

Fraktály a komplexní čísla

Radek Pelánek

IV122, jaro 2014

Komplexní čísla: připomenutí

- imaginární číslo $i = \sqrt{-1}$
- komplexní číslo: $x + yi$
- polární souřadnice: $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$
- sčítání: $(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$
- násobení: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- velikost čísla: $\sqrt{x^2 + y^2}$

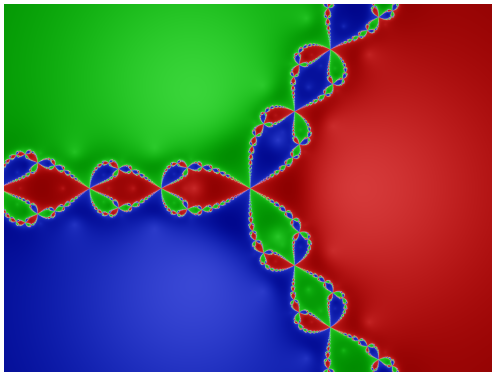
Komplexní čísla: test

- $\sqrt{i} = \dots$
- $(1 + i)^2 = \dots$
- $(4 + 2i)/(2i) = \dots$
- $e^{\pi i} = \dots$

Komplexní čísla: Tutor

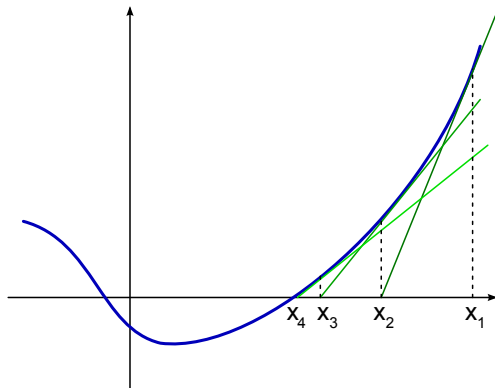
- `tutor.fi.muni.cz`
- Matematické pexeso 2
- úlohy na komplexní čísla

Newtonův fraktál



Zdroj: Wikipedia

Newtonova metoda



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

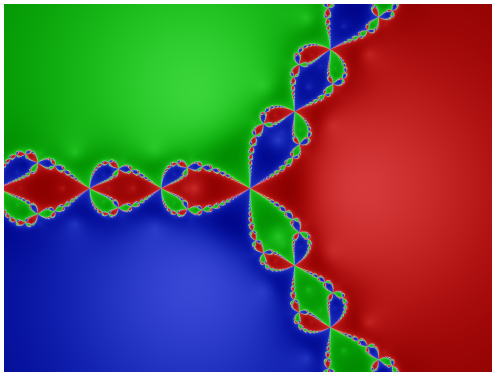
Newtonův fraktál

- $z^3 = 1$
- $z^3 - 1 = 0$
- jaká jsou řešení (v oboru komplexních čísel)?

Newtonův fraktál

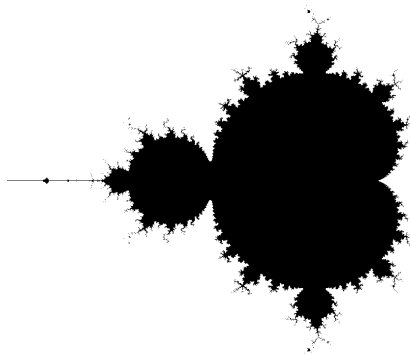
- $z^3 = 1$
- $z^3 - 1 = 0$
- jaká jsou řešení (v oboru komplexních čísel)?
- $1, -0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Newtonova metoda: $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$
- pro iniciální bod $z_0 = x + yi$, ke kterému řešení konverguje?

