IB112 Základy matematiky

Základy matematické logiky

Jan Strejček

Obsah

- *Výroková logika*
  - výrokové formule, pravdivostní ohodnocení a valuace
  - pravdivost a splnitelnost
  - normální formy
  - úplný systém spojek
  - axiomatický systém
- *Predikátová logika*
  - termy, kvantifikátory, predikátové formule
  - interpretace, valuace, pravdivost
  - axiomatický systém

Výroková logika

Výroky a výroková logika

Výroky

- = tvrzení
- = oznamovací věty, u které můžeme určit její pravdivost
- *složený výrok* je poskládán z *atomických výroků* a *spojek*
- Příklady:
  - venku prší (atomický výrok)
  - jestli budeš do osmi v pyžamu, tak bude pohádka (složený výrok)
- Výroky budeme označovat velkými písmeny $A, B, C, \ldots$

Výroková logika

- Popisuje, jak lze z výroků a logických spojek budovat další výroky.
- Zkoumá vztahy mezi pravdivostí různých výroků.

Logické spojky

= výrazy, kterými z výroků vyrábíme složené výroky

- Příklady: “není pravda, že A”, “A, ledaže by B”
- V matematické logice používáme jen vybrané spojky, jejichž význam se může mírně lišit od významu v běžném jazyce. Např. “půjdu tam dnes nebo tam půjdu zítra” chápeme tak, že nastane jen jedna eventualita.

notace	výraz v češtině	název
$\neg A$	“není pravda, že A”	*negace*
$A \wedge B$	“A a B”	*konjunkce*
$A \vee B$	“A nebo B”	*disjunkce*
$A \Rightarrow B$	“jestliže A, tak B”	*implikace*
$A \Leftrightarrow B$	“A právě tehdy, když B”	*ekvivalence*

Výrokové formule

- Výrokové formule mohou obsahovat pouze výrokové symboly (reprezentují výroky), logické spojky a závorky $($, $)$.

Definice (Výrokové formule)

Nechť $P = \{a, b, c, \ldots\}$ *je neprázdná množina výrokových symbolů.* *Výrokové formule nad* P *definujeme takto:*

1. *Každá výrokový symbol je výroková formule.*
2. *Jsou-li* A, B *výrokové formule, pak i* $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ *jsou výrokové formule.*
3. *Nic jiného není výroková formule.*

- Výrokové symboly nazýváme *atomické formule*.
- Ostatní výrokové formule se nazývají *složené*.

Poznámky

- Příklady výrokových formulí: $(a \Rightarrow (\neg b))$, $(\neg((\neg a) \vee b))$, $(a \wedge (b \Leftrightarrow (c \Rightarrow \neg a)))$, ...
- Odvození $((a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow (\neg a)))$:
  - a, b, c jsou formule dle bodu 1.
  - $(a \wedge b)$ a $(\neg a)$ jsou formule dle bodu 2.
  - $(c \Rightarrow (\neg a))$ je pak také formule dle bodu 2.
  - Konečně $((a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow (\neg a)))$ je také formule dle bodu 2.
- Závorky v zápisu formulí často vynecháváme, pokud tím není dotčena jednoznačnost. Např. píšeme $(a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow \neg a)$ namísto $((a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow (\neg a)))$.

Pravdivostní ohodnocení

- Pravdivost výrokové formule závisí pouze na pravdivosti atomických formulí, které se ve formuli vyskytují.
- Pravdivost atomických formulí je dána *pravdivostním ohodnocením*, pravdivost složených formulí je dána *valuací*.

Definice (Pravdivostní ohodnocení)

Pravdivostní ohodnocení (neboli interpretace) je funkce $I : P \to \{0, 1\}$ přiřazující každé atomické formuli pravdivostní hodnotu 1 (pravda) nebo 0 (nepravda).

- Pravdivostní hodnoty $1, 0$ se někdy také značí T, F.

