplikujeme natrénovanou síť v aktivním režimu. Právě jeden neuron, řekněme c, bude mít výstup 1. Potom vstup zařadíme do třídy v_c.

LVQ1 - opakování

Postupně projdi tréninkové vzory. Pro vzor $(\vec{x}_t, d_t)$ urči nejbližší neuron c

$$c = \arg \min_{i=1,\ldots,h} \left\| \vec{x}_t - \vec{w}_i \right\|$$

Potom uprav váhy neuronu c takto:

$$\vec{w}_c^{(t)} = \begin{cases} \vec{w}_c^{(t-1)} + \alpha(\vec{x}_t - \vec{w}_c^{(t-1)}) & d_t = v_c \\ \vec{w}_c^{(t-1)} - \alpha(\vec{x}_t - \vec{w}_c^{(t-1)}) & d_t \neq v_c \end{cases}$$

Parametr α by měl být od počátku malý (cca 0.01 – 0.02) a postupně klesnout k 0.

Hranice mezi třídami vytvořená pomocí LVQ1 je poměrně dobrou aproximací *bayesovské rozhodovací hranice*.

Klasická aplikace - fonetický psací stroj

Zdroj: The Self-Organizing Map. T. Kohonen, IEEE, 1990

Cílem je automaticky zapisovat diktovaný text (v originále buď Finština nebo Japonština)

Zvuk byl nejprve předzpracován:

- 5.3 kHz low-pass filter
- digitalizace (12-bit, 13.02-kHz sampling rate)
- spektrální rozklad (FFT)
- spektrum „zkombinováno“ do 15 komponent od 200 Hz po 5 kHz -> 15 dimenzionální vstupy pro Kohonenovu mapu

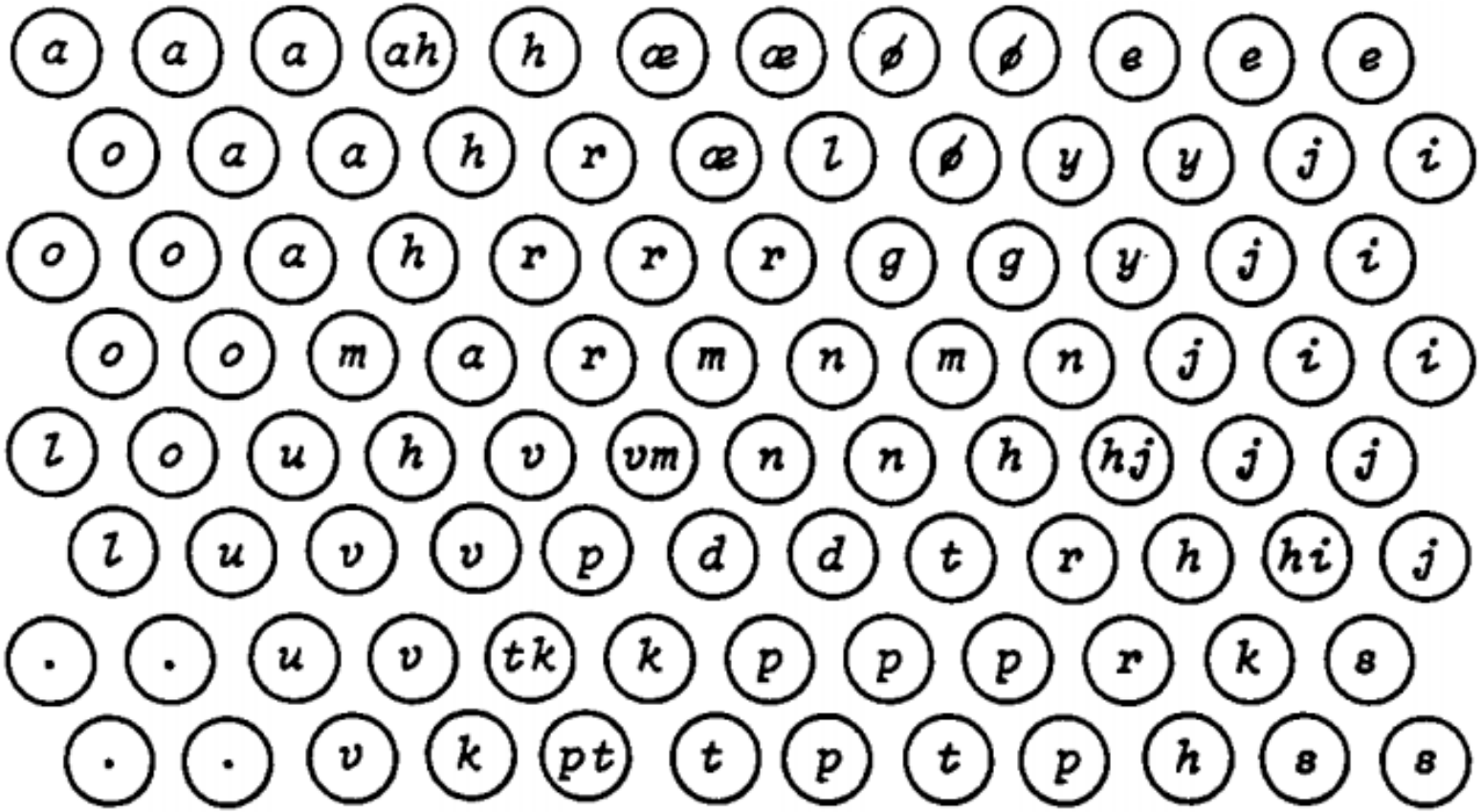
  Byla také provedena normalizace na nulové střední hodnoty komponent a konstantní délku vektorů.

