TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

Zadání:
Nechť X_1, ..., X_{400} je náhodný výběr z N(μ,0,01). Je známo, že výběrový průměr se realizoval hodnotou 0,01. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu

1) H_0: μ = 0 proti oboustranné alternativě H_1: μ ≠ 0
   a) pomocí intervalu spolehlivosti
   b) pomocí kritického oboru
   c) pomocí p-hodnoty.

2) H_0: μ = 0 proti pravostranné alternativě H_1: μ > 0
   a) pomocí intervalu spolehlivosti
   b) pomocí kritického oboru
   c) pomocí p-hodnoty.

3) H_0: μ = 0 proti levostranné alternativě H_1: μ < 0
   a) pomocí intervalu spolehlivosti
   b) pomocí kritického oboru
   c) pomocí p-hodnoty.

Řešení:
m... výběrový průměr, σ^2...rozptyl, n...rozsah souboru, $\alpha = 0.05$
obecně testujeme hypotézu ***H_0: μ = c,*** v našem případě ***c=0***

1) 0boustranná alternativa

a) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

Vytvoříme interval spolehlivosti IS=(d,h)

$d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$. H0 nezamítáme pokud $c \in IS$, v opačném případě hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

$d = 0{,}01 - \frac{0{,}1}{\sqrt{400}} 1{,}96 = 0{,}0002$, $h = 0{,}01 + \frac{0{,}1}{\sqrt{400}} 1{,}96 = 0{,}0198$,

V našem případě IS=(0.0002,0.0198), c=0, tedy $0 \notin (0.0002, 0.0198)$, tj. $c \notin IS$, tedy hypotézu zamítáme na hladině významnosti α. (H0 zamítáme ve prospěch alternativní hypotézy H1, tedy se přikláníme spíše k různosti střední hodnoty od nuly.)

b) Testování pomocí kritického oboru

Nejprve vypočteme realizaci testové statistiky $t_0 = \frac{m-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, poté stanovíme kritický obor $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$. H0 zamítáme pokud $t_o \in W$, v opačném případě hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

$t_0 = \frac{0{,}01 - 0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \frac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2$, $W = (-\infty, -1{,}96 \rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$, $2 \in (-\infty, -1{,}96 \rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$

H0 zamítáme na hladině významnosti α.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Nejprve spočítáme hodnotu testové statistiky $t_0 = \dfrac{m-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, potom určíme p-hodnotu podle vzorce $p = 2 \cdot \min(P(T \geq t_0), P(T \leq t_0))$, pokud je $p < \alpha$, pak hypotézu zamítáme, v opačném případě, hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

$t_0 = \dfrac{0{,}01-0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \dfrac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2$,

$p = 2 \cdot \min(P(T \geq t_0), P(T \leq t_0)) = 2 \cdot \min(P(T \geq 2), P(T \leq 2)) = 2 \cdot \min(1-P(T<2), P(T \leq 2)) =$
$= 2 \cdot \min(1-\Phi(2), \Phi(2)) = 2 \cdot \min(1-0.97725, 0.97725) = 2 \cdot \min(0.02275, 0.97725) = 0{,}0455$

0,0455<0.05, tj. hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

2) Pravostranná alternativa

a) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

Vytvoříme interval spolehlivosti $IS = (d, \infty)$

$d = m - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$. H0 nezamítáme pokud $c \in IS$, v opačném případě hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

$d = 0{,}01 - \dfrac{0{,}1}{\sqrt{400}} 1{,}64485 = 0{,}0018$,

V našem případě $IS = (0.0018, \infty)$, c=0, tedy $0 \notin (0.0018, \infty)$, tj. $c \notin IS$, tedy hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

b) Testování pomocí kritického oboru

Nejprve vypočteme realizaci testové statistiky $t_0 = \dfrac{m-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, poté stanovíme kritický obor $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$. H0 zamítáme pokud $t_o \in W$, v opačném případě hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

$t_0 = \dfrac{0{,}01-0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \dfrac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2$, $W = \langle 1{,}64485, \infty)$, $2 \in \langle 1{,}64485, \infty)$ H0 zamítáme na hladině významnosti α.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Nejprve spočítáme hodnotu testové statistiky $t_0 = \dfrac{m-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, potom určíme p-hodnotu podle vzorce $p = (P(T \geq t_0)$, pokud je $p < \alpha$, pak hypotézu zamítáme, v opačném případě, hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

$$t_0 = \frac{0{,}01 - 0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \frac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2,$$

$p = P(T \geq t_0) = P(T \geq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$

0,02275<0.05, tj. hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

3) Levostranná alternativa

a) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

Vytvoříme interval spolehlivosti $IS = (-\infty, h)$

$h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$. H0 nezamítáme pokud $c \in IS$, v opačném případě hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

$$h = 0{,}01 + \frac{0{,}1}{\sqrt{400}} 1{,}64485 = 0{,}0182 \ .$$

V našem případě $IS = (-\infty, 0.0182)$, c=0, tedy $c \in (-\infty, 0.0182)$, tj. $c \in IS$, tedy hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

b) Testování pomocí kritického oboru

Nejprve vypočteme realizaci testové statistiky $t_0 = \frac{m - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, poté stanovíme kritický obor $W = (-\infty, -u_{1-\alpha} \rangle$.

H0 zamítáme pokud $t_o \in W$, v opačném případě hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

$t_0 = \frac{0{,}01 - 0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \frac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2$, $W = (-\infty, -1{,}64485 \rangle$, $2 \notin (-\infty, -1{,}64485 \rangle$ H0 nezamítáme na hladině významnosti α.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Nejprve spočítáme hodnotu testové statistiky $t_0 = \frac{m - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, potom určíme p-hodnotu podle vzorce $p = P(T \leq t_0)$, pokud je $p < \alpha$, pak hypotézu zamítáme, v opačném případě, hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

$$t_0 = \frac{0{,}01 - 0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \frac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2,$$

$p = P(T \leq t_0) = P(T \leq 2) = P(T \leq 2) = \Phi(2) = 0.97725$

0,97725>0.05, tj. hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.