Valuace

Definice (Valuace)

Nechť I je pravdivostní ohodnocení. Valuace I' je funkce přiřazující každé výrokové formuli A pravdivostní hodnotu 1 nebo 0 a splňující:

- *Je-li A atomická formule, pak $I'(A) = I(A)$.*
- *$I'(\neg A) = 1$ pokud $I'(A) = 0$ a $I'(\neg A) = 0$ pokud $I'(A) = 1$.*
- *$I'(A \wedge B) = 1$ pokud $I'(A) = I'(B) = 1$. Jinak $I'(A \wedge B) = 0$.*
- *$I'(A \vee B) = 0$ pokud $I'(A) = I'(B) = 0$. Jinak $I'(A \vee B) = 1$.*
- *$I'(A \Rightarrow B) = 0$ pokud $I'(A) = 1$ a $I'(B) = 0$. Jinak $I'(A \Rightarrow B) = 1$.*
- *$I'(A \Leftrightarrow B) = 1$ pokud $I'(A) = I'(B)$. Jinak $I'(A \Leftrightarrow B) = 0$.*

- Valuace je pravdivostním ohodnocením určena jednoznačně a je jeho rozšířením.
- Valuaci a pravdivostní ohodnocení tedy lze ztotožnit.

Pravdivost formule

Definice

Výroková formule A se nazývá

- *pravdivá při ohodnocení I, jestliže $I'(A) = 1$.*
- *pravdivá nebo tautologie, psáno $\models A$, pokud je pravdivá při všech ohodnoceních.*
- *kontradikce, pokud není pravdivá při žádném ohodnocení.*
- *splnitelná, pokud je pravdivá při nějakém ohodnocení.*

Formule A, B jsou ekvivalentní, psáno $A \equiv B$, pokud jsou pravdivé při stejných ohodnoceních.

Příklady

- tautologie: $a \vee \neg a$, $a \Rightarrow a$, $a \Leftrightarrow \neg\neg a$, $(a \wedge \neg a) \Rightarrow b$
- kontradikce: $a \wedge \neg a$, $a \Leftrightarrow \neg a$
- ekvivalentní formule: $a \Rightarrow b \ \equiv\ b \vee \neg a$

Příklad

Je formule $((a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow (\neg a)))$ pravdivá při ohodnocení $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 1$?

Příklad

Je formule $((a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow (\neg a)))$ pravdivá při ohodnocení $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 1$?

- $I'(a) = 1$, $I'(b) = 0$, $I'(c) = 1$
- $I'(a \wedge b) = 0$
- $I'(\neg a) = 0$
- $I'(c \Rightarrow (\neg a)) = 0$
- $I'((a \wedge b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow (\neg a))) = 1$
- Zadaná formule je při daném ohodnocení pravdivá.

Vybrané tautologie

Mnohé tautologie mají svoje názvy:

- komutativní zákony: $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$, $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$, …
- asociativní zákony: $((a \wedge b) \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \wedge c))$,…
- distributivní zákony: $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$,…
- zákon vyloučení třetího: $a \vee \neg a$
- zákon sporu: $\neg(a \wedge \neg a)$
- zákon totožnosti: $a \Rightarrow a$
- zákon dvojí negace: $a \Leftrightarrow \neg\neg a$
- idempotence: $(a \wedge a) \Leftrightarrow a$, $(a \vee a) \Leftrightarrow a$
- de Morganovy zákony: $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$, $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
- …

Věta o implikaci

Věta (Věta o implikaci, sémantický modus ponens)

Pokud platí $\models A$ *a* $\models A \Rightarrow B$*, pak platí* $\models B$.

Důkaz

Sporem. Nechť platí $\models A$ a $\models A \Rightarrow B$ a nechť B není tautologie. Označme I ohodnocení, v kterém B není pravdivé, t.j. $I'(B) = 0$. Jelikož A je tautologie, platí $I'(A) = 1$. Dohromady dostáváme $I'(A \Rightarrow B) = 0$ a proto $A \Rightarrow B$ není tautologie. To je spor. $\square$

Pravdivostní tabulka

- *Pravdivostní tabulka* zaznamenává pravdivost dané formule (a jejích podformulí) při všech ohodnoceních.
- Každý řádek tabulky odpovídá jednomu ohodnocení.
- Počet řádků tabulky je 2^n, kde n je počet různých atomických formulí v dané formuli.

