Příklady na cvičení ke 2. přednášce

Příklad 1.: Pravděpodobnost, že výrobek má 1. jakost, je $\upsilon = 0{,}9$. Kolik výrobků je aspoň třeba zkontrolovat, aby s pravděpodobností aspoň 0,99 bylo zaručeno, že rozdíl relativní četnosti počtu výrobků 1. jakosti a pravděpodobnosti $\upsilon = 0{,}9$ byl v absolutní hodnotě menší než 0,03? K výpočtu použijte jak Bernoulliovu větu, tak Moivreovu - Laplaceovu větu a výsledky porovnejte.

Řešení:

X – náh. vel. udávající počet výrobků 1. jakosti,

$X \sim Bi(n, 0{,}9)$, $E(X) = 0{,}9n$, $D(X) = 0{,}09n$

Řešení podle Bernoulliovy věty:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0{,}9\right| < 0{,}03\right) \geq 1 - \frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{n \cdot 0{,}03^2} \geq 0{,}99$$

$$\frac{0{,}09}{n \cdot 0{,}0009} \leq 0{,}01 \Rightarrow n \geq 10000$$

Je zapotřebí zkontrolovat aspoň 10 000 výrobků.

Řešení podle M.-L. věty:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0{,}9\right| < 0{,}03\right) \geq 0{,}99$$

$$0{,}99 \leq P(0{,}87n < X < 0{,}93n) =$$

$$= P\left(\frac{0{,}87n - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}} < \frac{X - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}} < \frac{0{,}93n - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}} < \frac{X - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}} < \frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(-0{,}1\sqrt{n} < \frac{X - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}} < 0{,}1\sqrt{n}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(0{,}1\sqrt{n}) - \Phi(-0{,}1\sqrt{n}) = 2\Phi(0{,}1\sqrt{n}) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(0{,}1\sqrt{n}) \geq 0{,}995, \quad u_{0{,}995} = 2{,}57583$$

$$0{,}1\sqrt{n} \geq 2{,}57583, \quad \sqrt{n} \geq 25{,}7583 \Rightarrow n \geq 664{,}46$$

Je zapotřebí zkontrolovat aspoň 665 výrobků.

Příklad 2.: Pravděpodobnost úspěchu při jednom pokusu je 0,3. S jakou pravděpodobností lze tvrdit, že počet úspěchů ve 100 pokusech bude v mezích od 20 do 40?

Řešení:

Y_{100} – počet úspěchů ve 100 pokusech, $Y_{100} \sim Bi(100,\ 0,3)$. Použijeme M-L větu. Podmínky dobré aproximace jsou splněny, protože

$$n.\vartheta.(1-\vartheta) = 100.0,3.0,7 > 9 \quad , \ 1/(n+1) = 1/101 < 0,3 < n/(n+1) = 100/101$$

$$P(19 < Y_{100} \leq 40) = P\left(\frac{19 - 100.0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} < \frac{Y_{100} - 100.0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \leq \frac{40 - 100.0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \right) = P\left(\frac{-11}{\sqrt{21}} < \frac{Y_{100} - 100.0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \leq \frac{10}{\sqrt{21}} \right) =$$

$$= \left(-2,40 < \frac{Y_{100} - 100.0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \leq 2,18 \right) \approx \Phi(2,18) - \Phi(-2,40) =$$

$$= \Phi\ 2,18) - (1 - \Phi(2,40) = \Phi(2,40 + \Phi(2,18) - 1 =$$

$$= 0,99180 + 0,98537 - 1 = \underline{\underline{0,97717}}$$

Příklad 3.: Pravděpodobnost, že zakoupený elektrospotřebič bude vyžadovat opravu během záruční doby, je 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že během záruční doby bude nutno ze 400 prodaných spotřebičů opravit více než 96?

11.3. Pravděpodobnost, že zakoupený elektrospotřebič bude vyžadovat opravu během záruční doby, je rovna 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že během záruční doby bude nutno ze 400 prodaných spotřebičů opravit více než 96?

Řešení:

Nechť náhodná veličina Y_n znamená počet elektrospotřebičů, které budou potřebovat opravu z celkového počtu n prodaných spotřebičů. Je zřejmě $Y_n \sim Bi(n,\ 0,2)$.

$$n.\vartheta.(1-\vartheta) = 400.0,2.0,8 > 9 \quad , \ 1/(n+1) = 1/401 < 0,2 < n/(n+1) = 400/401$$

$$P(Y_{400} > 96) = 1 - P(Y_{400} \leq 96) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y_{400} - 400.0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \leq \frac{96 - 400.0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{96 - 400.0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{16}{8} \right) = 1 - \Phi(2) =$$

$$= 1 - 0,97725 = \underline{\underline{0,02275}}$$

Příklad 4.: Víme, že v jisté oblasti je 80% domácností vybaveno videem. Vylosujeme 900 domácností (předpokládáme, že počet domácností v dané oblasti je velký, takže nezáleží na tom, zda se vybírá s vracením nebo bez vracení). Jaký bude maximální počet vybraných domácností, které vlastní video, a to s pravděpodobností 0,95?

