

Matematické modelování a systémová dynamika

Radek Pelánek

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modelování shora

- **souhrnné proměnné**, abstrahování od jednotlivců, lokálních vztahů
- model = **systém rovnic**
- simulace = numerické řešení těchto rovnic

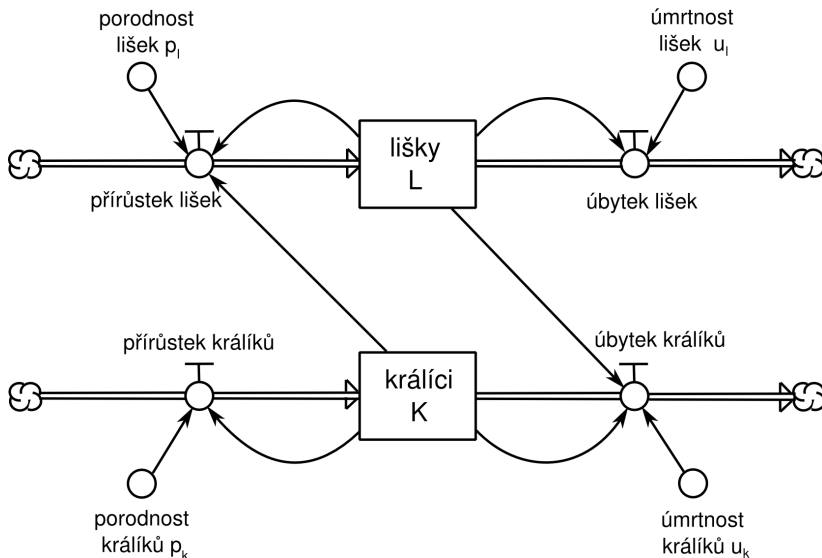
Lovec-kořist: matematický model

$$\frac{dL}{dt} = p_l KL - u_l L$$

$$\frac{dK}{dt} = p_k K - u_k KL$$

(Lotka-Volterra model)

Lovec-kořist: systémový model



Matematické modelování

Základní princip:

- stav systému = vektor stavových proměnných
- chování systému (změna) = rovnice nad stavovými proměnnými

Základní dělení:

- diskrétní čas
- spojitý čas

Diskrétní čas

- rekurentní rovnice
- stavová proměnná = posloupnost X_t

Fibonacciho králíci: model

- (velmi zjednodušený) model množení králíků
- X_t = počet párů králíků
- králíci nesmrtelní
- od věku 2 let se množí
- model:
 - počáteční stav: $X_1 = X_2 = 1$
 - rovnice popisující změnu:

$$X_{t+1} = X_t + X_{t-1}$$

Fibonacciho králíci: chování

Model:

$$X_{t+1} = X_t + X_{t-1}$$

$$X_1 = X_2 = 1$$

Test: které z následujícího je explicitním řešením?

$$X_t = \frac{\phi^t + 1}{2} - 1$$

$$X_t = \frac{\phi^t - (1 - \phi)^t}{\sqrt{5}}$$

$$X_t = \frac{t \cdot (1 - \phi)}{(1 + \phi)}$$

ve všech případech:

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

Fibonacciho králíci: chování

Model:

$$X_{t+1} = X_t + X_{t-1}$$

$$X_1 = X_2 = 1$$

Explicitní řešení:

$$X_t = \frac{\phi^t - (1 - \phi)^t}{\sqrt{5}}, \text{ kde } \phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

Simulace (= dosazení):

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Fibonacciho králíci: poznámky

- populace roste nade všechny meze (exponenciálně)
- pouze pozitivní zpětná vazba
- chybí korigující negativní zpětná vazba

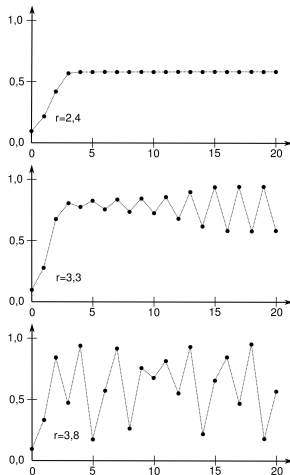
Logistická rovnice: model

- r – míra reprodukce
- K – kapacita prostředí
- rovnice:

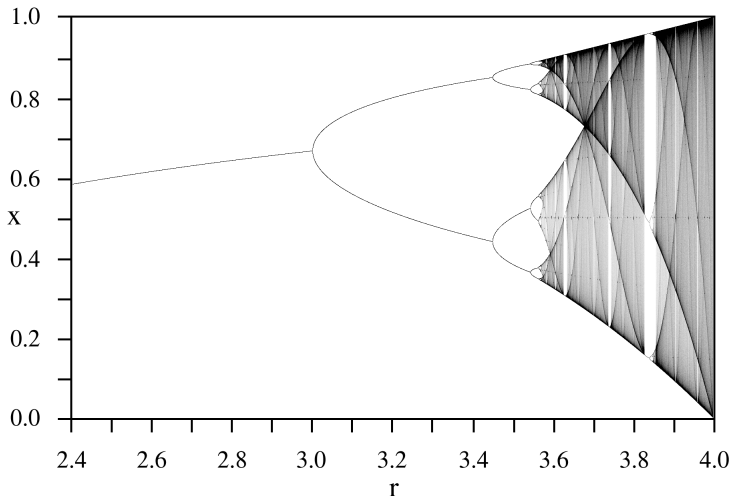
$$X_{t+1} = r \cdot X_t \cdot (1 - X_t/K)$$

Jak se bude model chovat pro $K = 1$, $X_1 = 0.2$ a různé hodnoty r ?

Logistická rovnice: chování



Logistická rovnice: Feigenbaumův diagram



Logistická rovnice: poznámky

- kombinace pozitivní a negativní zpětné vazby
- velmi **jednoduchý systém – složité chování** (chaos)
- nutnost použití výpočetní simulace

Spojitý čas

- motivace použití spojitého času:
 - nelze čas rozdělit na diskrétní kroky, např. přítok a odtok vody
 - jednodušší matematické zpracování než diskrétní čas
- diferenciální rovnice
 - základ: $\frac{dX}{dt} \sim$ „změna hodnoty proměnné X v čase t “

Model populace I

změna velikosti populace = počet narození – počet úmrtí

$$\frac{dX}{dt} = pX - uX$$

$$r = p - u$$

$$\frac{dX}{dt} = rX$$

Model populace I: chování

Explicitní řešení diferenciální rovnice:

$$X(t) = X(0)e^{rt}$$

exponenciální růst (pokles) – srovnej Fibonacciho králíci

Model populace II

Podobně jako pro diskrétní logistickou rovnici:

$$\frac{dX}{dt} = r \cdot X \cdot \left(1 - \frac{X}{K}\right)$$

Explicitní řešení:

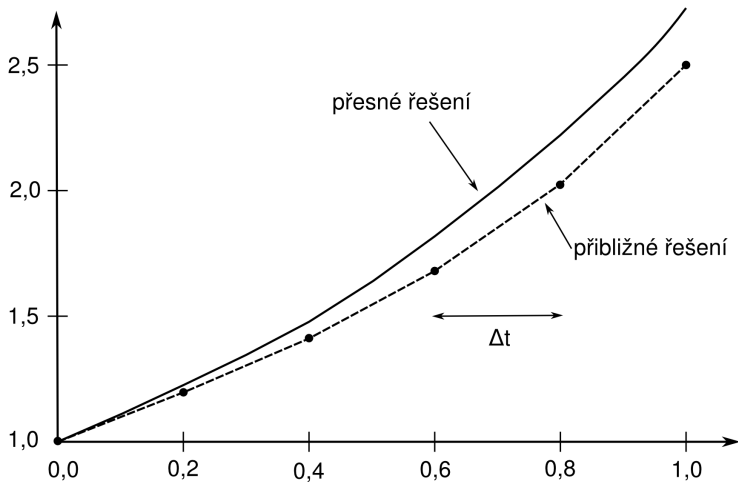
$$X(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}, c = \frac{K}{X(0)} - 1$$

Numerické řešení rovnic

- **explicitní** obecné řešení – málokdy
- **numerické** řešení:
 - **přibližné** řešení pro **konkrétní** hodnoty
 - mírně nepřesné, ale pro modelování dostatečné
 - nutno však pamatovat na nepřesnost, robustnost, ...

Základní myšlenka

- (podrobněji viz předměty na PŘF: „Numerické metody“)
- numerické metody – založeny na **diskretizaci**
- čas – intervaly délky Δt
- v bodech $t_n = t + n \cdot \Delta t$ počítáme hodnoty y_n
- zbytek aproximujeme (např. přímkou)



Metody aproximace

hodnotu y_{n+1} aproximujeme s využitím hodnoty y_n :

- **Eulerova metoda**: použití diferenčních rovnic,
$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(y_n, t)$$
- **Runge-Kutta metody** (2. řádu, 4. řádu): sofistikovanější metody aproximace; více operací, ale o hodně přesnější

Přesnost a výpočetní náročnost

zmenšující se Δt :

- metody konvergují k přesnému řešení
- simulace výpočetně (a tedy i časově) náročnější

