

# Fraktály a chaos I

Radek Pelánek

IV122, jaro 2014

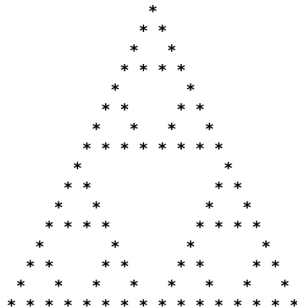
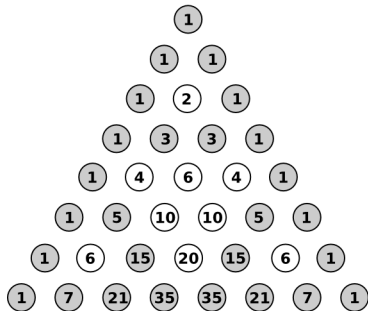
# Fraktály

- (netriviální) sobě-podobnost
- rekurze
- reálné příklady (viz slidy P. J.)
- matematické principy: iterované systémy, rekurentní rovnice, L-systémy, podivné atraktory, ...

# Sierpińského fraktál



# Sierpińského fraktál a Pascalův trojúhelník



# Sierpińského fraktál: „chaos game“

- zvolíme 3 body  $A, B, C$  tvořící rovnostranný trojúhelník
- vybereme náhodný bod  $X$  uvnitř trojúhelníku
- opakujeme následující postup:
  - vyber náhodně jeden z bodů  $A, B, C$
  - přesuň  $X$  do poloviny mezi  $X$  a zvoleným bodem
  - vykresli  $X$

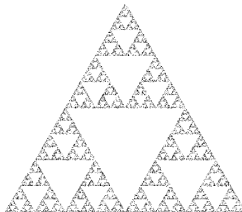
# Sierpińského fraktál: „chaos game“

E

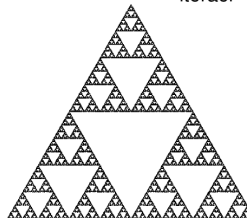
1 000  
iterací



10 000  
iterací

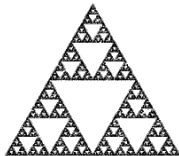


100 000  
iterací



# „Chaos game“: další fraktály

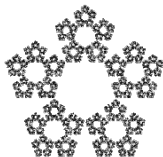
$$n = 3, r = 1/2$$



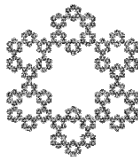
$$n = 5, r = 1/3$$



$$n = 5, r = 3/8$$

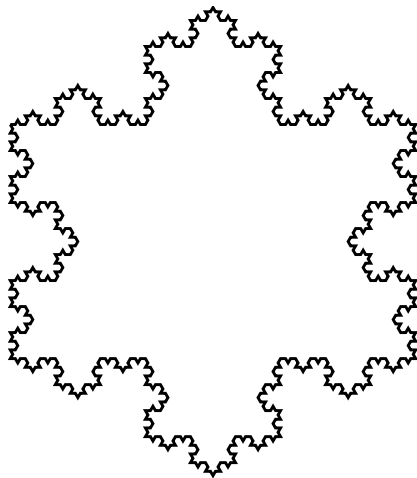


$$n = 6, r = 1/3$$



<http://mathworld.wolfram.com/ChaosGame.html>

# Kochova vložka





- Lindenmayerův systém
- modelování růstu rostlin, viz např. *The Algorithmic Beauty of Plants*  
<http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf>
- **paralelní přepisovací gramatika:**
  - axiom
  - přepisovací pravidla, aplikována paralelně
- přirozená interpretace želví grafikou

# Kochova vložka – L-systém

- symboly: F, -, +
- axiom: F--F--F
- přepisovací pravidlo systému je  $F \Rightarrow F+F--F+F$
- interpretace: F = forward(10), + = right(60),  
- = left(60)

$F \Rightarrow F+F--F+F \Rightarrow$

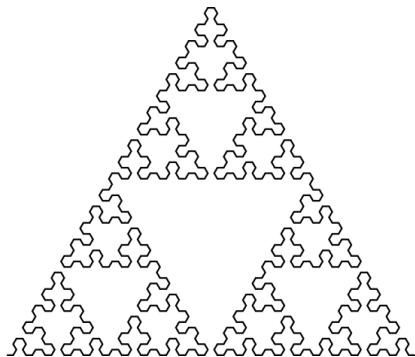
$F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F \Rightarrow$