Pravdivostní tabulka pro $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Využití pravdivostní tabulky

- Z pravdivostní tabulky lze dle výsledných pravdivostních hodnot pro danou formuli snadno určit, zda je formule:
  - tautologie - ve všech řádcích je pravdivostní hodnota 1
  - kontradikce - ve všech řádcích je pravdivostní hodnota 0
  - splnitelná - v nějakém řádku je pravdivostní hodnota 1
- Srovnáním dvou pravdivostních tabulek snadno rozhodneme i ekvivalenci formulí.
- Jelikož existuje algoritmus rozhodující zda je výroková formule pravdivá, říkáme, že výroková logika je *rozhodnutelná*.

Příklad

- Sestrojte pravdivostní tabulku pro formuli $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.
- Rozhodněte, zda je formule tautologie, kontradikce, splnitelná a zda je ekvivalentní formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$.

a	b	c	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Příklad

- Sestrojte pravdivostní tabulku pro formuli $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.
- Rozhodněte, zda je formule tautologie, kontradikce, splnitelná a zda je ekvivalentní formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$.

a	b	c	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Příklad

- Sestrojte pravdivostní tabulku pro formuli $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.
- Rozhodněte, zda je formule tautologie, kontradikce, splnitelná a zda je ekvivalentní formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$.

a	b	c	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

- Není tautologie ani kontradikce, je splnitelná a není ekvivalentní formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$.

Disjunktivní normální forma (DNF)

- Jelikož je disjunkce asociativní, tedy $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$, píšeme pouze $A \vee B \vee C$. Podobně lze psát i $A \wedge B \wedge C$.

Definice (Literál, konjunktivní klauzule, DNF)

Literál je atomická formule nebo její negace. Konjunktivní klauzule je konjunkce libovolného konečného počtu literálů. Formule A je v disjunktivní normální formě (DNF), je-li to jedna klauzule nebo disjunkce konečně mnoha konjunktivních klauzulí.

Příklady

- literály: $a, b, \neg a, \neg c$
- konjunktivní klauzule: $(a \wedge \neg c \wedge b), (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg b \wedge d)$
- formule v DNF: $(a \wedge \neg c \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg b \wedge d) \vee (\neg d)$

Disjunktivní normální forma (DNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v DNF.

Ekvivalentní formule v DNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule pravdivá, přidáme do vytvářené formule v DNF jednu konjunktivní klauzuli, která bude pro každý pravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý nepravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Není-li formule pravdivá v žádném ohodnocení, pak je to kontradikce a je ekvivalentní kontradikci $(a \wedge \neg a)$ a ta je v DNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunktivní normální forma (DNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v DNF.

Ekvivalentní formule v DNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule pravdivá, přidáme do vytvářené formule v DNF jednu konjunktivní klauzuli, která bude pro každý pravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý nepravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Není-li formule pravdivá v žádném ohodnocení, pak je to kontradikce a je ekvivalentní kontradikci $(a \wedge \neg a)$ a ta je v DNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$	
1	1	0	
1	0	1	$\rightsquigarrow (a \wedge \neg b)$
0	1	1	
0	0	0	

Disjunktivní normální forma (DNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v DNF.

Ekvivalentní formule v DNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule pravdivá, přidáme do vytvářené formule v DNF jednu konjunktivní klauzuli, která bude pro každý pravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý nepravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Není-li formule pravdivá v žádném ohodnocení, pak je to kontradikce a je ekvivalentní kontradikci $(a \wedge \neg a)$ a ta je v DNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$	
1	1	0	
1	0	1	$\rightsquigarrow (a \wedge \neg b)$
0	1	1	$\rightsquigarrow (\neg a \wedge b)$
0	0	0	

Disjunktivní normální forma (DNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v DNF.

Ekvivalentní formule v DNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule pravdivá, přidáme do vytvářené formule v DNF jednu konjunktivní klauzuli, která bude pro každý pravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý nepravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Není-li formule pravdivá v žádném ohodnocení, pak je to kontradikce a je ekvivalentní kontradikci $(a \wedge \neg a)$ a ta je v DNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$	
1	1	0	
1	0	1	$\rightsquigarrow (a \wedge \neg b)$
0	1	1	$\rightsquigarrow (\neg a \wedge b)$
0	0	0	

Celkem:

$(a \Leftrightarrow \neg b) \equiv$
$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$

Konjunktivní normální forma (CNF)

- Definice CNF je analogická definici DNF, akorát konjunkce a disjunkce se prohodí.

