

Matematika IV – 7. týden

Elementární kombinatorika

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2014

Obsah přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Zobecněná binomická věta

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
Matematika drsně a svižně, e-text na
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
Matematika drsně a svižně, e-text na
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Zobecněná binomická věta

Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!

Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

Analýza algoritmů: Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu Quicksort.

Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!

Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

Analýza algoritmů: Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu Quicksort.

Odvození Cayleyho formule: Chceme znát počet různých stromů na daných n vrcholech.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```


Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])
```

- 1 Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n - 1$.
- 2 (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k -tý největší, je $\frac{1}{n}$.
- 3 Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k - 1$ a $n - k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```

if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])

```

- ❶ Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n - 1$.
- ❷ (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k -tý největší, je $\frac{1}{n}$.
- ❸ Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k - 1$ a $n - k$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}).$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{vynásob } n$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{vynásob } n$$

$$(n - 1)C_{n-1} = (n - 1)(n - 2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} \quad \text{tentýž výraz pro } C_{n-1}$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{vynásob } n$$

$$(n - 1)C_{n-1} = (n - 1)(n - 2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} \quad \text{tentýž výraz pro } C_{n-1}$$

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1) \quad \text{odečteno a upraveno}$$

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n .

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n .

Nejprve si pomůžeme drobným trikem, kdy vydělíme obě strany výrazem $n(n + 1)$:

$$\frac{C_n}{n + 1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n - 1)}{n(n + 1)}$$

Nyní tento vztah „rozbalíme“ (*telescope*, příp. si pomůžeme substitucí $B_n = C_n/n + 1$):

$$\frac{C_n}{n + 1} = \frac{2(n - 1)}{n(n + 1)} + \frac{2(n - 2)}{(n - 1)n} + \cdots + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{C_1}{2}$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1} \right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady).

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1} \text{ a dostaneme}$$

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1} \right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady).

Přitom je možné odhadnout $H_n \sim \int_1^n \frac{dx}{x} + \gamma$, odkud

$$C_n \sim 2(n+1)(\ln(n+1) + \gamma - 2) + 2.$$

Plán přednášky

- 1 Motivace
- 2 **Elementární kombinatorické metody**
- 3 Zobecněná binomická věta

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.
Počet **kombinací k -tého stupně** z n prvků je ($k \leq n$)

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí. Počet **kombinací k -tého stupně** z n prvků je ($k \leq n$)

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet variací platí

$$v(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, \dots , p_k prvků k -tého druhu, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$, potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním, $P(p_1, \dots, p_k)$, platí

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdot \dots \cdot p_k!}.$$

Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, \dots , p_k prvků k -tého druhu, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$, potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním, $P(p_1, \dots, p_k)$, platí

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Pro **variace k -tého stupně s opakováním** z n prvků platí

$$V(n, k) = n^k.$$

Pro **kombinace s opakováním**, $C(n, k)$, platí

Theorem

Počet kombinací s opakováním k -té třídy z n prvků je pro všechna $0 \leq k$ a $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}.$$

Princip inkluze a exkluze

Uvažujme obecnou konečnou množinu M a její podmnožiny A_1, \dots, A_k . Budeme psát $|M|$ pro počet prvků množiny M , tj. pro **mohutnost** množiny M .

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^k \left((-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| \right).$$

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

Výsledek je $\binom{15}{4} - \binom{13}{2} = 1287$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Binomická věta
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Binomická věta
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada
$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Binomická věta
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada
$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Vandermondova konvoluce
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Odkazovací strategie

Ve vězení je 100 vězňů s čísly jedna až sto. V uzavřené místnosti je 100 krabiček s čísly jedna až sto a v každé z nich náhodně rozdělené papírky s čísly také 1 až sto. Do místnosti budou po jednom postupně vcházet vězni a každý smí otevřít 50 krabic, vězni přitom spolu nekomunikují. Jestliže každý z nich najde svoje číslo, všechny pustí, v opačném případě všechny popraví. Doporučte nějakou rozumnou strategii pro vězně ...

Plán přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Zobecněná binomická věta**

Zobecněná binomická věta

Pro reálná čísla x , y , α , $x + y > 0$, platí

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k},$$

kde i pro $\alpha \notin \mathbb{N}$ klademe

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Budeme dokazovat v ekvivalentním tvaru (předpokládáme $y > 0$ a tedy můžeme z celého výrazu vytknout y^α)

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jde nám tedy o vyjádření koeficientů v mocninné řadě pro mocninnou funkcí $f(x) = (1 + x)^\alpha$ se středem v $x = 0$.

Jednoduchou kombinatorickou úvahou využívající pravidlo pro derivování mocninných řad člen po členu odvodíme požadovaný výsledek.

Budeme dokazovat v ekvivalentním tvaru (předpokládáme $y > 0$ a tedy můžeme z celého výrazu vytknout y^α)

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jde nám tedy o vyjádření koeficientů v mocninné řadě pro mocninnou funkcí $f(x) = (1 + x)^\alpha$ se středem v $x = 0$.

Jednoduchou kombinatorickou úvahou využívající pravidlo pro derivování mocninných řad člen po členu odvodíme požadovaný výsledek.

Všimněme si, že pro přirozené α se od jistého k v čitateli zobecněného binomického koeficientu vždy objeví jako součinitel nula, proto v takovém případě dostáváme opět klasickou konečnou sumu z binomické věty.