

Diskrétní matematika B – 13. týden

Kombinatorické výpočty – řešení rekurencí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2014

Obsah přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Řešení rekurencí
 - Fibonacciho čísla
 - Catalanova čísla
- 3 Exponenciální vytvořující funkce

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. **Introduction to Algorithms**, MIT Press, 2009.
- Robert Sedgewick, Philippe Flajolet, **An Introduction to the Analysis of Algorithms**, Addison-Wesley, 1995.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, **Concrete Mathematics**, Addison-Wesley, 1994.
- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, 1994, (rovněž
<http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)

Opakování

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n,$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{n \geq 0} \binom{r}{n} x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} x^n.$$

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[n = 1]$, $[2|n]$ apod.

Pro vyjádření koeficientu u x^n ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^n]F(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkce n . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
- 4 Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n , tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_n = 3^n - 2^n$.

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$nC_n = n(n-1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{n \geq 0} nC_n x^n = \sum_{n \geq 0} n(n-1)x^n + 2 \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=1}^n C_{k-1})x^n$
- $x C'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2 \frac{x C(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu
(vynásobíme integračním faktorem $e^{\int -\frac{2}{1-x} dx} = (1-x)^2$,
odkud $[(1-x)^2 C(x)]' = \frac{2x}{1-x}$), a tedy

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \left(\ln \frac{1}{1-x} - x \right),$$

odkud konečně $C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1) - 2n$.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf). Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n -tého členu posloupnosti.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Pak zřejmě $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Příklad – pokr.

Naším cílem je tedy odvodit vztah pro n -tý člen posloupnosti odpovídající vytvořující funkci $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1-x-x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x_2$ dostáváme vztah

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\lambda_1 x} + \frac{b}{1-\lambda_2 x},$$

odkud snadno pomocí znalostí o vytvořujících funkcích
 $F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n$.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla

$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$. Navíc je vidět, že $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k -tého stupně s konstantními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny, je situace jednodušší – viz dříve.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\text{st } P < \text{st } Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x)$, $Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α násobnost k , pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčítanec $A/(x - \alpha)$ sčítancem $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x - \alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1 - \beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$:

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n = \\
 &= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 = \\
 &= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.
 \end{aligned}$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že ve výše uvedeném výpočtu jsme nahradili konvoluci $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0$ vztahem $b_n = b_0 b_{n-1} + \dots + b_{n-1} b_0 + b_n b_{-1} + b_{n+1} b_{-2} + \dots$. Díky naší konvenci to ale není problém a velmi to usnadňuje práci se sumami (s nekonečnými součty se zde pracuje podstatně snadněji než s konečnými, kdy musíme neustále hlídat meze).

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \rightarrow 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞ , zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady. Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1 - 4x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1 - 4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n + 2)$ -úhelníku.

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).^a

^aNarozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$

- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Najdeme rekurzivní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \quad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2 , ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.

$$[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x), \text{ a tedy}$$

$$c_{2n} = d_n - d_{n-1}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{3 + \sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lfloor \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} \right\rfloor.$$

Např. $c_{20} = 413403$.

Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti (a_n) komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost $(a_n/n!)$ má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti $(1, 1, 1, 1, \dots)$ je e^x .

$$e^x \xleftrightarrow{\text{e.v.f.}} (1, 1, 1, \dots),$$
$$\frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{e.v.f.}} (1, 1, 2, 6, 24, \dots)$$

Operace s exponenciálními vytvořujícími funkcemi

Zdůrazněme, že exponenciální vytvořující funkce se od obyčejných liší i standardními operacemi.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}) .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.
- Součinem dvou funkcí $\widehat{F}(x)$ a $\widehat{G}(x)$ získáme funkci $\widehat{H}(x)$, která odpovídá posloupnosti $h_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$, tzv. *binomické konvoluci* f_n a g_n .

Příklad

Uvažme permutace na n -prvkové množině a označme $p_n = n!$ jejich počet. Pak příslušná e.v.f je

$$\sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}.$$

Příklad

Nyní uvažme cykly délky n na n -prvkové množině a označme c_n jejich počet. Snadno se ukáže, že $c_n = (n-1)!$. Pak příslušná e.v.f je

$$\sum_{n \geq 0} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \ln \frac{1}{1-x}.$$

Kombinatorické konstrukce

Jsou-li A, B třídy kombinatorických objektů s e.v.f. $\widehat{A}(x), \widehat{B}(x)$, pak níže uvedeným konstrukcím odpovídají příslušné e.v.f.:

disjunktní sjednocení.....	$\widehat{A}(x) + \widehat{B}(x)$
uspořádané dvojice objektů z A a B	$\widehat{A}(x) \cdot \widehat{B}(x)$
posloupnost k objektů z A	$(\widehat{A}(x))^k$
posloupnost objektů z A	$\frac{1}{1-\widehat{A}(x)}$
množina k objektů z A	$\frac{(\widehat{A}(x))^k}{k!}$
množina objektů z A	$e^{\widehat{A}(x)}$
cyklus k objektů z A	$\frac{(\widehat{A}(x))^k}{k}$
cyklus objektů z A	$\ln \frac{1}{1-\widehat{A}(x)}$

Příklad

Určete počet permutací n prvků s využitím faktu, že každá permutace je množina cyklů.