Definice (klauzule, CNF)

(Disjunktivní) klauzule je disjunkce libovolného konečného počtu literálů. Formule A je v konjunktivní normální formě (CNF), je-li to jedna klouzule nebo disjunkce konečně mnoha klauzulí.

Příklady

- klauzule: $(a \vee \neg c \vee b), (\neg a \vee \neg c \vee \neg b \vee d)$
- formule v CNF: $(a \vee \neg c \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg b \vee d) \wedge (\neg d)$

Konjunktivní normální forma (CNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v CNF.

Ekvivalentní formule v CNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule nepravdivá, přidáme do vytvářené formule v CNF jednu klauzuli, která bude pro každý nepravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý pravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Je-li formule pravdivá při všech ohodnoceních, je to tautologie a je ekvivalentní tautologii $(a \vee \neg a)$ a ta je v CNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Konjunktivní normální forma (CNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v CNF.

Ekvivalentní formule v CNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule nepravdivá, přidáme do vytvářené formule v CNF jednu klauzuli, která bude pro každý nepravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý pravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Je-li formule pravdivá při všech ohodnoceních, je to tautologie a je ekvivalentní tautologii $(a \vee \neg a)$ a ta je v CNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\rightsquigarrow (\neg a \vee \neg b)$

Konjunktivní normální forma (CNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v CNF.

Ekvivalentní formule v CNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule nepravdivá, přidáme do vytvářené formule v CNF jednu klauzuli, která bude pro každý nepravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý pravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Je-li formule pravdivá při všech ohodnoceních, je to tautologie a je ekvivalentní tautologii $(a \vee \neg a)$ a ta je v CNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$	
1	1	0	$\rightsquigarrow (\neg a \vee \neg b)$
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	$\rightsquigarrow (a \vee b)$

Konjunktivní normální forma (CNF)

Věta

Ke každé výrokové formuli existuje ekvivalentní formule v CNF.

Ekvivalentní formule v CNF lze sestrojit z pravdivostní tabulky:

- Pro každé ohodnocení, kde je formule nepravdivá, přidáme do vytvářené formule v CNF jednu klauzuli, která bude pro každý nepravdivý atomický výrok a obsahovat literál a a pro každý pravdivý atomický výrok b literál $\neg b$.
- Je-li formule pravdivá při všech ohodnoceních, je to tautologie a je ekvivalentní tautologii $(a \vee \neg a)$ a ta je v CNF.

a	b	$(a \Leftrightarrow \neg b)$	
1	1	0	$\rightsquigarrow (\neg a \vee \neg b)$
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	$\rightsquigarrow (a \vee b)$

Celkem:
$(a \Leftrightarrow \neg b) \;\equiv$
$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)$

Pravdivostní funkce

- Význam výrokových formulí lze také definovat pomocí *pravdivostních funkcí*.

Definice (Pravdivostní funkce)

Pravdivostní funkce arity n je funkce $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

- Pravdivostní funkce každé n-tici pravdivostních hodnot přiřadí jednu pravdivostní hodnotu.
- Každá formule s n (uspořádanými) atomickými formulemi jednoznačně určuje pravdivostní funkci arity n.
- Např. $a \wedge b$ odpovídá binární pravdivostní funkci $f(x, y) = x \cdot y$.

Pravdivostní funkce

- Pravdivostní funkci lze zapsat tabulkou.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- Lze každou pravdivostní funkci vyjádřit pomocí výrokové formule?

Pravdivostní funkce

- Pravdivostní funkci lze zapsat tabulkou.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- Lze každou pravdivostní funkci vyjádřit pomocí výrokové formule?
- Ano. Formuli sestrojíme z tabulky stejně, jako jsme z tabulky vytvořili formuli v DNF (nebo CNF).

Úplný systém spojek

Definice (Úplný systém spojek)

Množinu logických spojek nazveme úplný systém spojek, pokud lze každou pravdivostní funkci vyjádřit pomocí výrokové formule používající pouze spojky z dané množiny.