Klasická aplikace - fonetický psací stroj

Vytvořena Kohonenova mapa 8×12 jednotek, hexagonální

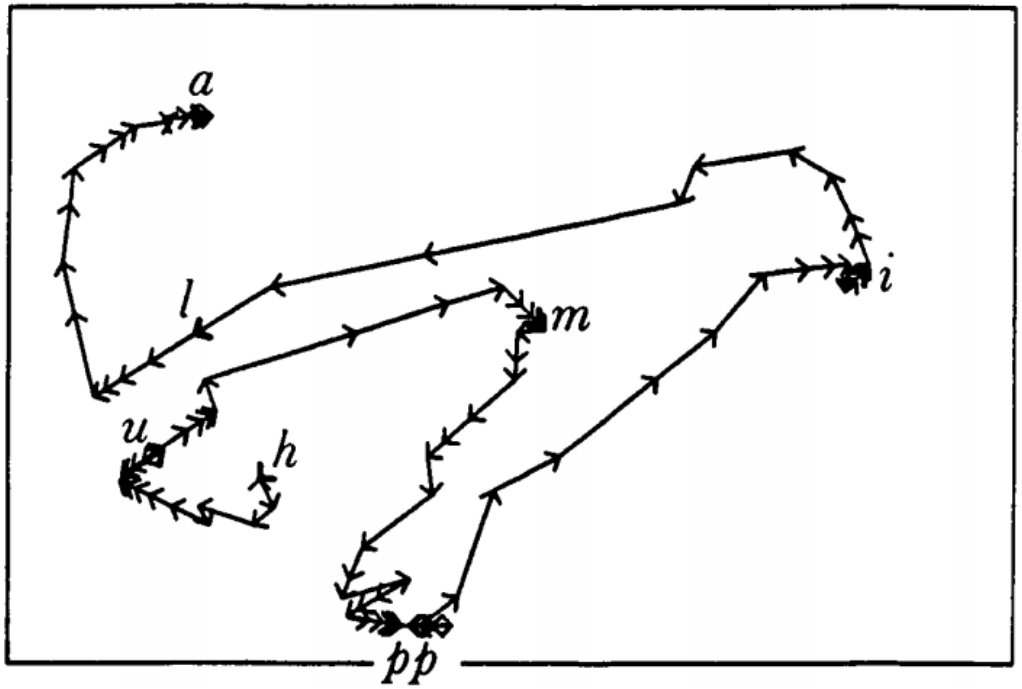
Trénována na toku 15 dim vektorů v jejich přirozeném pořadí (pouze samoorganizace)

Poté přiřazeny fonémy jednotlivým neuronům, doladěno pomocí LVQ.



Klasická aplikace - fonetický psací stroj

Mapu lze vyžít k vizualizaci mluveného slova (zde *Humpilla*):



Může být využito k rozpoznávání mluvených slov s použitím klasifikátoru natrénovaného na mnoha překladech.

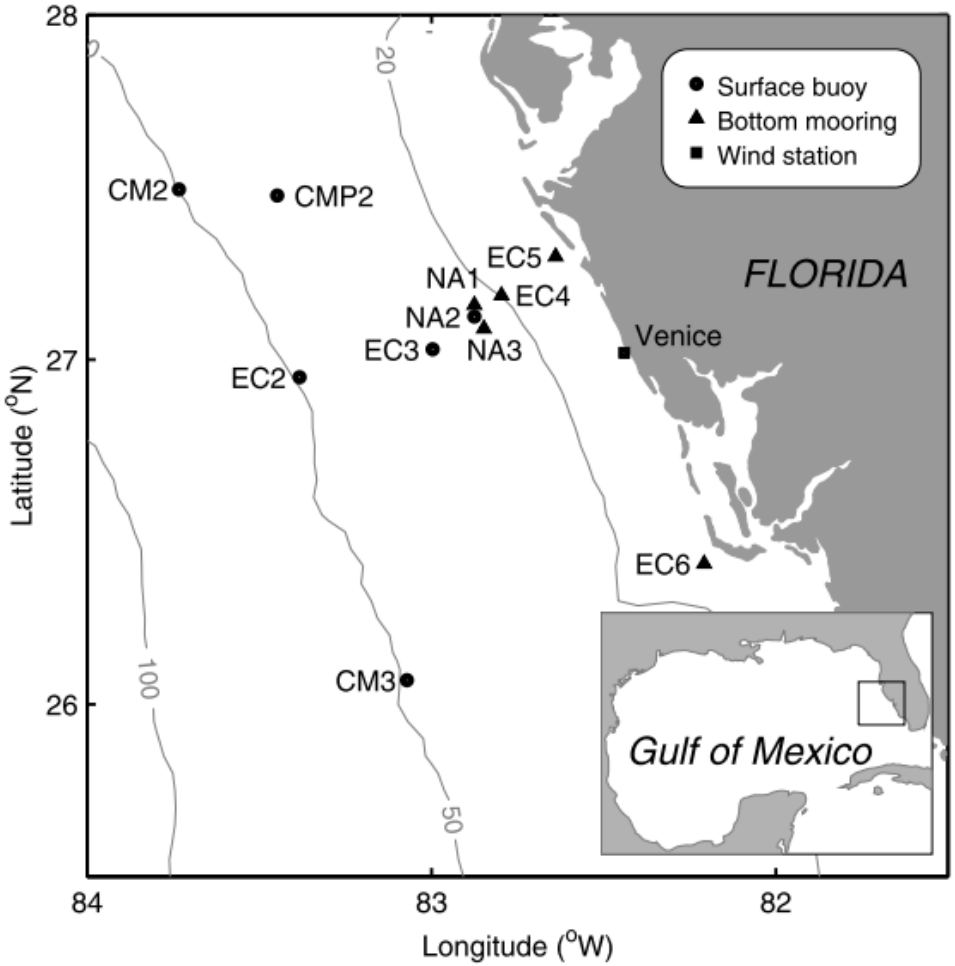
Table 2 Speech Recognition Experiments with Error Percentages for Independent Test Data

	Parametric Bayes	kNN	LVQ1	LVQ2	LVQ3
Test 1	12.1	12.0	10.2	9.8	9.6
Test 2	13.8	12.1	13.2	12.0	11.5

Oceánografická data

Zdroj: Patterns of ocean current variability on the West Florida Shelf using the self-organizing map. Y. Liu a R. H. Weisberg, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, 2005

Zkoumá se vývoj proudění vod v oceánu kolem pobřeží Floridy



Oceánografická data

- 11 měřicích stanic, 3 hloubky (hladina, dno, mezi)
- data: 2D vektory rychlosti (a směru) proudění
- měřeno po hodinách, 25585 hodin

Celkově tedy 25585 řádků 66 dimenzionálních položek.