Figure 13-5

Comparison of Euler's, 2nd-Order, and 4th-Order Runge-Kutta

Time	Exact Value	Euler's Method	2nd-Order Runge-Kutta	4th-Order Runge-Kutta
	$(100 * e^{-0.5 * time})$	$(dt = 0.025)$	$(dt = 0.05)$	$(dt = 0.1)$
0	100.000000	100.000000	100.000000	100.000000
0.1	95.122942	95.032971	95.123447	95.122943
0.2	90.483742	90.426732	90.484702	90.483742
0.3	85.070798	85.939465	86.072168	85.070798
0.4	81.873075	81.759933	81.874813	81.873076
0.5	77.880078	77.757464	77.882145	77.880079
0.6	74.081822	73.941383	74.084181	74.081823
0.7	70.468809	70.313533	70.471427	70.46881
0.8	67.032005	66.853223	67.034851	67.032006
0.9	63.762815	63.53223	63.765861	63.762817
1.0	60.653066	60.452232	60.656285	60.653068

Výběr metody: doporučení

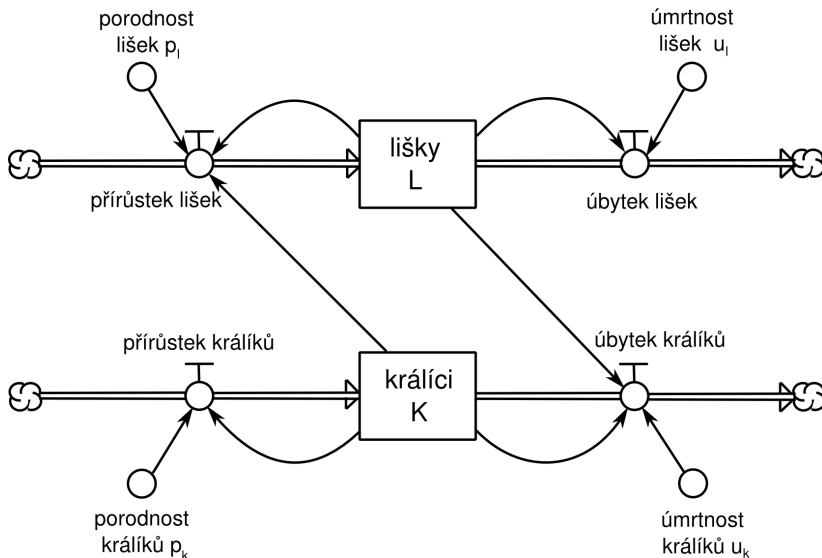
- Runge-Kutta metoda – nevhodná pro modely s diskrétními prvky, na čistě spojitých lepší než Eulerova
- Eulerova metoda – nepřesná u modelů s vysokofrekvenčními oscilacemi
- volba diskrétního kroku δt (v softwaru Stella značený DT):
 - maximálně polovina minimálního intervalu vyskytujícího se v modelu
 - vyzkoušet simulaci pro různé hodnoty δt

Systemová dynamika

„grafický front-end“ pro matematické modelování

- 1 grafické vyjádření základních vztahů
- 2 automatické vygenerování diferenciálních rovnic
- 3 doplnění zbývajících rovnic a hodnot parametrů
- 4 simulace (numerické řešení rovnic)

Příklad



Systémový model: základní prvky

- ① zásobárny
- ② toky
- ③ parametry
- ④ vztahy

Proč?

- proč nepsat rovnou rovnice?
- proč rozdělení na uvedené 4 kategorie?
- přehlednost – snadnější návrh, ladění, komunikace
- v modelování omezení může být výhodou

zásobárna	tok	parametr
populace	narození, úmrtí	porodnost, úmrtnost, míra emigrace
peníze na účtu	úroky	úroková míra
teplota	ohřívání	tepelná kapacita
podíl na trhu	noví zákazníci	náklady na reklamu, účinnost reklamy, kvalita výrobku

Zásobárny

= *systémové proměnné, reservoirs, stocks*

= **podstatná jména** v modelu

- komponenty systému, kde se něco akumuluje
- lze číselně vyjádřit, v čase stoupá a klesá
- **ne**reprezentuje (většinou) geografickou lokalitu
- systém **zmražený** v určitém okamžiku – zásobárna má **nenulovou** hodnotu
- velikost populace
- peníze na účtu
- teplota
- podíl na trhu