- Jelikož lze každou pravdivostní funkci popsat formulemi v DNF i v CNF, je množina $\{\wedge, \vee, \neg\}$ úplným systémem spojek.
- Protože platí $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ lze každou konjunkci vyjádřit pomocí $\vee, \neg$. Proto je úplný i systém $\{\vee, \neg\}$.
- Podobně $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ a proto je úplný i systém $\{\wedge, \neg\}$.
- $\{\Rightarrow, \neg\}$ je také úplný systém.
- Existuje jednoprvkový úplný systém spojek?

Další logické spojky

a	b	a *xor* b	a *nand* b	a *nor* b
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

- *XOR - exclusive or*, $A\,xor\,B \;\equiv\; \neg(A \Leftrightarrow B)$
- *NAND - Shefferova funkce*, $A\,nand\,B \;\equiv\; \neg(A \wedge B)$
- *NOR - Nicodova funkce*, $A\,nor\,B \;\equiv\; \neg(A \vee B)$
- $\{nand\}$ i $\{nor\}$ tvoří úplné jednoprvkové systémy spojek.
- Všechny tři spojky jsou v informatice významné.

Množiny formulí a vyplývání

Definice (Splnitelnost, model, vyplývání)

Nechť T je množina výrokových formulí. Množina T je splnitelná, pokud existuje ohodnocení, při kterém jsou pravdivé všechny formule z T. Takové ohodnocení se nazývá model množiny T.

Formule A logicky vyplývá z množiny T, psáno $T \models A$, pokud je A pravdivá v každém modelu množiny T.

- $T \models A$ také čteme jako A je *logickým důsledkem* T.
- Z nesplnitelné množiny T vyplývá libovolná formule.
- Splnitelnost konečné množiny klauzulí T lze rozhodnout pomocí pravdivostní tabulky obsahující sloupce pro všechny formule z T. Platnost $T \models A$ lze rozhodnout analogicky.

Příklad

Zjistěte, zda je množina formulí $T = \{\neg b \vee a, \neg a \vee c\}$ splnitelná a zda je jejím důsledkem formule $b \Rightarrow c$.

a	b	c	$\neg b \vee a$	$\neg a \vee c$	$b \Rightarrow c$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Příklad

Zjistěte, zda je množina formulí $T = \{\neg b \vee a, \neg a \vee c\}$ splnitelná a zda je jejím důsledkem formule $b \Rightarrow c$.

a	b	c	$\neg b \vee a$	$\neg a \vee c$	$b \Rightarrow c$
0	0	0	1	1	
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	

- T je splnitelná.

Příklad

Zjistěte, zda je množina formulí $T = \{\neg b \vee a, \neg a \vee c\}$ splnitelná a zda je jejím důsledkem formule $b \Rightarrow c$.

a	b	c	$\neg b \vee a$	$\neg a \vee c$	$b \Rightarrow c$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

- T je splnitelná.
- $b \Rightarrow c$ je důsledkem T.

Věta o dedukci a lemma o neutrální formuli

Věta (Věta o dedukci, sémantická varianta)

Buď T *množina výrokových formulí. Pak platí* $T \models A \Rightarrow B$ *právě když* $T \cup \{A\} \models B$.

Věta (Lemma o neutrální formuli, sémantická varianta)

Buď T *množina výrokových formulí. Pokud platí* $T \cup \{A\} \models B$ *a* $T \cup \{\neg A\} \models B$, *pak i* $T \models B$.

Formální systémy

- Pravdivost formulí lze zkoumat i na základě jejich syntaxe (bez interpretací, bez pravdivostních tabulek).

Formální systém

- umožňuje k formulím budovat *důkazy*
- skládá se z
  - *axiomů* - tvrzení, jejichž pravdivost přijmeme bez důkazu
  - *odvozovacích pravidel* - konstrukce umožňující vytvářet důkazy
- může být
  - *axiomatický* - méně pravidel, více axiomů
  - *předpokladový* - více pravidel, méně axiomů

- Ukážeme axiomatický systém pro výrokovou logiku využívajících pouze spojek $\Rightarrow$ a $\neg$.

Axiomatický systém

Axiomy

(A1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(A2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(A3) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Odvozovací pravidlo

(P1) Z A a $A \Rightarrow B$ plyne B.

