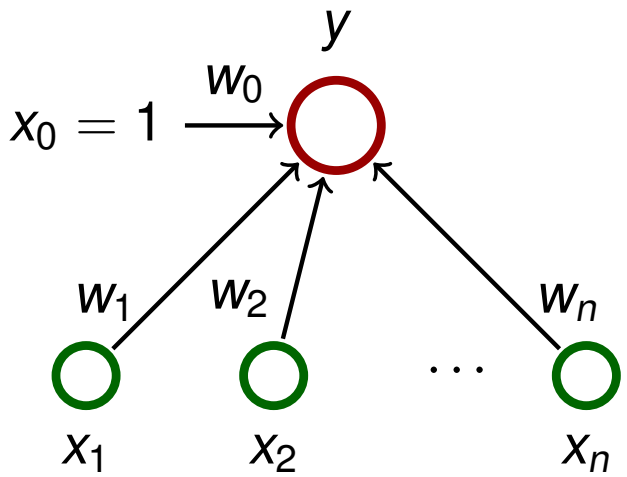
Perceptron a ADALINE

- Perceptron
- Perceptronové učící pravidlo
- Konvergence učení perceptronu
- ADALINE
- Učení ADALINE

Perceptron

Organizační dynamika:



$\vec{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ a $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kde $x_0 = 1$.

Aktivní dynamika:

- vnitřní potenciál: $\xi = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i = \vec{w} \cdot \vec{x}$
- aktivační funkce: $\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0\,; \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$
- funkce sítě: $y[\vec{w}](\vec{x}) = \sigma(\xi) = \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x})$

Perceptron

Adaptivní dynamika:

- Dána množina **tréninkových vzorů**

$$\mathcal{T} = \left\{\left(\vec{x}_1, d_1\right), \left(\vec{x}_2, d_2\right), \ldots, \left(\vec{x}_p, d_p\right)\right\}$$

Zde $\vec{x}_k = (x_{k0}, x_{k1} \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x_{k0} = 1$, je vstup k-tého vzoru a $d_k \in \{0, 1\}$ je očekávaný výstup.

(d_k určuje, do které ze dvou kategorií dané $\vec{x}_k = (x_{k0}, x_{k1} \ldots, x_{kn})$ patří).

- Vektor vah $\vec{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ je **konzistentní s** $\mathcal{T}$ pokud $y[\vec{w}](\vec{x}_k) = \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x}_k) = d_k$ pro každé $k = 1, \ldots, p$.

  Množina $\mathcal{T}$ je **vnitřně konzistentní** pokud existuje vektor $\vec{w}$, který je s ní konzistentní.

- Cílem je nalézt vektor $\vec{w}$, který je konzistentní s $\mathcal{T}$ za předpokladu, že $\mathcal{T}$ je vnitřně konzistentní.

Perceptron - adaptivní dynamika

Online učící algoritmus:

Idea: Cyklicky prochází vzory a adaptuje podle nich váhy, tj. otáčí dělící nadrovinu tak, aby se zmenšila vzdálenost špatně klasifikovaného vzoru od jeho příslušného poloprostoru.

Prakticky počítá posloupnost vektorů vah $\vec{w}^{(0)}, \vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}, \ldots$.

- váhy v $\vec{w}^{(0)}$ jsou inicializovány náhodně blízko 0
- v kroku $t+1$ je $\vec{w}^{(t+1)}$ vypočteno takto:

$$\begin{aligned} \vec{w}^{(t+1)} &= \vec{w}^{(t)} - \varepsilon \cdot \left(y[\vec{w}^{(t)}](\vec{x}_k) - d_k \right) \cdot \vec{x}_k \\ &= \vec{w}^{(t)} - \varepsilon \cdot \left(\sigma\left(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k\right) - d_k \right) \cdot \vec{x}_k \end{aligned}$$

Zde $k = (t \mod p) + 1$ (tj. cyklické procházení vzorů) a $0 < \varepsilon \leq 1$ je **rychlost učení**.

Věta (Rosenblatt)

Jestliže je $\mathcal{T}$ vnitřně konzistentní, pak existuje t^* takové, že $\vec{w}^{(t^*)}$ je konzistentní s $\mathcal{T}$.

Důkaz Rosenblattovy věty

Pro zjednodušení budeme dále předpokládat, že $\varepsilon = 1$.