$F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--$

$F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+$

$F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F$

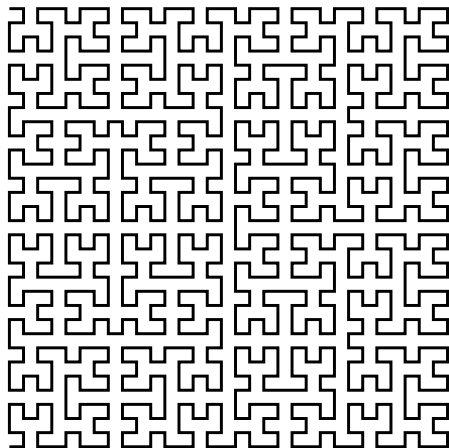
# Sierpińskiego fraktál – L-systém



$A \Rightarrow B-A-B$

$B \Rightarrow A+B+A$

# Hilbertova křivka



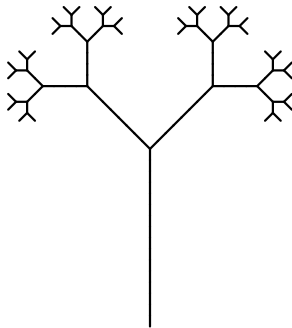
- prostor vyplňující křivka
- další podobné: Peanova křivka

$A \Rightarrow - B F + A F A + F B -$

$B \Rightarrow + A F - B F B - F A +$

- [ – push, uložení polohy želvy na zásobník
- ] – pop, obnovení polohy želvy ze zásobníku

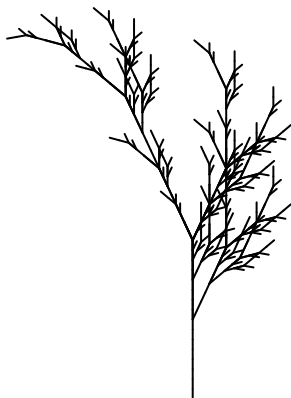
# Strom



$A \Rightarrow F \ [ \ + \ A \ ] \ - \ A$

$F \Rightarrow F \ F$

# Strom II



$A \Rightarrow F - [ [ A ] + A ] + F [ + F A ] - A$

$F \Rightarrow F F$

úhel  $25^\circ$

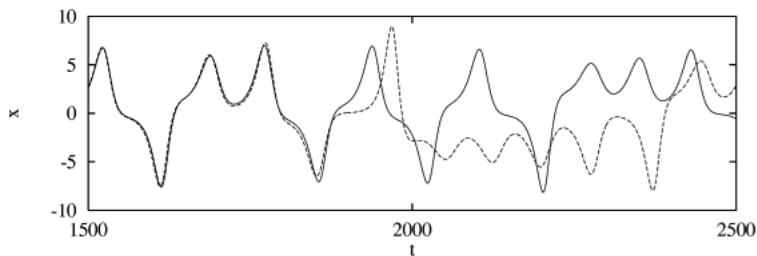
## Hlavní myšlenka

Malé změny v iniciálních podmínkách mohou způsobit velké změny při dlouhodobém chování.

- Mávnutí křídel motýla v Amazonském pralese může způsobit bouři v Texasu.
- Můžeme dostat **zdánlivě náhodné** chování i pro **deterministický** systém.



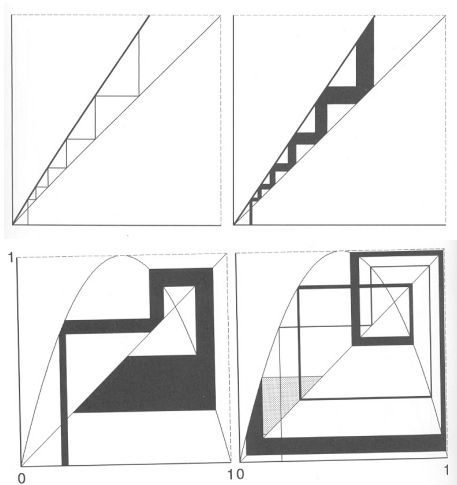
## 60. léta, Lorenz, jednoduchý model počasí, ...



**Figure 11.7** Two time evolutions of  $x$  with an infinitesimal initial difference

Figure from *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. Copyright © 1998-2000 by Gary William Flake. All rights reserved. Permission granted for educational, scholarly, and personal use provided that this notice remains intact and unaltered. No part of this work may be reproduced for commercial purposes without prior written permission from the MIT Press.