11.4. Víme, že v jisté oblasti je 80% domácností vybaveno videem. Vylosujeme 900 domácností (předp., že počet domácností v dané oblasti je velký, takže nezáleží na tom, zda se vybírá s vracením nebo bez vracení). Jaký bude maximální počet vybraných domácností, které vlastní video, a to s pravděpodobností 0,95?

Řešení:

Nechť náhodná veličina Y_n znamená počet domácností, které vlastní video (z celkového počtu n domácností). Pravděpodobnost, že domácnost vlastní video je 0,8.

Zřejmě je $Y_n \sim Bi(n, 0{,}8)$.

$n.\vartheta.(1-\vartheta) = 900.0{,}8.0{,}2 > 9$, $1/(n+1) = 1/901 < 0{,}2 < n/(n+1) = 900/901$

$P(Y_{900} \leq y) = 0{,}95$ a v tomto vztahu neznáme y

$$P(Y_{900} \leq y) = P\left(\frac{Y_{900} - 900.0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \leq \frac{y - 900.0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{y - 900.0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \right) = \Phi\left(\frac{y - 720}{12} \right) = 0{,}95$$

$$\frac{y - 72}{12} = u_{0,95} = 1{,}645 \quad \text{(tabulka } \vartheta\text{-kvantilů norm.rozlož.)}$$

$y - 720 = 19{,}74$

$y = 739{,}74$

S pravděpodobností 0,95 bude vlastnit video maximálně 739 vybraných domácností.

Příklad 5.: Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 000 novorozenci bude

a) více děvčat než chlapců

b) chlapců od 5 000 do 5 300?

Řešení:

Nechť náhodná veličina Y_n znamená počet chlapců mezi n novorozenci.
Zřejmě je $Y_n \sim Bi(n, 0{,}515)$.
$n.\vartheta.(1-\vartheta) = 10000.0{,}515.0{,}485 > 9$,
$1/(n+1) = 1/10001 < 0{,}515 < n/(n+1) = 10000/10001$
Y_{10000} je počet chlapců mezi 10000 novorozenci

$$a)\ P(Y_{10000} \le 5000) = P\left(\frac{Y_{10000} - 100000.0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \le \right.$$

$$\left. \le \frac{5000 - 10000.0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \right) = P\left(\frac{Y_{10000} - 5150}{\sqrt{5150\cdot 0{,}485}} \le \right.$$

$$\left. \le \frac{-150}{\sqrt{2497{,}75}} \right) = P\left(\frac{Y_{10000} - 5150}{\sqrt{5150\cdot 0{,}485}} \le -\ 3 \right) \approx \Phi(-3) =$$

$$= 1 - \Phi(3) = 1 - 0{,}99865 = \underline{\underline{0{,}00135}}$$

$$b)\ P(4999 < Y_{10000} \le 5300) = P\left(\frac{4999 - 10000.0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} < \right.$$

$$\left. < \frac{Y_{10000} - 10000.0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \le \frac{5300 - 10000.0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \right) =$$

$$= P\left(-3{,}02136 < \frac{Y_{10000} - 10000.0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \le 3{,}000013\right) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) =$$

$$= 2\Phi(3) - 1 = 2.0{,}99865 - 1 = \underline{\underline{0{,}99730}}$$

Příklad 6.: V určité skupině zaměstnanců je 10% s příjmem, který překračuje celostátní průměr. Kolik zaměstnanců z této skupiny je třeba vybrat, aby s pravděpodobností aspoň 0,95 bylo mezi nimi 8% až 12% zaměstnanců s nadprůměrným příjmem?

Řešení:

X – počet zaměstnanců s nadprůměrným příjmem, X ~ Bi(n, 0,1), E(X) = 0,1n, D(X) = 0,09n,

$$0{,}95 \le P\left(0{,}08 \le \frac{X}{n} \le 0{,}12\right) = P(0{,}08n \le X \le 0{,}12n) = P\left(\frac{0{,}08n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \le \frac{X - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \le \frac{0{,}12n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) =$$

$$P\left(\frac{-\sqrt{n}}{15} \le \frac{X - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \le \frac{\sqrt{n}}{15}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \ge 0{,}975,$$

tedy $\frac{\sqrt{n}}{15} \ge u_{0,975} = 1{,}96 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 29{,}4 \Rightarrow n \ge 865.$

Pro splnění podmínek je zapotřebí vybrat aspoň 865 zaměstnanců.

Příklad 7.: Osobě prohlašující, že má proutkařské schopnosti, předložíme 100 dvojic zakrytých nádob. V každé dvojici je jedna nádoba prázdná a druhá naplněná vodou. Výsledky proutkaře srovnáme s výsledky hypotetické osoby, která pracuje zcela náhodně. Nechť náhodná veličina Y_{100} udává počet úspěšně identifikovaných dvojic nádob. Jaká je pravděpodobnost, že Y_{100} překročí přirozené číslo y, y = 0, 1, …, 100?