Parametry

= *convertors, auxiliaries, system constants*

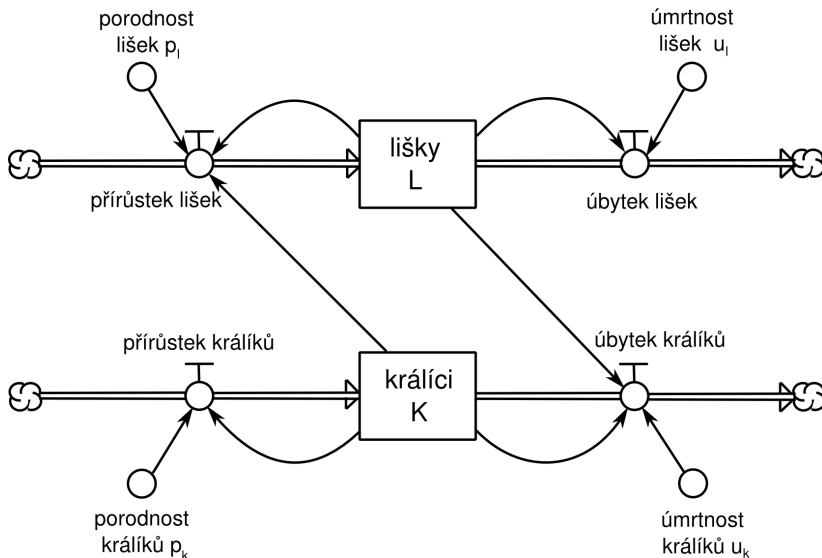
- tempo s jakým dochází ke změně obsahu zásobárny vlivem toků
- často **vnější** (exogenous) proměnné systému – chování nemodelujeme
- hodnoty – pozorování, úvaha, odhad
- porodnost, úmrtnost
- úroková míra
- tepelná kapacita
- náklady na reklamu, účinnost reklamy

Vztahy

= *interrelationships*

- závislosti mezi jednotlivými částmi systému
- co s čím souvisí, co na čem závisí

Lišky a králíci



1. *Journal of Management Studies*, 1997, 34, 1, 1-14.

- počáteční hodnoty zásobáren (K a L)
- hodnoty parametrů (p_l, p_k, u_l, u_k)
- rovnice pro velikost toků:
 - příbytek lišek = $p_l KL$,
 - příbytek králíků = $p_k K$,
 - úbytek lišek = $u_l L$,
 - úbytek králíků = $u_k KL$.

Automaticky vygenerované rovnice

změna hodnoty zásobárny = vstupní toky – výstupní toky

$$dL/dt = p_l KL - u_l L$$

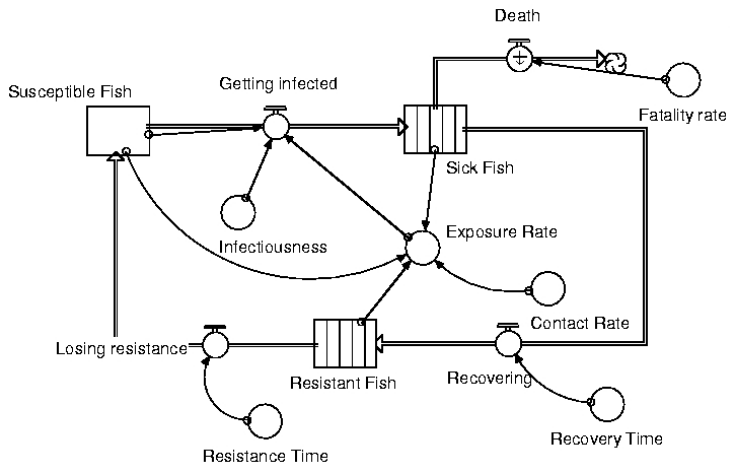
$$dK/dt = p_k K - u_k KL$$

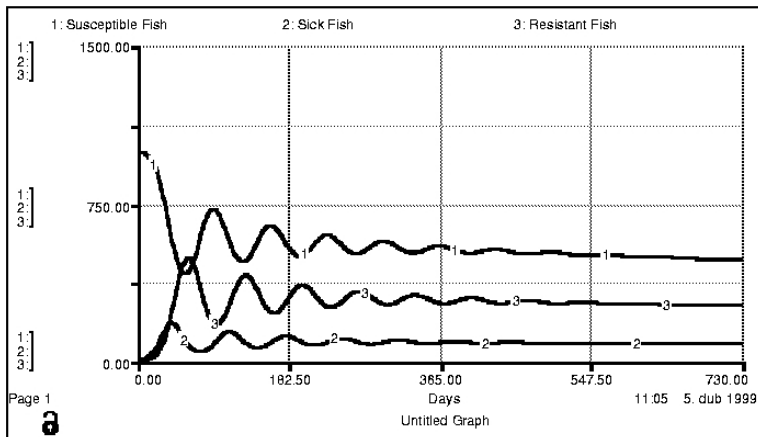
(Jde o Lotka-Voltera model.)