Newtonův fraktál

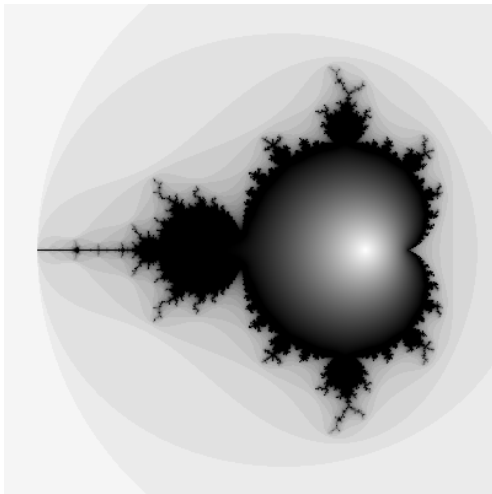


Zdroj: Wikipedia

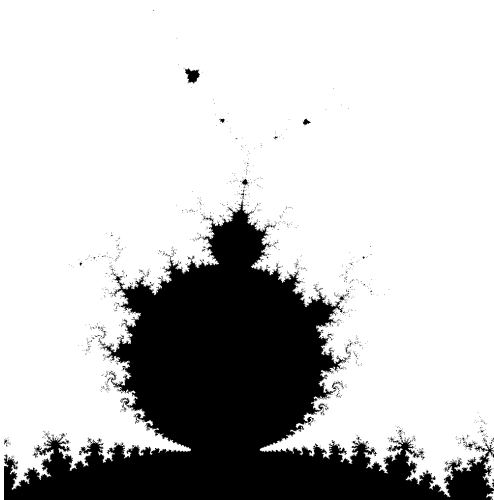
Mandelbrotova množina



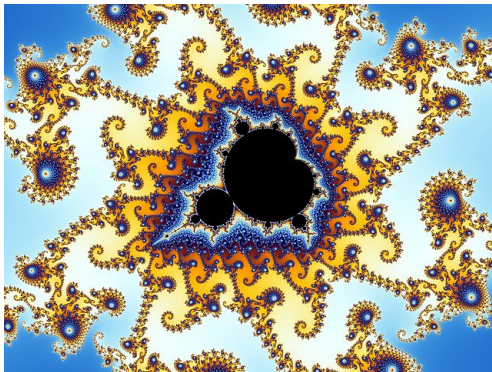
Mandelbrotova množina



Mandelbrotova množina

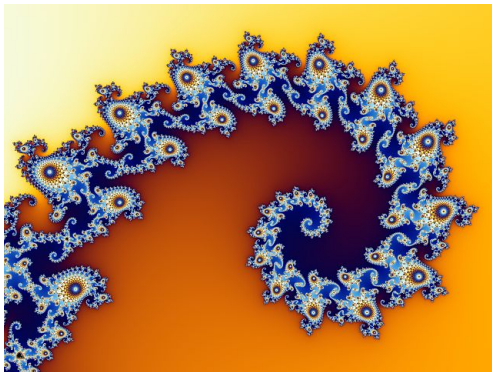


Mandelbrotova množina



Zdroj: Wikipedia

Mandelbrotova množina



Zdroj: Wikipedia

Mandelbrotova množina

- $z_1 = 0$, $c = x + yi$ je konstanta (komplexní číslo)
- definujeme posloupnost

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

- c patří do Mandelbrotovy množiny \Leftrightarrow tato posloupnost je omezená

Alternativní definice přes reálné posloupnosti:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c_x$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + c_y$$

Mandelbrotova množina

Příklady:

- $c = 1$

$0, 1, 2, 5, 26, \dots$

není ohraničená

číslo 1 nepatří do Mandelbrotovy množiny

- $c = i$

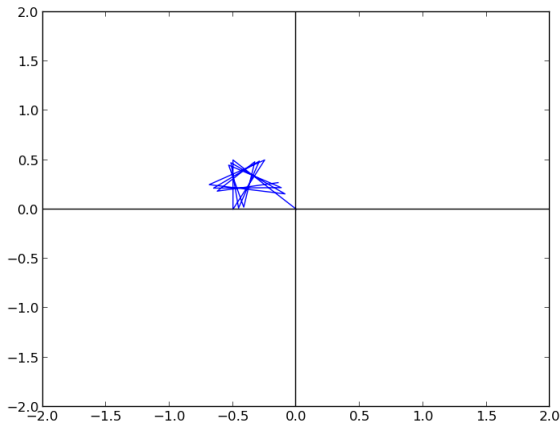
$0, i, (-1 + i), -i, (-1 + i), -i, \dots$

je ohraničená

číslo i patří do Mandelbrotovy množiny

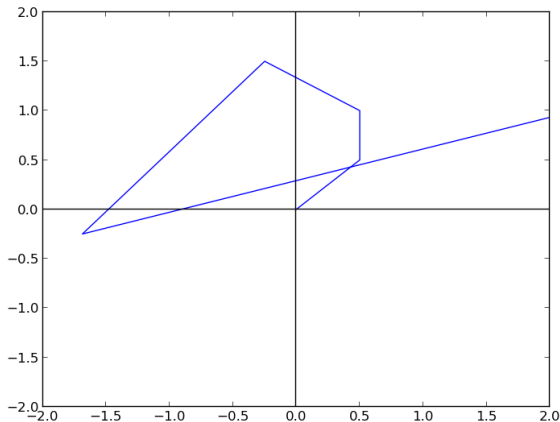
Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$$c = -0.5 + 0.5i$$