- A, B, C jsou libovolné výrokové formule.
- Odvozovací nebo také *inferenční pravidlo* (P1) se nazývá *pravidlo odloučení* nebo *modus ponens*.
- V (P1) se formule A a $A \Rightarrow B$ nazývají *předpoklady*, B se pak nazývá *závěr*.
- (P1) se často zapisuje jako $\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$.

Důkaz

Definice (Důkaz)

Konečnou posloupnost $A_1, A_2, \dots, A_n$ *výrokových formulí nazveme* ***důkazem*** *formule* A_n*, pokud pro každé* $i \leq n$ *je* A_i *buď axiomem nebo závěrem odvozovacího pravidla, jehož předpoklady jsou mezi formulemi* $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$*.*

Výroková formule A *je* ***dokazatelná****, psáno* $\vdash A$*, pokud existuje důkaz formule* A*.*

Příklad

Dokažte $\vdash A \Rightarrow A$.

Příklad

Dokažte $\vdash A \Rightarrow A$.

Řešení

Důkazem je posloupnost

$A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$,
$(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$,
$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$, $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$, $A \Rightarrow A$.

Označíme-li formule v posloupnosti $A_1, A_2, \dots A_5$, pak

- A_1 je (A1) pro volbu $A, A \Rightarrow A$ za A, B,
- A_2 je (A2) pro volbu $A, A \Rightarrow A, A$ za A, B, C,
- A_3 je závěr (P1) s předpoklady A_1, A_2,
- A_4 je (A1) pro volbu A, A za A, B,
- A_5 je závěr (P1) s předpoklady A_3, A_4.

Zobecnění dokazatelnosti

Definice

*Nechť T je množina výrokových formulí. Konečnou posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_n$ výrokových formulí nazveme **důkazem formule A_n z T**, pokud pro každé $i \leq n$ je A_i buď axiomem, prvkem T nebo závěrem odvozovacího pravidla, jehož předpoklady jsou mezi formulemi $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$. Píšeme $T \vdash A_n$*

- $\vdash A$ je totéž jako $\emptyset \vdash A$.
- Místo $\{A\} \vdash B$ píšeme pouze $A \vdash B$.

Věta o dedukci a lemma o neutrální formuli

Věta (Věta o dedukci)

Buď T množina výrokových formulí. Pak platí $T \vdash A \Rightarrow B$ právě když $T \cup \{A\} \vdash B$.

Důkaz

1. Směr "$\Longrightarrow$". Platí-li $T \vdash A \Rightarrow B$, pak existuje důkaz $A_1, A_2, \ldots, A_n, A \Rightarrow B$ formule $A \Rightarrow B$ z T. Pak ale $A_1, A_2, \ldots, A_n, A \Rightarrow B, A, B$ je důkaz formule B z $T \cup \{A\}$.
2. Důkaz "$\Longleftarrow$" je komplikovanější... $\square$

Příklad

Platí

1. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$,
2. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$,
3. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,
4. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$,
5. $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Důkaz

Ukážeme (1), ostatní se lze dokázat podobně.

- Z (A1) plyne $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
- Z Věty o dedukci dostáváme $\neg A \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$.
- Z (A3) plyne $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
- Pomocí modus ponens tedy dostáváme $\neg A \vdash A \Rightarrow B$.
- Z Věty o dedukci dostaneme $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. $\square$

Vlastnosti axiomatického systému

Věta (Lemma o neutrální formuli)

Buď T množina výrokových formulí. Pokud platí $T \cup \{A\} \vdash B$ a $T \cup \{\neg A\} \vdash B$, pak i $T \vdash B$.

Důkaz

Postupně dokážeme

1. $T \vdash \neg A \Rightarrow B$ z Věty o dedukci,
2. $T \vdash \neg B \Rightarrow \neg\neg A$ aplikací (P1) na (3) v předchozím příkladu a (1),
3. $T \cup \{\neg B\} \vdash \neg\neg A$ z Věty o dedukci,
4. $T \cup \{\neg B\} \vdash A$ aplikací (P1) na (2) v předchozím příkladu a (3),
5. $T \vdash A \Rightarrow B$ z předpokladů a Věty o dedukci,
6. $T \cup \{\neg B\} \vdash B$ z (P1) a předcházejících dvou tvrzení,
7. $T \vdash \neg B \Rightarrow B$ z Věty o dedukci,
8. $T \vdash B$ aplikací (P1) na (5) v předchozím příkladu a (7). $\square$

Korektnost a úplnost

Věta (Korektnost a úplnost)

Nechť T je množina výrokových formulí a A je výroková formule. Pak platí $T \vdash A$ právě tehdy, když $T \models A$.