Epidemie

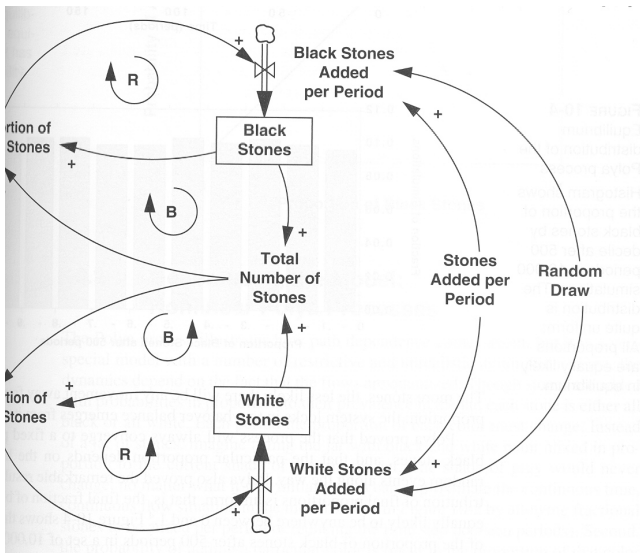
- model epidemie SIRS (susceptible – ill – resistant – susceptible)
- předpokládejme uzavřený systém (ryby v rybníku)
- stavy: zdravá, nemocná, odolná
- parametry epidemie: infekčnost, úmrtnost, doba nemoci, doba odolnosti

(více o epidemiích později)



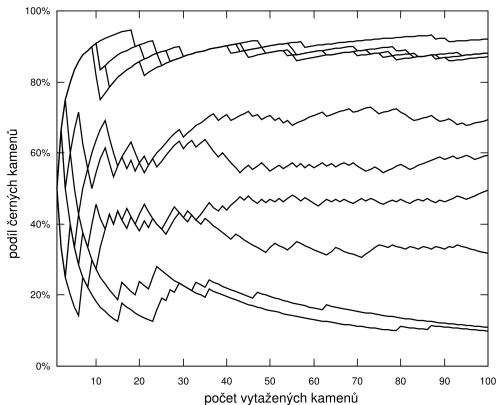


- model:
 - pytel s **černými** a **bílými** kameny
 - taháme kameny – pravděpodobnost, že **vytáhneme černý** je přímo úměrná podílu dosud **vytažených černých** kamenů
- otázky:
 - Jaký bude **poměr** vytažených černých/bílých v **dlouhodobém** horizontu?
 - Co situace modeluje?



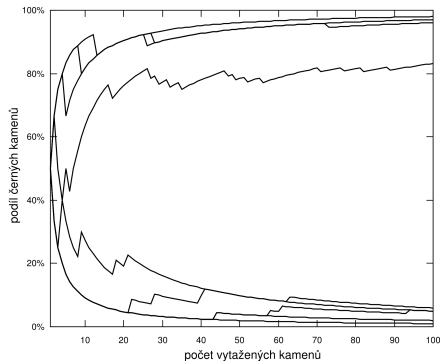
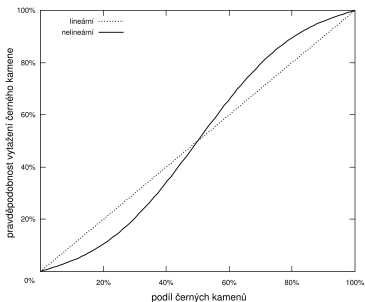
Chování

Počáteční náhodné tahy stanoví poměr, kterého se systém nadále drží (lze dokázat též analyticky).



Variace

pravděpodobnost vytažení je nelineárně závislá na poměru kamenů \Rightarrow poměr konverguje k 0 nebo 1



Polya process: komentáře

- **lock-in**: systém se **zamkne** do určité konfigurace, aniž by k tomu byl specifický důvod
- systém řízený **pozitivní zpětnou vazbou**
- o osudu rozhodují **náhodné výchyly** na počátku
- existence **řádu** není díky náhodě, je zaručena pozitivní zpětnou vazbou
- příklady?

Polya process: příklady

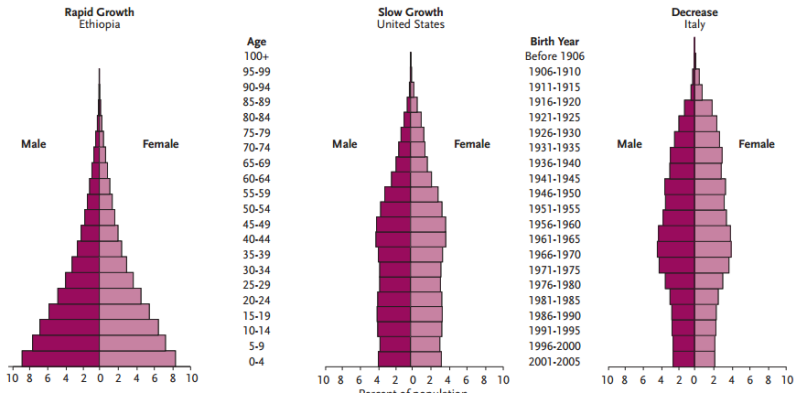
typický příklad: dvě firmy soutěží o dominanci na trhu se stejným produktem

- videokazety: VHS X Betamax
- Wintel
- Facebook vs MySpace
- QWERTY
- Silicon Valey

Demografie: Kvízová otázka

- populační dynamika
- země s vysokou porodností a nízkou úmrtností (tj. prudký růst populace)
- porodnost prudce klesne na cca 2 děti/ženu
- jak bude vypadat vývoj velikosti populace?
- kdy se ustálí?