Nejprve si algoritmus přepíšeme do méně kompaktní formy:

- váhy v $\vec{w}^{(0)}$ jsou inicializovány náhodně blízko 0
- v kroku $t+1$ je $\vec{w}^{(t+1)}$ vypočteno takto:
  - **Jestliže** $\sigma(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k) = d_k$, **pak** $\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)}$
  - **Jestliže** $\sigma(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k) \neq d_k$, **pak**
    - $\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)} + \vec{x}_k$ pro $d_k = 1$
    - $\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)} - \vec{x}_k$ pro $d_k = 0$

    (Řekneme, že nastala korekce.)

kde $k = (t \mod p) + 1$.

Důkaz Rosenblattovy věty

(Pro daný vektor $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ označme $\left\|\vec{a}\right\|$ jeho eukleidovskou normu $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}$)

Idea:

- Uvážíme *hodně dlouhý vektor* (spočítáme jak dlouhý) $\vec{w}^*$, který je konzistentní s $\mathcal{T}$.
- Ukážeme, že pokud došlo v kroku $t+1$ ke korekci vah (tedy buď $\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)} + \vec{x}_k$ nebo $\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)} - \vec{x}_k$), pak

$$\left\|\vec{w}^{(t+1)} - \vec{w}^*\right\|^2 \leq \left\|\vec{w}^{(t)} - \vec{w}^*\right\|^2 - \max_i \left\|\vec{x}_i\right\|$$

  Všimněte si, že $\max_i \left\|\vec{x}_i\right\| > 0$ *nezávisí* na t.
- Z toho plyne, že algoritmus nemůže udělat nekonečně mnoho korekcí.

Perceptron - adaptivní dynamika

Dávkový učící algoritmus:

Vypočte posloupnost $\vec{w}^{(0)}, \vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}, \ldots$ váhových vektorů.

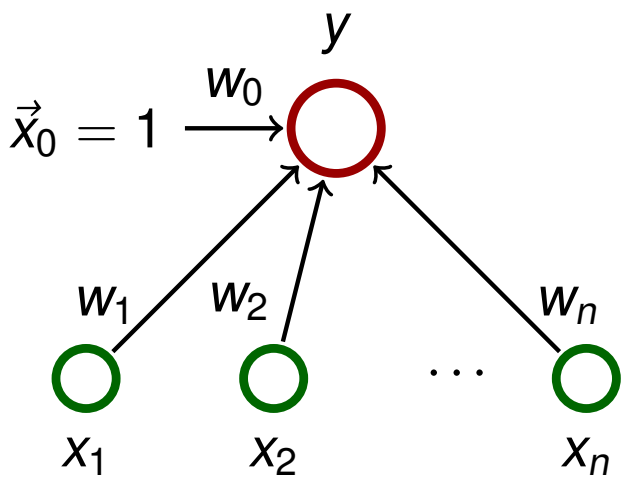
- váhy v $\vec{w}^{(0)}$ jsou inicializovány náhodně blízko 0
- v kroku $t+1$ je $\vec{w}^{(t+1)}$ vypočteno takto:

$$\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)} - \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p} (\sigma(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k) - d_k) \cdot \vec{x}_k$$

Zde $k = (t \mod p) + 1$
a $0 < \varepsilon \leq 1$ je **rychlost učení**.

ADALINE

Organizační dynamika:



$\vec{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ a $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kde $x_0 = 1$.

Aktivní dynamika:

- vnitřní potenciál: $\xi = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i = \vec{w} \cdot \vec{x}$
- aktivační funkce: $\sigma(\xi) = \xi$
- funkce sítě: $y[\vec{w}](\vec{x}) = \sigma(\xi) = \vec{w} \cdot \vec{x}$

ADALINE

Adaptivní dynamika:

- Dána množina **tréninkových vzorů**

$$\mathcal{T} = \left\{\left(\vec{x}_1, d_1\right), \left(\vec{x}_2, d_2\right), \ldots, \left(\vec{x}_p, d_p\right)\right\}$$

Zde $\vec{x}_k = (x_{k0}, x_{k1} \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x_{k0} = 1$, je vstup k-tého vzoru a $d_k \in \mathbb{R}$ je očekávaný výstup.