- Implikace "$\Longrightarrow$" se nazývá *korektnost* (co dokážeme to platí).
- K důkazu korektnosti stačí ukázat, že (A1), (A2) i (A3) jsou pravdivé a že (P1) z pravdivých předpokladů odvodí vždy pravdivý závěr.
- Implikace "$\Longleftarrow$" se nazývá *úplnost* (dokážeme vše, co platí).

- Existují i další formální systémy pro výrokovou logiku (např. *Gentzenovský systém*).

Predikátová logika

Predikátová logika

- Rozšiřuje výrokovou logiku.
- Umožňuje přesněji popsat výrok a díky tomu odvodit logická vyplývání, která ve výrokové logice odvodit nelze:
  - Každý člověk je smrtelný.
  - Sokrates je člověk.
  - Sokrates je smrtelný.

  - Výroky označíme postupně a, b, c. Ve výrokové logice nelze odvodit logické vyplývání c z a, b, přestože c zjevně je důsledkem a, b.

Jazyk predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky se zkládá z těchto symbolů:

- *proměnné*: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- *logické spojky*: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- *kvantifikátory*: $\forall$ (pro všechna), $\exists$ (existuje)
- *rovnost*: $=$
- *závorky*: $(,)$
- *relační* neboli *predikátové symboly*: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- *funkční symboly*: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$

- Každý predikátový symbol má pevně danou arity $n > 0$.
- Každý funkční symbol má pevně danou aritu $n \geq 0$ (počet argumentů).
- Funkce s aritou 0 se nazývají *konstanty* a značí se $a, b, c, \ldots$.

Konstanty, proměnné a funkce

- Konstanty, proměnné i funkce slouží k označení *objektů*.
- Objekty jsou prvky dané množiny objektů nazývané *doména* nebo *univerzum*.
- Konstanty jsou vlastně jména objektů.
- Proměnné zastupují libovolné objekty.
- Pomocí funkcí vytváříme složená jména objektů.

Příklad

- Uvažujme doménu nezáporných celých čísel.
- Konstanty jsou např. $0, 1, 42$.
- Příkladem binární funkce (funkce arity 2) je $+$.
- Složené jméno objektu 3 je například $1 + 2$ nebo $(1 + 1) + 1$.
- Složené jméno objektu je i $x + 2$ nebo $(x + 2) + (z + x)$.

Termy

- Termy jsou všechna možná označení objektů.

Definice (Termy)

Termy definujeme takto:

1. *Každá proměnná je term.*
2. *Je-li f funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak i $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je term.*
3. *Nic jiného není term.*

- Z bodu (2) plyne, že konstanty (nulární funkce) jsou také termy.
- Příklady termů: $a, 0, x, f(x, 0, a), f(g(a, 0), 2, h(h(y)))$

Predikát

- Nulární predikát je výrok (jako ve výrokové logice).
- Unární predikát
  - popisuje vlastnost objektu,
  - odpovídá výroku, ze kterého odstraníme označení jednoho objektu.
  - Příklad: Predikát P odpovídá pojmu "být smrtelný"
    "Objekt x je smrtelný" $\rightsquigarrow$ $P(x)$
    "Sokrates je smrtelný" $\rightsquigarrow$ $P(\mathit{Sokrates})$
- Binární predikát
  - popisuje vztah mezi dvěma objekty.
  - Příklad: "x je násobek y" $\rightsquigarrow$ $Q(x, y)$
    "$x + 3$ je násobek 2" $\rightsquigarrow$ $Q(x + 3, 2)$
    "x je menší než 7" $\rightsquigarrow$ $x < 7$ (infixová notace)
- Predikát arity n popisuje vztah mezi n objekty.