Kohonenova mapa:

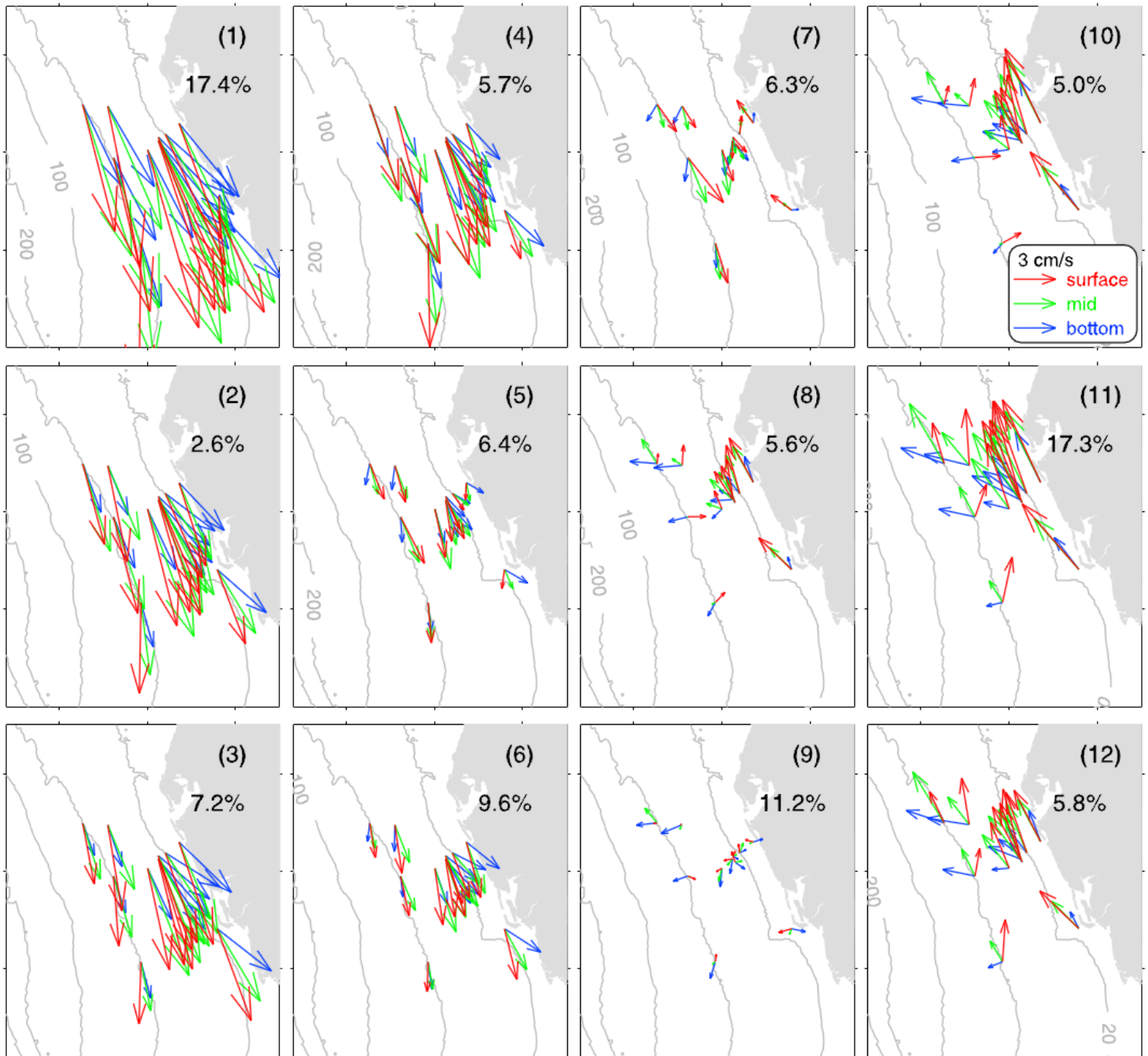
- mřížka 3×4
- okolí dána Gaussovou funkcí

$$\Theta(c,k) = \theta_0 \cdot \exp\left(\frac{-d(c,k)^2}{\sigma^2}\right)$$

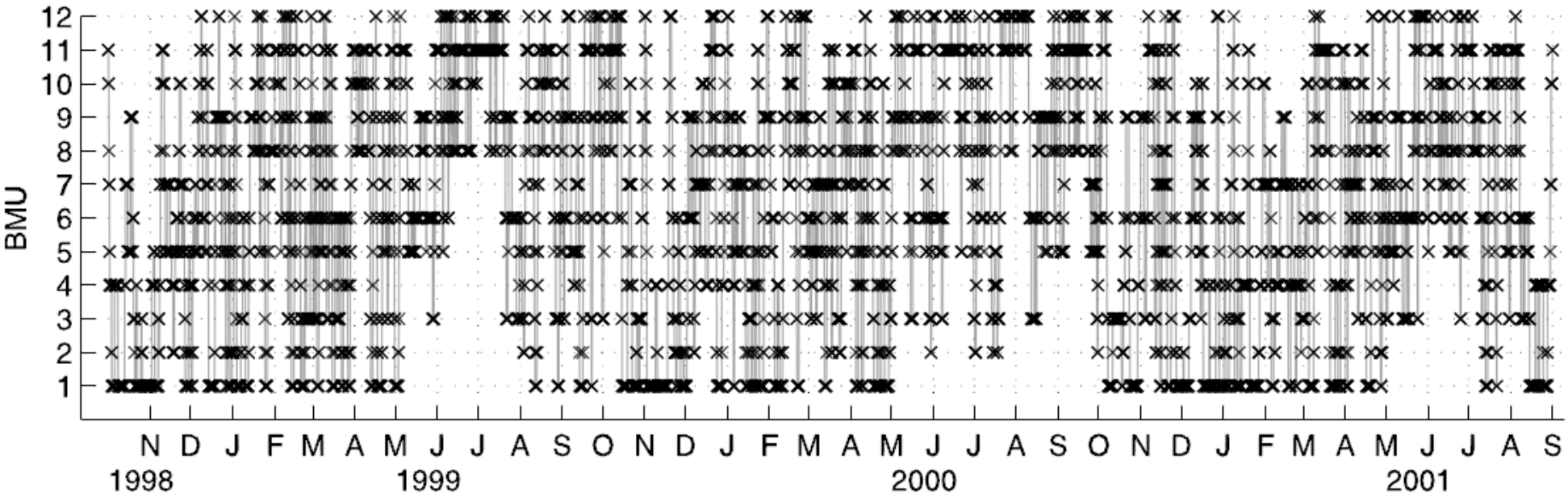
se zmenšující se šířkou

(navíc je tam lineárně se zmenšující rychlost učení, kterou se násobí změna polohy neuronů)