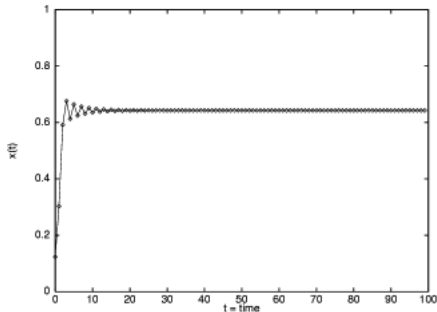
# Lineární a nelineární systémy



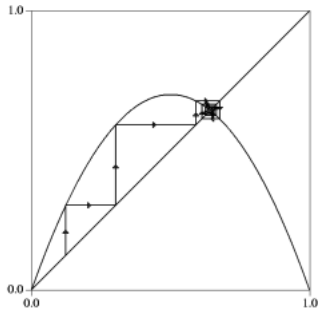
# Logistická rovnice

$$x_{t+1} = 4 \cdot r \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$$

- $r \in [0, 1], x_0 \in [0, 1]$
- možný význam: velikost populace
- jednoduchý příklad ilustrující základní koncepty chaosu



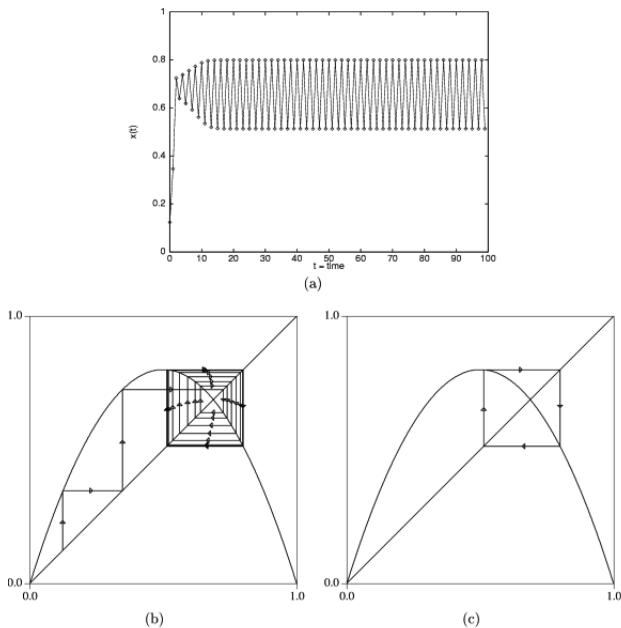
(a)



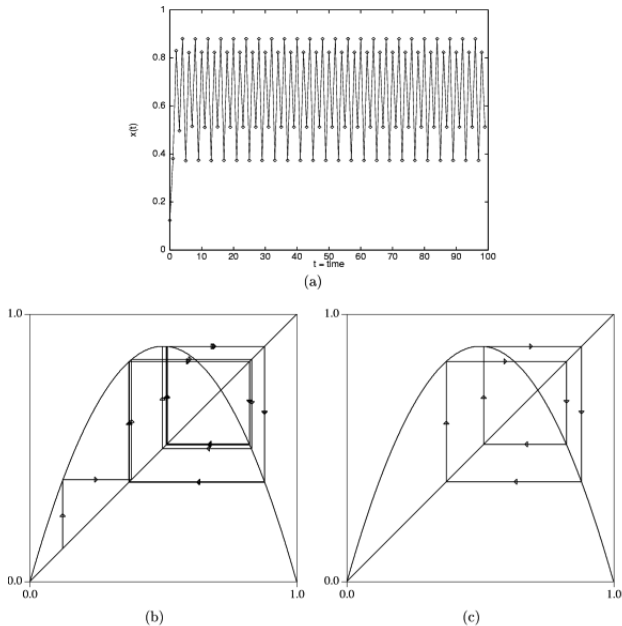
(b)

**Figure 10.2** Logistic map with  $r = \frac{7}{10}$ : (a) The time series quickly stabilizes to a fixed point. (b) The state space of the same system shows how subsequent steps of the system get pulled into the fixed point.