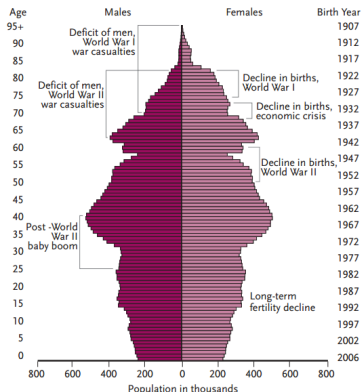
Věková pyramida



Joe McFalls (2007), *Population: A Lively Introduction*

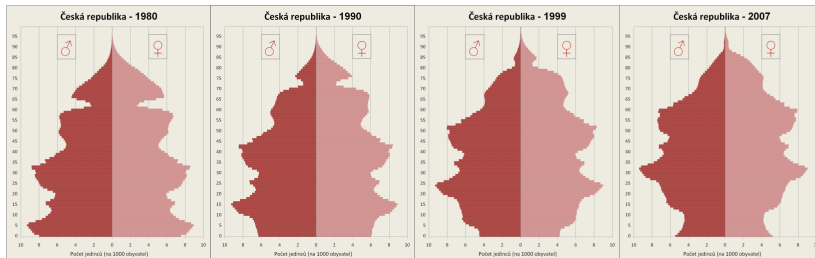
Věková pyramida: Německo

Germany's Population by Age and Sex, 2006



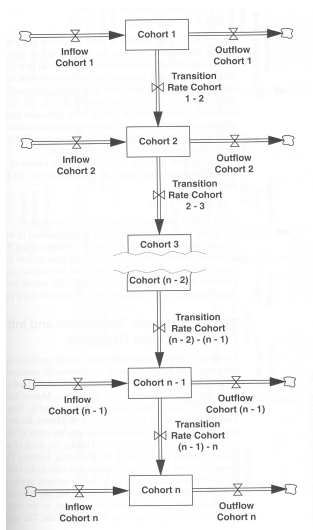
Joe McFalls (2007), *Population: A Lively Introduction*

Věková pyramida: ČR



Wikipedia: Věková pyramida

100



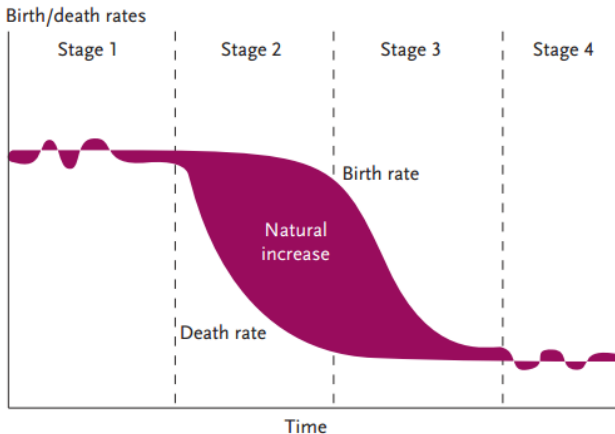
Modelování demografie: základní parametry

- porodnost (distribuce podle věku ženy)
- úmrtnost (distribuce podle věku)
- migrace

I jednoduchý model přináší zajímavý vhled (viz kvízová otázka), příklady:

- <http://www.learner.org/courses/envsci/interactives/demographics/>
- *Modelování základních demografických procesů*, BP Jan Bleha

Demografický přechod



Joe McFalls (2007), *Population: A Lively Introduction*

Demografie – dopad, kontext

dopad mj. na:

- ekonomika
- zdravotnictví
- školství

důležité faktory mj.:

- poměr pracujících k celkové populaci, demografická dividendy
- poměr skupiny 15-25 v populaci – sociální nepokoje

Hypotéza Gaia

Hypotéza Gaia (James Lovelock)

Živá hmota na planetě Zemi funguje jako jeden organismus udržující si vhodné podmínky pro život.



Svět sedmikrásek (Daisy world)

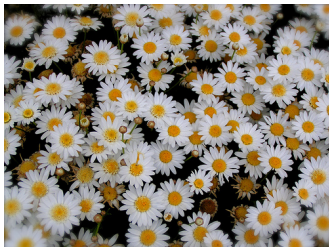
Účel modelu

Podpora teorie Gaia.