Oceánografická data - mapa

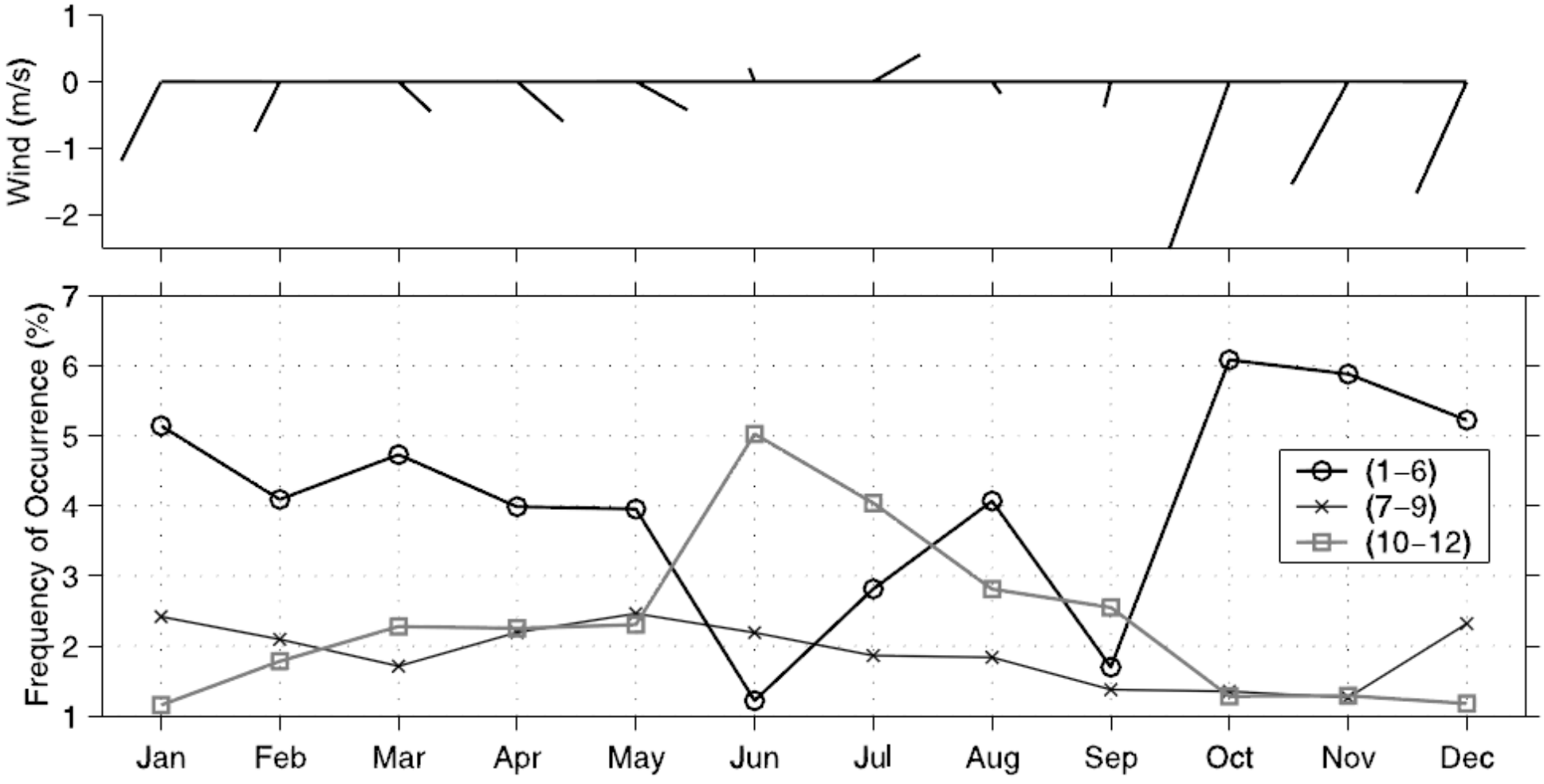


Oceánografická data



- křížky označují „vítězné“ neurony (po hodinách)
- ovlivněno lokálními fluktuacemi
- pozorovatelný trend:
  - v zimě neurony 1-6 (jiho-východ)
  - v létě neurony 10-12 (severo-západ)

Oceánografická data



Srovnání směru větru a proudění vody (znatelná korelace)

- vítr: směr čáry = směr větru ; délka čáry = intenzita
- proudění vody v procentech úspěšnosti skupin neuronů

Analýza pohádek bratří Grimmů

Zdroj: Contextual Relations of Words in Grimm Tales, Analyzed by Self-Organizing Map. T. Kohonen, T. Honkela a V. Pulkki, ICANN, 1995

Cílem je vizualizovat syntaktické a sémantické kategorie slov v pohádkách (v závislosti na kontextu).

Vstup: Pohádky bratří Grimmů (srozumitelně kódované pomocí proudu 270-dimenzionálních vektorů)

- každé slovo se zakóduje pomocí náhodně vybraného 90-dimenzionálního vektoru
- uvažují se trojice slov (předchůdce, klíč, následník)
- každá položka v trojici se reprezentuje 90-dimenzionálním reálným vektorem (trojice má tedy dimenzi 270)

Síť: Kohonenova mapa, 42×36 neuronů, váhy neuronů jsou tvaru $w = (w_p, w_k, w_n)$ kde $w_p, w_k, w_n \in \mathbb{R}^{90}$.

Analýza pohádek bratří Grimmů

Adaptace:

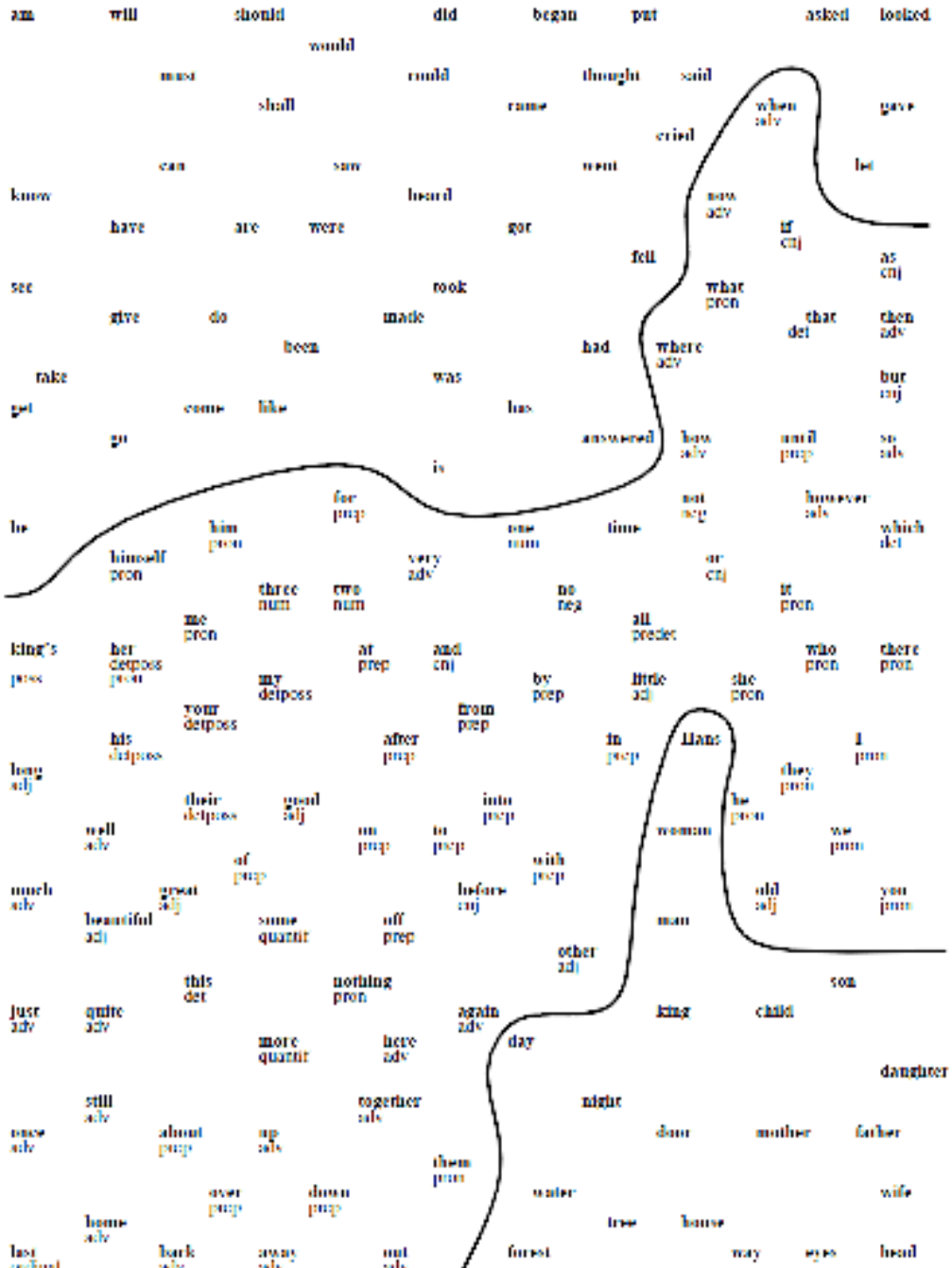
Síť je natrénována na trojicích po sobě jdoucích slov z pohádek

Hrubé učení: 600 000 iterací; Dolaďování: 400 000

Nakonec 150 nejčastěji použitých slov označuje neurony:

slovem u je označen ten neuron, pro jehož váhy
$w = (w_p, w_k, w_n)$ platí, že w_k je nejblíže kódu slova u.

Analýza pohádek bratří Grimmů - výsledek



RBF sítě

Organizační dynamika:

- Dvouvrstvá síť (výstupní neuron má bias)
- vstupy: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
- m skrytých neuronů

  Jejich hodnoty značíme $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_m$ kde $\phi_0 = 1$ je formální jednotkový vstup pro výstupní neuron (viz. aktivní dynamika)

  Občas budu psát $\phi_0(\vec{x}), \phi_1(\vec{x}), \ldots, \phi_m(\vec{x})$ abych zdůraznil, že se jedná o hodnoty skrytých neuronů pro vstup sítě $\vec{x}$.
- jeden výstup: y
  (pro jednoduchost; lze zobecnit na libovolný počet)

Parametry sítě:

- Výstupní neuron je jako ADALINE: má váhový vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^{m+1}$
- Každý skrytý neuron má tzv. střed $\vec{c}_i \in \mathbb{R}^n$ (odpovídá vahám ve standardní vícevrstvé síti) a šířku (odpovídá strmosti ve standardní síti, tj. je to parametr aktivační funkce)

RBF sítě

Aktivní dynamika: Vnitřní potenciály skrytých neuronů:

$$\xi_j = \left\| \vec{x} - \vec{c}_j \right\|$$

Zde $\vec{c}_j$ je **střed** skrytého neuronu j.

Aktivační funkce skrytých neuronů $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ jsou obecně libovolné diferencovatelné (a $\varphi_0 \equiv 1$). Budeme uvažovat:

$$\varphi_j(\xi_j) = \exp\left(-\frac{\xi_j}{2\sigma_j^2}\right) \qquad \left(= \phi_j(\vec{x}) \right)$$

Zde σ_j je **šířka** skrytého neuronu j.

Vnitřní potenciál výstupního neuronu:

$$\xi = \sum_{j=0}^{m} w_j \cdot \phi_j$$

Zde w_j jsou reálné **váhy**.

Aktivační funkce výstupu je identita: $y = \xi$.

RBF sítě

Funkce sítě:

$$y(\vec{x}) = w_0 + \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot \exp\left(-\frac{\left\|\vec{x} - \vec{c}_j\right\|}{2\sigma_j^2}\right)$$

Tvrzení: Pro každou spojitou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje RBF síť taková, že její funkce y splňuje:

$$|f(\vec{x}) - y(\vec{x})| < \varepsilon \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

RBF sítě

Adaptivní dynamika: Dána množina **tréninkových vzorů**

$$\mathcal{T} = \left\{\left(\vec{x}_1, d_1\right), \left(\vec{x}_2, d_2\right), \ldots, \left(\vec{x}_p, d_p\right)\right\}$$

Zde $\vec{x}_k = (x_{k1} \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ je vstup k-tého vzoru a $d_k \in \mathbb{R}$ je očekávaný výstup.