Intuice: chceme, aby síť počítala afinní aproximaci funkce, jejíž (některé) hodnoty nám předepisuje tréninková množina.

- **Chybová funkce:**

$$E(\vec{w}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(\vec{w}\cdot\vec{x}_k - d_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n} w_i x_{ki} - d_k\right)^2$$

- Cílem je nalézt $\vec{w}$, které minimalizuje $E(\vec{w})$.

Gradient chybové funkce

Uvažme **gradient** chybové funkce:

$$\nabla E(\vec{w}) = \left(\frac{\partial E}{\partial w_0}(\vec{w}), \ldots, \frac{\partial E}{\partial w_n}(\vec{w}) \right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\vec{w} \cdot \vec{x}_k - d_k \right) \cdot \vec{x}_k$$

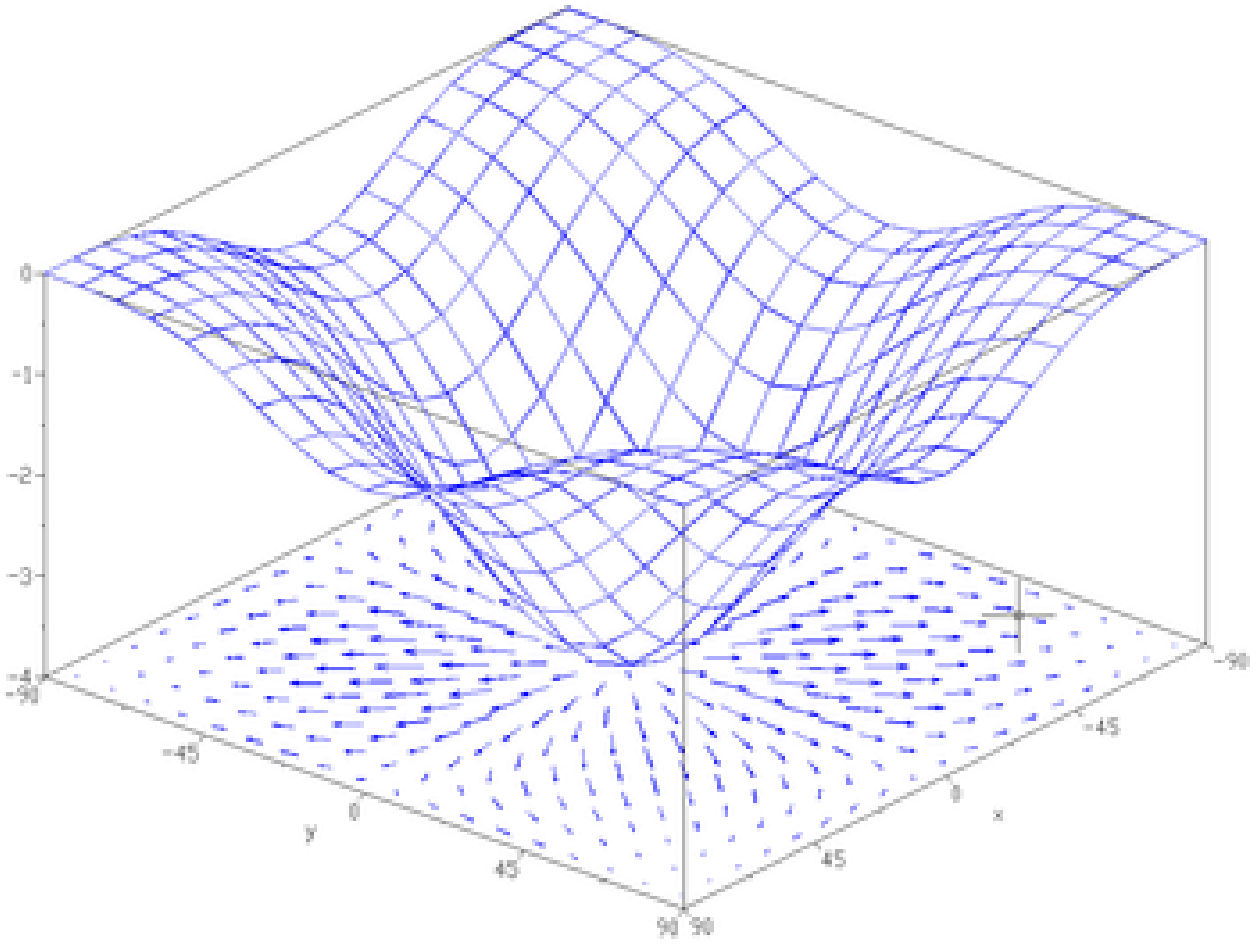
Intuice: $\nabla E(\vec{w})$ je vektor ve **váhovém prostoru**, který ukazuje směrem nejstrmějšího „růstu“ funkce $E(\vec{w})$. Vektory $\vec{x}_k$ zde slouží pouze jako parametry funkce $E(\vec{w})$ a jsou tedy fixní!