11.7. Příklad s proutkařem. Osobě prohlašující, že má proutkařské schopnosti, předložíme 100 dvojic zakrytých nádob. V každé dvojici je jedna nádoba prázdná a druhá naplněná vodou. Výsledky proutkaře srovnáme s výsledky hypotetické osoby, která pracuje zcela náhodně. Nechť náhodná veličina Y_{100} udává počet úspěšně identifikovaných dvojic nádob. Jaká je pravděpodobnost, že Y_{100} překročí přirozené číslo y, y = 0, 1, ..., 100 ?

Řešení:

Je zřejmé, že $Y_{100} \sim Bi(100,1/2)$

$$P(Y_{100} > d) = P\left(\frac{Y_{100} - 100.0,5}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}} > \frac{d - 100.0,5}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{Y_{100} - 50}{5} > \frac{d - 50}{5}\right) = 1 - P\left(\frac{Y_{100} - 50}{5} \le \frac{d - 50}{5}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{d - 50}{5}\right)$$

d = 50: $P(Y_{100} > 50) \approx 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$

d = 55: $P(Y_{100} > 55) \approx 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,15866$

d = 60: $P(Y_{100} > 60) \approx 1 - \Phi(2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$

d = 65: $P(Y_{100} > 65) \approx 1 - \Phi(3) = 1 - 0,99865 = 0,00135$

Vidíme, že se vzrůstajícím d rychle klesá pravděpodobnost úspěšné identifikace dvojic zakrytých nádob a pro $d > 60$ už je prakticky nemožné dosáhnout takového výsledku pouhým hádáním. Pokud je tedy proutkař takto úspěšný, svědčí to o existenci jistých schopností.

Příklad 8.: Dodavatel montuje automatickou linku a odběratel je ochoten ji převzít, jestliže počet zmetků mezi prvními 10 000 výrobky nepřesáhne číslo 9. Jak nízké pravděpodobnosti ϑ vyrobení zmetku musí dodavatel dosáhnout, aby linka byla převzata s pravděpodobností aspoň 0,99?

11.8. Dodavatel montuje automatickou linku a odběratel je ochoten ji převzít, jestliže počet zmetků mezi prvními 10 000 výrobky nepřesáhne číslo 9. Jak nízké pravděpodobnosti ϑ vyrobení zmetku musí dodavatel dosáhnout, aby linka byla převzata s pravděpodobností alespoň 0,99?

Řešení:

Nechť náhodná veličina Y_n znamená počet zmetků mezi prvními n výrobky . Zřejmě je $Y_n \sim Bi(n, \vartheta)$.

V našem případě $n = 10000$ a ϑ máme určit.

$$P(Y_n \le 9) = \sum_{y=0}^{9} \binom{n}{y} \vartheta^y (1 - \vartheta)^{n-y}$$

Na základě Poissonovy věty se užívá přibližného vzorce, který nahrazuje složitý výpočet pravděpodobnostní funkce binomického rozložení jednodušším výpočtem pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení:

$$P(Y_n = y) = \binom{n}{y} \vartheta^y (1 - \vartheta)^{n-y} \approx \frac{(n\vartheta)^y}{y!} e^{-n\vartheta}$$

Tato aproximace se považuje za vyhovující pro $n \ge 30$, $\vartheta \le 0,1$.

$$P(Y_{10000} \le 9) = \sum_{y=0}^{9} \binom{10000}{y} \vartheta^y (1 - \vartheta)^{10000-y}$$

$$\approx \sum_{y=0}^{9} \frac{(10000.\vartheta)^y}{y!} e^{-10000.\vartheta} \ge 0,99$$

Položíme $\lambda = 10000.\vartheta$

$\pi(0) + \ldots + \pi(9) \geq 0{,}99$, kde $\pi(x)$ je pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení, která je tabelována

V tabulce najdeme pro

$\lambda = 5$: $\pi(0) + \ldots + \pi(9) = 0{,}96459 < 0{,}99$

$\lambda = 4$: $\pi(0) + \ldots + \pi(9) = 0{,}99187 \geq 0{,}99$

Stačí tedy volit $\lambda = 4$, tj. $10000.\vartheta = 4$, tedy $\boxed{\vartheta = 0{,}0004}$

$\lambda = 5$: $0{,}00674 + 0{,}03396 + 0{,}08422 + 0{,}14037 + 0{,}17547 +$
$+ 0{,}17457 + 0{,}14622 + 0{,}10444 + 0{,}06528 + 0{,}03627 = 0{,}96459$

$\lambda = 4$: $0{,}01832 + 0{,}07326 + 0{,}14653 + 0{,}19537 + 0{,}19537 +$
$+ 0{,}15629 + 0{,}10420 + 0{,}05954 + 0{,}02977 + 0{,}01323 = 0{,}99187$