Chybová funkce:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \left(y(\vec{x}_k) - d_k\right)^2$$

Cílem je nalézt následující parametry tak, aby byla chyba E minimalizována:

- váhy w_j výstupního neuronu
- středy $\vec{c}_j$ skrytých neuronů
- šířky σ_j skrytých neuronů

RBF - dvoufázový trénink

Velkou výhodou RBF sítí je, že jejich trénink lze rozdělit do dvou (téměř) nezávislých fází:

- trénink skrytých neuronů, tj.
  - umístění středů $\vec{c}_j$
  - nastavení velikosti šířek σ_j
- trénink vah w_j výstupního neuronu

RBF - středy a šířky

Rozmístění středů:
Pozorování: Máme velké množství dat (vstupů), pro malou část z nich máme předepsán požadovaný výstup (tréninková množina). Je dobré umístit středy neuronů do oblastí, které obsahují hodně datových bodů.

Středy lze proto umístit pomocí učení bez učitele - Kohonenovo učení (tj. k-means clustering), mapy apod.

Toto lze provádět na mnohem větší množině dat, pro které nepotřebujeme předepsaný výstup

Často se ovšem používá i jednoduché rovnoměrné rozmístění středů (pokud víme, že data jsou více méně pravidelně rozmístěna) nebo umístění středů do pozice náhodně vybraných vstupů.

Nastavení šířek: Aktivační funkce by neměly být ani příliš strmé ani příliš ploché. Údajně dobrou heuristikou je jednotná šířka $\sigma = D_{\max}/\sqrt{2m}$ kde $D_{\max}$ je maximální (Euklidovská) vzdálenost středů a m je počet skrytých neuronů.

RBF - váhy

Pro fixní hodnoty parametrů skrytých neuronů (tj. fixní středy a šířky) se jedná o ADALINE. Můžeme proto použít příslušné metody k minimalizaci chyby E.

Lze také nalézt analytické řešení: Pokud fixujeme všechny středy a šířky, chyba E je funkcí $\vec{w}$ (píšeme $E(\vec{w})$). Gradient funkce $E(\vec{w})$ je roven

$$(\vec{w} \cdot \Phi - \vec{d}) \cdot \Phi^T$$

kde $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_p)$, $\vec{w} = (w_0, \ldots, w_m)$ a Φ je matice $(m+1) \times p$ jejíž i-tý sloupec obsahuje hodnoty skrytých neuronů pro i-tý vstup, tj. pro každé $j = 1, \ldots, m$ a $i = 1, \ldots, p$ máme

$$\Phi_{ji} = \phi_j(\vec{x}_i) = \exp\left(-\frac{\left\|\vec{x}_i - \vec{c}_j\right\|}{2\sigma_j^2}\right)$$

Vektor $\vec{w}^T = \vec{d} \cdot \Phi^+$ kde $\Phi^+ = \Phi^T \cdot (\Phi \cdot \Phi^T)^{-1}$ potom řeší $(\vec{w} \cdot \Phi - \vec{d}) \cdot \Phi^T = 0$ a tedy minimalizuje $E(\vec{w})$.

Sítě typu RBF - gradient

Učení lze také provádět pomocí standardního gradientního sestupu. Gradient lze snadno spočítat přímým derivováním:

$$\frac{\delta E}{\delta w_j} = \sum_{k=0}^{p} (y(\vec{x}) - d_k) \cdot \phi_k$$

$$\frac{\delta E}{\delta \sigma_j} = \sum_{k=0}^{p} (y(\vec{x}) - d_k) \cdot w_j \cdot \exp\left(-\frac{\left\| \vec{x}_k - \vec{c}_j \right\|^2}{2\sigma_j^2} \right) \cdot \frac{\left\| \vec{x}_k - \vec{c}_j \right\|^2}{\sigma_j^3}$$

$$\frac{\delta E}{\delta c_{ji}} = \sum_{k=0}^{p} (y(\vec{x}) - d_k) \cdot w_j \cdot \exp\left(-\frac{\left\| \vec{x}_k - \vec{c}_j \right\|^2}{2\sigma_j^2} \right) \cdot \frac{(x_{ki} - c_{ji})^2}{\sigma_j^2}$$

Rychlost tohoto učení je ovšem srovnatelná s rychlostí zpětné propagace pro standardní (sigmoidální) sítě.

RBF sítě - regularizace

Naučená síť by měla dobře generalizovat. Neměla by příliš „opisovat“ tréninkové vzory (tj. neměla by být přetrénovaná).

Intuice: Funkce sítě, která příliš opisuje vzory se hodně kroutí – omezíme kroucení.

Definujeme novou chybovou fci

$$E' = E + \gamma \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta y}{\delta x_i^2}(\vec{x}_k) \right)^2$$

Zde $\gamma > 0$ je míra vlivu regularizace.

Váhy, které minimalizují $E'(\vec{w})$, jsou řešením: $\vec{w} \cdot M = \vec{d} \cdot \Phi^T$ kde

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left(\phi_i(\vec{x}_k)\phi_j(\vec{x}_k) + \gamma \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\delta \phi_i}{\delta x_\ell^2}(\vec{x}_k) \frac{\delta \phi_j}{\delta x_\ell^2}(\vec{x}_k) \right) \right)$$

(Pozn. pro $\gamma = 0$ dostaneme $M = \Phi \cdot \Phi^T$, tj. minimalizaci $E(\vec{w})$)

RBF sítě - výhody

Srovnejme s vícevrstvou sítí se sigmoidálními jednotkami (dále budu značit MP (multi-layer perceptron))

- Teoreticky lze aproximovat libovolnou spojitou fci (stejně jako MP)
- Dvoufázové učení: jednotlivé fáze jsou řádově rychlejší než učení MP (tj. zpětná propagace)
- RBF sítě jsou vhodné pro klasifikaci (více než MP) díky jejich lokálnímu charakteru. Vektory, které jsou daleko od tréninkových vzorů, dostanou malou hodnotu (toto nemusí platit pro MP).
- jsou vhodné pro aplikace s měnícími se daty (rychlé učení umožňuje on-line adaptaci na nová data - téměř nemožné s MP)
- snadná regularizace (lineární)