Základní myšlenka modelu

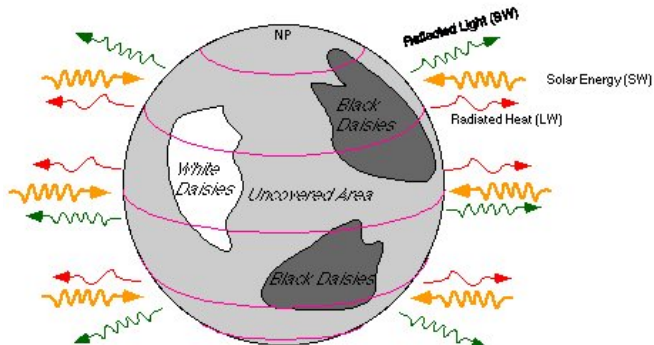
Hypotetický svět obíhající slunce, jehož teplota roste a který je schopen částečně regulovat svou teplotu.




Svět sedmikrásek



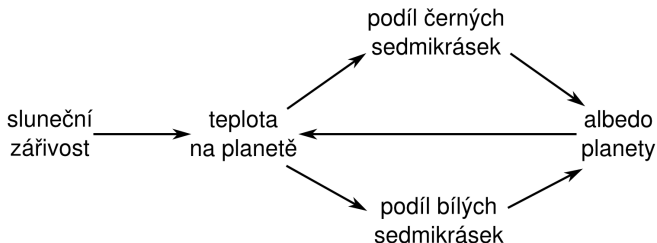
- černé a bílé sedmikrásky
- růst závislý na teplotě, růstová křivka = parabola
- černé absorbují světlo
- bílé světlo odráží

Svět sedmikrásek

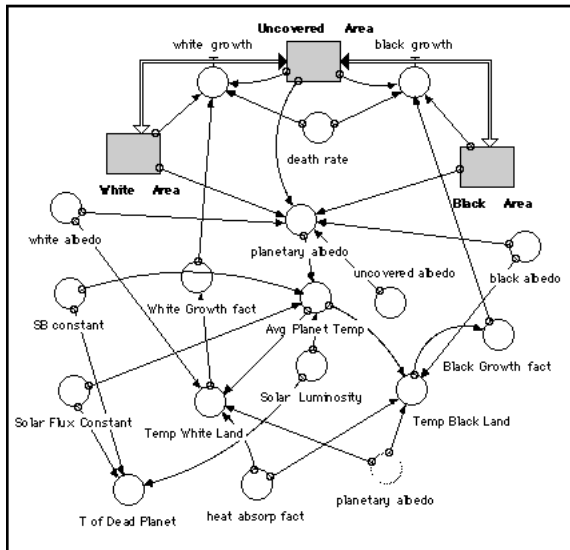


-  Incoming Solar Radiation (short-wavelength)
-  Reflected Short-Wavelength Radiation
-  Emitted Long-Wavelength Radiation (heat)

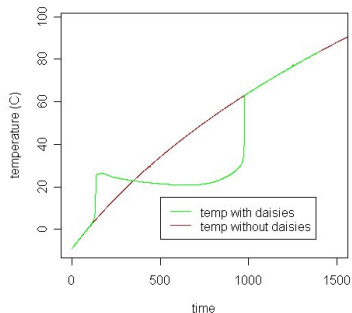
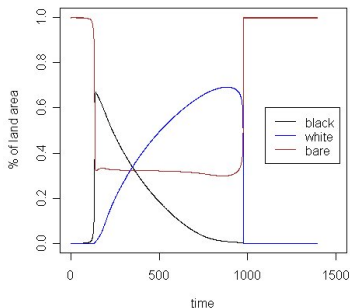
Svět sedmikrásek: regulační mechanismus



Daisyworld



Chování modelu



Chování: překvapivě stabilní, dosahuje *homeostasis* (schopnost udržovat rovnováhu pomocí regulačních mechanismů)

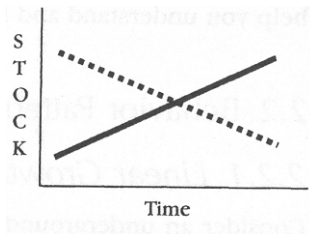
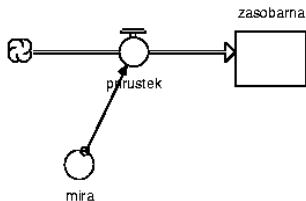
Základní módy chování

- dobré dílo (viz např. dům):
 - málokdy úžasné nové základní díly
 - spíš dobrá kombinace osvědčených dílů
- modelování – základní módy chování

Základní módy

- 1 lineární vývoj
- 2 exponenciální vývoj
- 3 logistický vývoj
- 4 přestřel a kolaps
- 5 oscilace