Fakt

Pokud $\nabla E(\vec{w}) = \vec{0} = (0, \ldots, 0)$, *pak* $\vec{w}$ *je globální minimum funkce* E.

Námi uvažovaná chybová funkce $E(\vec{w})$ má globální minimum, protože je konvexním paraboloidem.

Gradient - ilustrace



Pozor! Tento obrázek pouze ilustruje pojem gradientu, nezobrazuje chybovou funkci $E(\vec{w})$

ADALINE - adaptivní dynamika

Dávkový algoritmus (gradientní sestup):

- váhy v $\vec{w}^{(0)}$ jsou inicializovány náhodně blízko 0
- v kroku $t+1$ je $\vec{w}^{(t+1)}$ vypočteno takto:

$$\begin{aligned}\vec{w}^{(t+1)} &= \vec{w}^{(t)} - \varepsilon \cdot \nabla E(\vec{w}^{(t)}) \\ &= \vec{w}^{(t-1)} - \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p} \left(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k - d_k\right) \cdot \vec{x}_k\end{aligned}$$

Zde $k = (t \mod p) + 1$
a $0 < \varepsilon \leq 1$ je rychlost učení.

(Všimněte si, že tento algoritmus je téměř stejný jako pro perceptron, protože $\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k$ je hodnota funkce sítě (tedy $\sigma(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k)$ kde $\sigma(\xi) = \xi$).)

Tvrzení

Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ posloupnost $\vec{w}^{(0)}, \vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}, \ldots$ konverguje (po složkách) ke globálnímu minimu funkce E (tedy k vektoru $\vec{w}$, který splňuje $\nabla E(\vec{w}) = \vec{0}$).

ADALINE - adaptivní dynamika

Online algoritmus (Delta-rule, Widrow-Hoff rule):

- váhy v $\vec{w}^{(0)}$ jsou inicializovány náhodně blízko 0
- v kroku $t+1$ je $\vec{w}^{(t)}$ vypočteno takto:

$$\vec{w}^{(t+1)} = \vec{w}^{(t)} - \varepsilon(t) \cdot \left(\vec{w}^{(t)} \cdot \vec{x}_k - d_k\right) \cdot \vec{x}_k$$

kde $k = (t+1) \mod p$
a $0 < \varepsilon(t) \leq 1$ je rychlost učení v kroku $t+1$.

Všimněte si, že tento algoritmus nepracuje s celým gradientem, ale jenom s jeho částí, která přísluší právě zpracovávanému vzoru!

Věta (Widrow & Hoff)

Pokud $\varepsilon(t) = \frac{1}{t}$ *pak* $\vec{w}^{(0)}, \vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}, \ldots$ *konverguje ke globálnímu minimu chybové funkce E.*

ADALINE - klasifikace

- Množina **tréninkových vzorů** je

$$\mathcal{T} = \left\{\left(\vec{x}_1, d_1\right), \left(\vec{x}_2, d_2\right), \ldots, \left(\vec{x}_p, d_p\right)\right\}$$

  kde $\vec{x}_k = (x_{k0}, x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a $d_k \in \{1, -1\}$.
- Síť se natrénuje ADALINE algoritmem.
- Očekáváme, že bude platit následující:
  - jestliže $d_k = 1$, pak $\vec{w} \cdot \vec{x}_k \geq 0$
  - jestliže $d_k = -1$, pak $\vec{w} \cdot \vec{x}_k < 0$
- To nemusí vždy platit, ale často platí. Výhoda je, že se ADALINE algoritmus postupně stabilizuje i v neseparabilním případě (na rozdíl od perceptronového algoritmu).