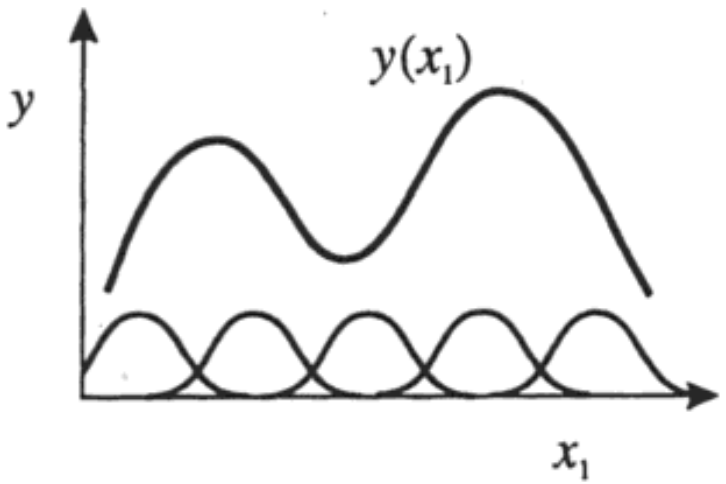
RBF sítě - nevýhody

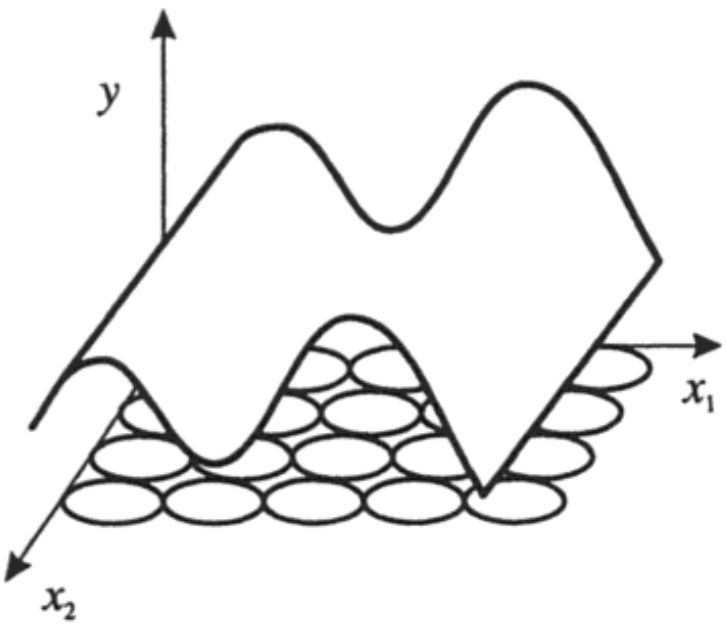
Opět srovnejme s MP.

- Teoretické výsledky o aproximaci nefungují v praxi (odhady na potřebný počet neuronů jsou nadsazené podobně jako u MP)
- Dvoufázové učení může být deformované pokud požadované funkční hodnoty nerespektují rozmístění vstupů (např. pokud je požadovaná funkce konstantní v oblasti s mnoha vzory, ale velmi variabilní v oblasti s málo vzory)
- RBF potřebují mnohem více dat i neuronů pro stejnou přesnost jako MP.
  - MP aproximují funkci globálně: každý vzor adaptuje většinu neuronů a informace je tedy distribuována po síti
  - RBF aproximují lokálně: pouze několik málo neuronů reaguje na daný vstup

  Z toho také plynou lepší extrapolační vlastnosti MP.
- RBF sítě mají větší problém s prokletím dimenzionality (exponenciální nárust jednotek s počtem dimenzí). Nejsou schopny odhalit nízkou variabilitu předepsané funkce v daném směru.

RBF sítě - nevýhody





kvadratický nárust počtu neuronů;
RBF neumí poznat, že je funkce (v podstatě) konstantní v x_2 (MP to umí)

Omezený Boltzmannův stroj (OBS)

Organizační dynamika:

- Cyklická síť se symetrickými spoji, neurony jsou rozděleny do dvou skupin:
  - V - viditelné
  - S - skryté

  Množina spojů je $V \times S$ (tj. úplný bipartitní graf)
- Množinu všech neuronů značíme N
- označme ξ_j vnitřní potenciál a y_j výstup (stav) neuronu j
- stav stroje: $\vec{y} \in \{-1, 1\}^{|N|}$.
- označme w_{ji} váhu spoje od neuronu i k neuronu j.
- obvykle se uvažuje bias, pro zjednodušení jej vynecháme.

Omezený Botzmannův stroj

Aktivní dynamika: Stavy viditelných neuronů jsou iniciálně nastaveny na hodnoty z množiny $\{-1, 1\}$.

V t-tém kroku aktualizujeme neurony takto:

- t liché: náhodně zvolíme nové hodnoty skrytých neuronů, pro $j \in S$

$$\mathbf{P}\left[y_j^{(t)} = 1\right] = 1 \Big/ \left(1 + \exp\left(-\sum_{i \in V} w_{ji} y_i\right)\right)$$

- t sudé: náhodně zvolíme nové hodnoty viditelných neuronů, pro $j \in V$

$$\mathbf{P}\left[y_j^{(t)} = 1\right] = 1 \Big/ \left(1 + \exp\left(-\sum_{i \in S} w_{ji} y_i\right)\right)$$

Rovnovážný stav

Omezený Boltzmannův stroj se po jisté době dostane do *termální rovnováhy*. Tj. existuje čas t^* takový, že pro libovolný stav stroje $\gamma^* \in \{-1, 1\}^{|N|}$ platí

$$\mathbf{P}\left[\vec{y}^{(t^*)} = \gamma^*\right] \approx p_N(\gamma^*)$$

Zde $p_N(\gamma^*) = \frac{1}{Z} e^{-E(\gamma^*)/T}$ kde

$$Z = \sum_{\gamma \in \{-1,1\}^{|N|}} e^{-E(\gamma)/T}$$

tj. Boltzmannovo rozložení

Teorie Markovových řetězců říká, že $\mathbf{P}\left[\vec{y}^{(t^*)} = \gamma^*\right]$ je také dlouhodobá frekvence návštěv stavu γ^*.

Toto platí *bez ohledu na iniciální nastavení neuronů!* Síť tedy reprezentuje rozložení p_N.

Omezený Boltzmannův stroj - učení

Pro daný stav viditelných neuronů $\alpha \in \{-1,1\}^{|V|}$ označme

$$p_V(\alpha) = \sum_{\beta \in \{-1,1\}^{|S|}} p_N(\alpha,\beta)$$

pravděpodobnost stavu viditelných neuronů α v termální rovnováze bez ohledu na stav skrytých neuronů.

Adaptivní dynamika:
Nechť p_d je pravděpodobnostní rozložení na množině stavů viditelných neuronů, tj. na $\{-1,1\}^{|V|}$.

