**1. vnitrosemestrální práce MB104, 17. 3. 2014**
**skupina A**

**Příklad 1.** (3b.) Určete poslední dvě cifry čísla $2^{4^{5^{6^7}}}$.

**Řešení**. Určíme hledaný zbytek po dělení číslem 100: ten je jednoznačně určen zbtky po dělení čísly 25 a 4. Zřejmě je zbytek po dělení čtyřmi nulový ($4^{5^{6^7}} > 2$), navíc protože $(2, 25) = 1$ je $2^{\varphi(25)} = 2^20 \equiv 1 \pmod{25}$. Dále je $4^{5^{6^7}}$ dělitelné čtyřmi a dává zbytek $-1$ po dělení pěti (je to $-1$ na lichou), tedy zbytek 4 po dělení dvaceti. Je tak $2^{4^{5^{6^7}}} = 2^{20k+4} = 2^{20k}2^4 \equiv 2^4 = 16 \pmod{25}$. Protože $4|16$ je tento zbytek zbytkem i po dělení stem. Poslední dvě cifry daného čísla tedy jsou 1 a 6.

**Příklad 2.** (5b.) Vyřešte soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} 20x &\equiv 150 \pmod{250} \\ 11x &\equiv 17 \pmod{21} \end{aligned}$$

**Řešení**. Vyřešíme nejprve první kongruenci (můžeme zkrátit levou, pravou stranu a modul kongruence společným dělitelem 10. Řešíme tedy kongruenci $2x \equiv 15 \pmod{25}$. Pomocí Eukleidova algoritmu nalezneme inverzi ke dvojce: 13, pronásobením číslem 15 dostáváme řešení 20), lze i „uvidět“ přímo. (také je možné si všimnout, že $x$ musí být násobkem pěti ($x = 5t$) a řešíme jednodušší kongruenci $2t \equiv 3 \pmod{5}$). Dosazením $x = 25t + 20$ do druhé kongruence pak dostáváme po odečtení násobků sedmi kongruenci $2t \equiv 7 \pmod{21}$, s řešením $t = 21u + 14$. Celkem $x = 525u + 370$.

**Příklad 3.** (2b.) Nalezněte všechna kladná celá $k$ a $n$, pro která je číslo $2k^{n+2} + k^n$ prvočíslo.

**Řešení**. Číslo zapíšeme ve tvaru součinu: $2k^{n+2} + k^n = k^n(2k^2 + 1)$. Pro $k \geq 2$ jsou oba činitelé větší než 2 a nemůže se tedy jednat o prvočíslo. Pro $k = 1$ vyhovuje libovolné celé kladné $n$.