Lineární vývoj



charakteristika

zpětná vazba

diff. rovnice

explicitní řešení

příklad

změna konstantní rychlosti

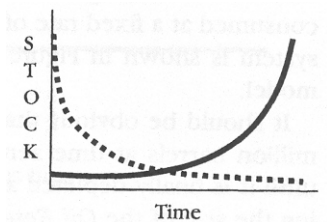
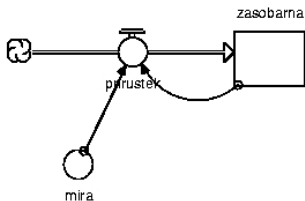
žádná

$$dR/dt = k$$

$$R(t) = R_0 + kt$$

fixní čerpání neobnovitelného zdroje

Exponenciální vývoj



charakteristika

zpětná vazba

diff. rovnice

explicitní řešení

příklad

rychlost změn úměrná velikosti zásobárny

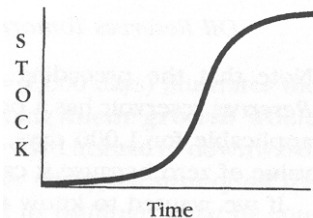
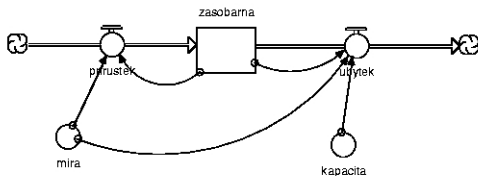
pozitivní zpětná vazba

$$dR/dt = k \cdot R(t)$$

$$R(t) = R_0 \cdot e^{kt}$$

populační růst při neomezených zdrojích

Logistický vývoj



charakteristika

nejdříve exponenciální růst, následovaný přibližováním k rovnováze (kapacita C)

zpětná vazba

kombinace pozitivní a negativní zpětné vazby

diff. rovnice

$\frac{dR}{dt} = k(t) \cdot R(t)$, kde $k(t) = k_0 \cdot (1 - \frac{R(t)}{C})$

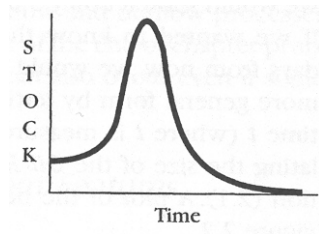
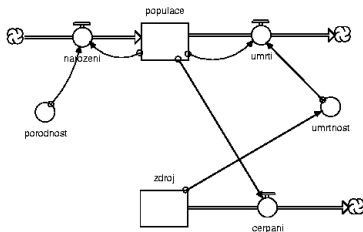
explicitní řešení

$R(t) = \frac{C}{1 + A e^{-k_0 t}}$, kde $A = \frac{C - R_0}{R_0}$

příklad

populační růst s fixními zdroji, epidemie (vyléčitelná nemoc), šíření informací

Přestřel a kolaps



charakteristika

zpětná vazba

diff. rovnice

příklad

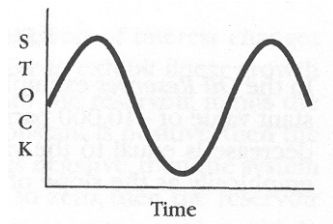
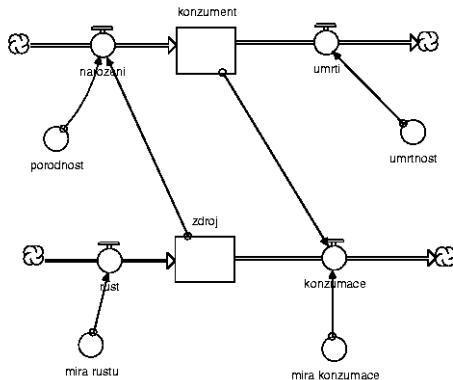
dvě zásobárny, jeden neobnovitelný, druhý na něm závisí a spotřebovává jej

kombinace pozitivní a negativní zpětné vazby

-

populační růst s neobnovitelnými zdroji, epidemie (nevléčitelná nemoc)

Oscilace



Oscilace (pokračování)

charakteristika dvě vzájemně závislé zásobárny (Consument C , R source R)

zpětná vazba negativní zpětná vazba (se zpožděním)

diff. rovnice $dC/dt = k_G R(t) - k_D$

$$dR/dt = k_W - k_Q C(t)$$

rovnováha $C = \frac{k_W}{k_Q}$, $R = \frac{k_D}{k_G}$

příklad dravec-kořist, konzument a obnovitelný zdroj, reg
lace teploty

Vysvětlivky: k_G : růst konzumenta, k_D : úmrtí konzumenta, k_W :
růst zdroje, k_Q : konzumace zdroje

Shrnutí

- pohled shora: sumární proměnné, rovnice popisující změnu
- matematické modelování: diskrétní, spojité
- numerické řešení diferenciální rovnic
- systémová dynamika: grafická nadstavba
- příklady: lovec a kořist, epidemie, Svět sedmikrásek, černé a bílé kuličky
- základní módy chování