Cílem je nalézt konfiguraci sítě W takovou, že p_V odpovídá p_d.

Vhodnou mírou rozdílu mezi rozděleními p_V a p_d je relativní entropie zvážená pravděpodobnostmi vzorů (tzv. Kullback Leibler distance)

$$\mathcal{E}(\vec{w}) = \sum_{\alpha \in \{-1,1\}^{|V|}} p_d(\alpha) \ln \frac{p_d(\alpha)}{p_V(\alpha)}$$

Omezený Boltzmannův stroj - učení

$\mathcal{E}(\vec{w})$ budeme minimalizovat pomocí gradientního sestupu, tj. budeme počítat posloupnost vektorů vah $\vec{w}^{(0)}, \vec{w}^{(1)}, \ldots$

- váhy v $\vec{w}^{(0)}$ jsou inicializovány náhodně blízko 0
- v t-tém kroku (zde $t = 1, 2, \ldots$) je $\vec{w}^{(t)}$ vypočteno takto:

$$w_{ji}^{(t)} = w_{ji}^{(t-1)} + \Delta w_{ji}^{(t)}$$

kde

$$\Delta w_{ji}^{(t)} = -\varepsilon(t) \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_{ji}}(\vec{w}^{(t-1)})$$

je změna váhy w_{ji} v t-tém kroku a $0 < \varepsilon(t) \leq 1$ je rychlost učení v t-tém kroku.

Zbývá spočítat (odhadnout) $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_{ji}}(\vec{w})$.

Omezený Boltzmannův stroj - učení

Lze ukázat, že

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_{ji}} = \left\langle y_j y_i \right\rangle_{fixed} - \left\langle y_j^{(t^*)} y_i^{(t^*)} \right\rangle_{free}$$

- $\left\langle y_j y_i \right\rangle_{fixed}$ je průměrná hodnota $y_j y_i$ po jednom kroku výpočtu za předpokladu, že hodnoty viditelných neuronů jsou fixovány dle rozložení p_d.
- $\left\langle y_j^{(t^*)} y_i^{(t^*)} \right\rangle_{free}$ je průměrná hodnota $y_j^{(t^*)} y_i^{(t^*)}$ v termální rovnováze bez fixace viditelných neuronů.

Problém: výpočet $\left\langle y_j^{(t^*)} y_i^{(t^*)} \right\rangle_{free}$ trvá dlouho (musíme opakovaně přivést stroj do termální rovnováhy).

$\left\langle y_j^{(t^*)} y_i^{(t^*)} \right\rangle_{free}$ se proto nahrazuje $\left\langle y_j y_i \right\rangle_{recon}$ což je průměrná hodnota $y_j^{(3)} y_i^{(3)}$ za předpokladu, že iniciální hodnoty viditelných neuronů jsou voleny dle p_d.

Omezený Boltzmannův stroj - učení

Tedy

$$\Delta w_{ji}^{(t)} = -\varepsilon(t) \cdot \left(\left\langle y_j y_i \right\rangle_{fixed} - \left\langle y_j y_i \right\rangle_{recon} \right)$$

- $\left\langle y_j y_i \right\rangle_{fixed}$ se vypočte takto: Polož $\mathcal{Y} := 0$ a opakuj q krát:
  - fixuj náhodně hodnoty viditelných neuronů dle p_d
  - simuluj jeden krok výpočtu a přičti aktuální hodnotu $y_j y_i$ k $\mathcal{Y}$

  Pro vhodné q bude $\mathcal{Y}/q$ dobrým odhadem $\left\langle y_j y_i \right\rangle_{fixed}$
- $\left\langle y_j y_i \right\rangle_{recon}$ se vypočte takto: Polož $\mathcal{Y} := 0$ a opakuj q krát:
  - nastav náhodně hodnoty viditelných neuronů dle p_d
  - simuluj tři kroky výpočtu a přičti aktuální hodnotu $y_j y_i$ k $\mathcal{Y}$ (tj. vypočti hodnoty skrytých neuronů, potom hodnoty viditelných (tzv. rekonstrukci vstupu) a potom hodnoty skrytých)

  Pro vhodné q bude $\mathcal{Y}/q$ dobrým odhadem $\left\langle y_j y_i \right\rangle_{recon}$

Hluboké sítě

Problém: Omezením BS jsme (potenciálně) omezili vyjadřovací sílu.
Řešení: OBS se skládají nad sebe do tzv. hlubokých sítí

1. OBS se natrénuje na vstupních datech
2. přidá se další vrstva, skryté neurony starého OBS budou nyní uvažovány jako viditelné neurony pro nejvyšší OBS. Natrénuje se nejvyšší OBS
3. iterováním bodů 1. a 2. se přidává více a více vrstev

Na konci dostaneme jednu mnohovrstvou síť, která reprezentuje rozložení na datech. Z tohoto rozložení se dá samplovat takto:

- přiveď nejvyšší OBS do termální rovnováhy (to dá hodnoty neuronů v nejvyšších dvou vrstvách)
- propaguj hodnoty do nižších vrstev (tj. proveď jeden krok aktualizace stavů mezilehlých OBS)
- stav neuronů v nejspodnější vrstvě potom bude představovat vzorek dat; pravděpodobnost s jakou se tam objeví konkrétní stav je pravděpodností onoho stavu v rozložení reprezentovaném sítí

Hluboké sítě - klasifikace

Předpokládejme, že každý vstup patří do jedné ze dvou tříd. Chceme vstupy klasifikovat pomocí vícevrstvé sítě.

Vícevrstvou síť lze trénovat pomocí zpětné propagace. Ta je silně závislá na vhodné inicializaci, často hrozí dosažení mělkého lokálního minima apod. Dobře fungující síť si vyvine systém extraktorů vlastností (tj. každý neuron reaguje na nějakou vlastnost vstupu). Jak toho dosáhnout?

- Natrénuj hlubokou síť na datech (v této fázi ignoruj příslušnost do tříd)
- Uvažuj výslednou síť jako obyčejnou vícevrstvou síť, tj. zaměň dynamiku Boltzmannova stroje za sigmoidální aktivační funkce a obvyklé vyhodnocení zdola nahoru
- přidej výstupní vrstvu s jedním neuronem
- doladď síť pomocí zpětné propagace (malá rychlost učení pro skryté vrstvy, velká pro výstupní vrstvu): Pro vstupy z jedné třídy uvažujeme očekávaný výstup 1 pro ostatní -1.