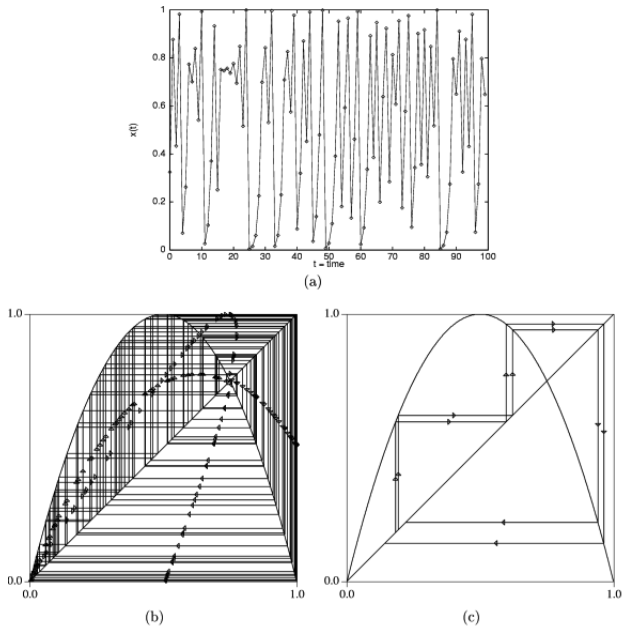
Figure from *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. Copyright © 1998-2000 by Gary William Flake. All rights reserved. Permission granted for educational, scholarly, and personal use provided that this notice remains intact and unaltered. No part of this work may be reproduced for commercial purposes without prior written permission from the MIT Press.



**Figure 10.4** Logistic map with  $r = \frac{8}{10}$ : (a) The time series quickly stabilizes to a period-2 limit cycle. (b) The state space of the same system shows how subsequent steps of the system get pulled into the limit cycle. (c) The state space of the same system but with only the converged values for  $x_n$  plotted, so as to clearly show the limit cycle's location.



**Figure 10.5** Logistic map with  $r = \frac{88}{100}$ : (a) The time series quickly stabilizes to a period-4 limit cycle. (b) The state space of the same system. (c) The state space of the same system but with only the converged values for  $x_t$  plotted.

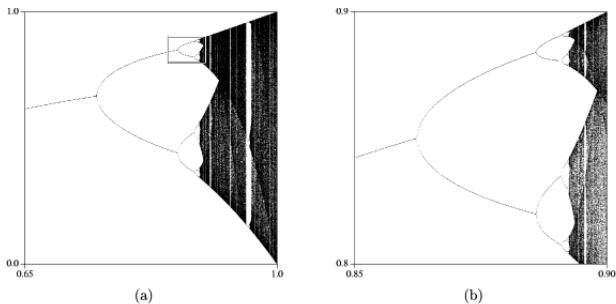


**Figure 10.6** Logistic map with  $r = 1$ : (a) The time series is chaotic and has the appearance of noise. (b) The state space of the same system, which illustrates how the system's trajectory visits every local region. (c) The state space of the same system with only four

# Feigenbaumův diagram

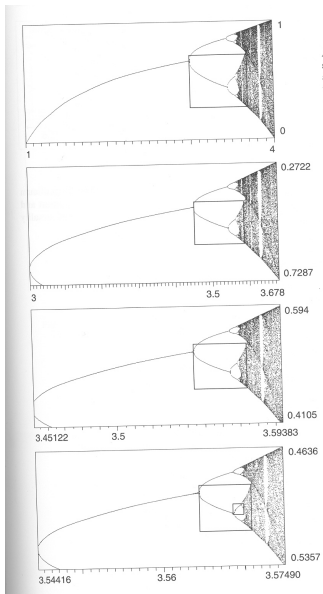
- pro hodnoty  $r$  simulovat 200 kroků, prvních 100 zahodit, ostatní zanést na  $y$ -ovou osu
- Feigenbaumův bod: přechod od řádu k chaosu
- bifurkační body, Feigenbaumova konstanta 4.6692
- soběpodobnost
- vztah reálné věci: tok (přímý, turbulence), srdce (pravidelně, fibrilace)





**Figure 10.7** Bifurcation diagrams for the logistic map: (a) This image has values of  $r$  such that fixed points, limit cycles, and chaos are all visible. (b) This image shows the detail of the boxed section of (a).

Figure from *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. Copyright © 1998-2000 by Gary William Flake. All rights reserved. Permission granted for educational, scholarly, and personal use provided that this notice remains intact and unaltered. No part of this work may be reproduced for commercial purposes without prior written permission from the MIT Press.



# Feigenbaumova konstanta