Řešení

E.V.f pro počet permutací je tedy podle předchozího přehledu

$$e^{\ln \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x},$$

jak jsme již jednou odvodili, odkud tedy $p_n = n![x^n] \frac{1}{1-x} = n!$.

Příklad

Určete počet permutací na n -prvkové množině, které nemají pevný bod.

Řešení

Analogicky jako výše jde o množinu cyklů (v tomto případě) délky větší než 1, proto je je příslušná e.v.f rovna

$$\widehat{D}(x) = e^{\sum_{n>1} x^n/n} = e^{\ln \frac{1}{1-x} - x} = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Odtud $d_n = n! [x^n] \widehat{D}(x) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, což lze pro velká n aproximovat $d_n \approx \frac{n!}{e}$. Jinými slovy, pro velká n náhodná permutace n -prvkové množiny neobsahuje pevný bod s pravděpodobností cca $\frac{1}{e}$.

Příklad

Určete pravděpodobnost, že náhodná permutace 10 prvků nebude mít žádný cyklus delší než 5.

Řešení

Podobně jako dříve, odvodíme, že jde o to, určit

$[x^{10}]e^{x+x^2/2+x^3/3+x^4/4+x^5/5}$. Tento výraz lze díky vhodné volbě konstant upravit na jednodušší

$$[x^{10}] \frac{1}{1-x} \left(1 - \frac{x^6}{6}\right) \left(1 - \frac{x^7}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^{10}}{10}\right) \cdots,$$

což je ale rovno

$$\begin{aligned} & [x^{10}] \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}\right) \left(1 - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \cdots - \frac{x^{10}}{10}\right) = \\ & = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \cdots - \frac{1}{10} \approx 0,354. \end{aligned}$$

„Praktická“ aplikace

Deset odsouzených na smrt dostalo poslední šanci. Identifikace každého z nich byla umístěna do jedné z deseti přihrádek (do každé po jedné). Odsouzenci přistupují po jednom k přihrádkám a mohou otevřít pět z nich. Pokud každý z odsouzených nalezne svoji identifikaci, všichni dostanou milost jinak budou všichni popraveni. Navrhněte strategii, při níž budou mít co největší šanci na úspěch.

Příklad

- 1 Určete počet cyklů délky 1, které se objeví v rozkladu náhodné n -prvkové permutace na součin nezávislých cyklů
- 2 Určete počet inverzí v náhodné n -prvkové permutaci.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahem

$$a_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^k}, a_0 = 1.$$

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1: $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$.
- Krok 2: $\widehat{G}(x) = -2x\widehat{G}(x) + \widehat{G}(x)^2 + x$.

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím dříve dokázaného vztahu

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a protože

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1},$$

postupně dostaneme

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$ a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! = (-1)^k \cdot (2k)! \cdot C_{k-1},$$

kde C_n je n -té Catalanovo číslo.

Cayleyho formule

Cayleyho formule je vztah z kombinatorické teorie grafů, který udává, že počet stromů (tj. grafů, v nichž jsou libovolné dva vrcholy spojené právě jednou cestou) na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduhost $t_n = \kappa(K_n)$. Lze snadno spočítat, že $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 3$, $t_4 = 16$. (Např. víme, že v případě stromů na 4 vrcholech musíme z $\binom{6}{3} = 20$ potenciálních grafů s právě 3 hranami odebrat ty možnosti, kde tyto hrany tvoří trojúhelník. Těch je ale právě $\binom{4}{3} = 4$).

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1t_2 + t_1^3$.

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$ (uvědomte si přitom, že u_n udává počet tzv. kořenových stromů). Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \dots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m -té mocnině řady $\hat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$. Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \hat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\hat{U}(x) = x e^{\hat{U}(x)}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = e^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = e^{x\mathcal{E}(x)}$.

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = x e^{\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.

Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n} [x^n] \widehat{U}(x) = (n-1)! [x^{n-1}] \mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$

Alternativní závěr výpočtu

Pokud vám přišel závěr výpočtu příliš umělý, zkusme to ještě jednou, s využitím tzv. Lagrangeovy inverzní formule:

Věta

Pokud vytvořující funkce $g(x) = \sum_{n \geq 1} g_n x^n$ splňuje vztah

$$x = f(g(x)),$$

kde $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, pak

$$g_n = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left(\frac{u}{f(u)} \right)^n.$$

Alternativní závěr výpočtu

Řešíme $\widehat{U}(x) = x e^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$. Odtud z Lagrangeovy formule

$$\begin{aligned} [x^n] \widehat{U}(x) &= \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left(\frac{u}{u/e^u} \right)^n \\ &= \frac{1}{n} [u^{n-1}] e^{un} = \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

Protože $\frac{u_n}{n!} = [x^n] \widehat{U}(x)$, dostáváme odtud

$$t_n = \frac{u_n}{n} = n^{n-2}.$$