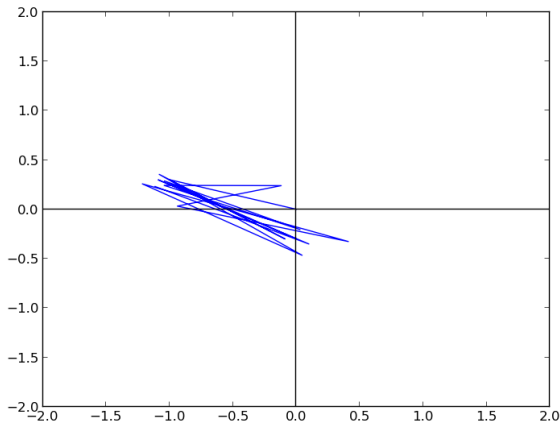
Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$$c = 0.5 + 0.5i$$



Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

$$c = -1 + 0.3i$$

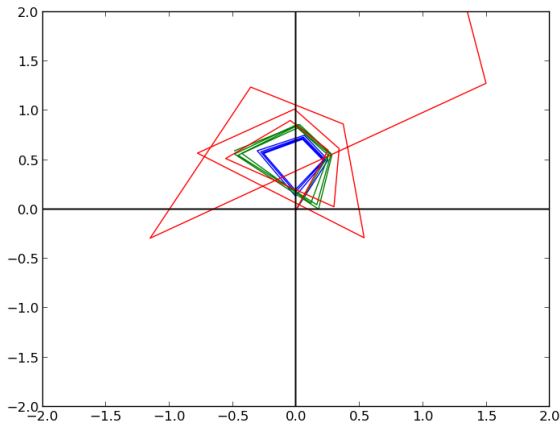


Mandelbrotova množina: ukázka posloupnosti

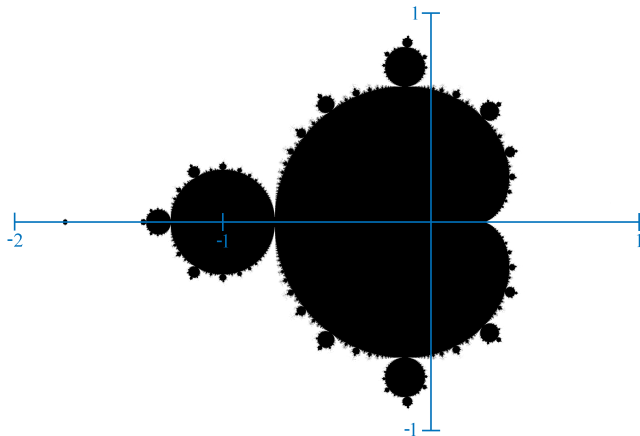
$c = 0.25 + 0.5i$ (modrá)

$c = 0.25 + 0.55i$ (zelená)

$c = 0.25 + 0.6i$ (červená)



Mandelbrotova množina



Zdroj: Wikipedia

Mandelbrotova množina: heuristická metoda

- uděláme 30 iterací
- c dáme do množiny \Leftrightarrow poslední člen má velikost ≤ 2
- proč kritérium ≤ 2 ?

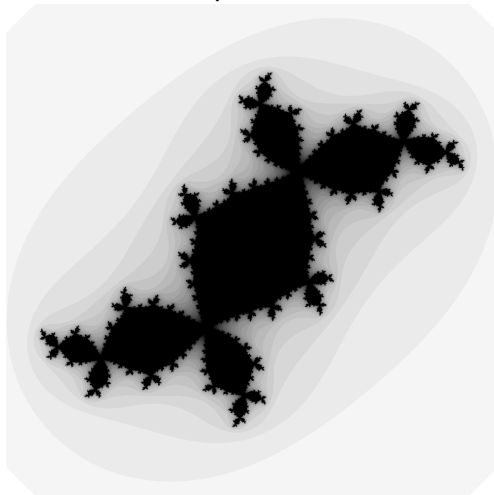
Mandelbrotova množina: obarvení

jednoduché metody:

- vnější body: počet iterací potřebných na překročení velikosti 2
- vnitřní body: průměrná vzdálenost od $(0,0)$ v průběhu iterací

Juliova množina

Juliova množina pro $c = -0.13 + 0.75i$



Juliovy množiny

- opět stejná rovnice $z_{n+1} = z_n^2 + c$
- jedno fixní c
- zkoumáme, pro které iniciální body $z_1 = x + yi$ je posloupnost ohraničená
- Juliova množina pro hodnotu c je souvislá $\Leftrightarrow c$ patří do Mandelbrotovy množiny.
- pozn. pojem Juliova množina použit zjednodušeně