Kvantifikátory

$\forall$ - **univerzální** neboli **obecný kvantifikátor**

- $(\forall x)P(x)$ říká, že pro všechny objekty x z domény platí $P(x)$.
- Pro konečnou doménu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je $(\forall x)P(x)$ ekvivalentní formuli $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

$\exists$ - **existenciální kvantifikátor**

- $(\exists x)P(x)$ říká, že existuje (alespoň jeden) objekt x z domény, pro který platí $P(x)$ (neboli $P(x)$ platí pro některé objekty x).
- Pro konečnou doménu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je $(\exists x)P(x)$ ekvivalentní formuli $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

Příklad

- Nechť P odpovídá pojmu "být smrtelný".
- Uvažujme doménu všech lidí.
- $(\forall x)P(x)$ říká, že všichni lidé jsou smrtelní.
- $(\exists x)P(x)$ říká, že existuje smrtelný člověk (neboli někteří lidé jsou smrtelní).

Predikátové formule

Definice (Predikátové formule)

Atomické predikátové formule definujeme takto:

1. *Nechť P je predikátový symbol arity n a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy. Pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je atomická predikátová formule.*
2. *Jsou-li t_1, t_2 termy, pak $t_1 = t_2$ je atomická predikátová formule.*
3. *Nic jiného není atomická predikátová formule.*

Predikátové formule definujeme takto:

1. *Každá atomická predikátová formule je predikátová formule.*
2. *Jsou-li φ, ψ predikátové formule, pak i $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \Rightarrow \psi, \varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou predikátové formule.*
3. *Je-li x proměnná a φ predikátová formule, pak $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ jsou predikátové formule.*
4. *Nic jiného není predikátová formule.*

Příklady

Příklad

- $\mathbb{N}_0$ s elementární aritmetikou: konstanta 0, unární funkce následník s, binární funkce $+, *$
- termy: $s(0)$ reprezentuje 1, $s(x) + s(s(0))$ reprezentuje $(x + 1) + 2$
- $(\forall x)\, 0 * x = 0$ ...nula krát cokoliv je nula
- $(\forall x)\, s(0) * x = x$ ...jedna krát libovolné číslo je totéž číslo
- $\neg(\exists x)\, s(x) = 0$ ...v dané doméně nemá nula předchůdce

Příklad

- Nechť R je binární predikát reprezentující binární relaci.
- $(\forall x)\, R(x, x)$ ...R je reflexivní
- $(\forall x)(\forall y)\, (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$ ...R je symetrická
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\, ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$ ...R je tranzitivní

Vázaný a volný výskyt proměnných

- *Podformule* formule φ je každá souvislá část φ, která je také formulí.
- Podformule ψ ve formulích $(\forall x)\psi$ a $(\exists x)\psi$ se nazývá *oborem* nebo *rozsahem* kvantifikátoru $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$.
- Výskyt proměnné x ve formuli φ je *vázaný*, je-li v rozsahu nějakého kvantifikátoru $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$.
- Výskyty, které nejsou vázané, jsou *volné*.
- Příklad: $((\forall x)(\exists y)P(x, y, z)) \Rightarrow R(x, z)$ ... vázaný/volný výskyt
- Proměnná se nazývá *volná* (resp. *vázaná*), existuje-li v dané formuli její *volný* (resp. *vázaný*) výskyt.
- Formule bez volných proměnných se nazývá *sentence* neboli *uzavřená formule*.
- Formule bez kvantifikátorů se nazývá *otevřená formule*.
- Zápis $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ označuje formuli φ a zdůrazňuje, že všechny volné proměnné formule φ jsou mezi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sémantika predikátové logiky

K definici sémantiky potřebujeme určit množinu objektů (doménu) a dále dát význam funkčním a predikátovým symbolům. Proměnným je třeba přiřadit objekty.

Definice (Realizace/interpretace)

Realizace neboli interpretace I jazyka predikátové logiky je struktura obsahující

- *neprázdnou množinu D zvanou doména nebo univerzum,*
- *funkci $I(f) : D^n \to D$ pro každý n-ární funkční symbol f,*
- *relaci $I(P) \subseteq D^n$ pro každý n-ární relační symbol P.*

Definice (Ohodnocení/valuace proměnných)

Ohodnocení neboli valuace proměnných je zobrazení V přiřazující každé proměnné prvek domény D.

Příklad

- Uvažme jazyk predikátové logiky obsahující:
  - konstantu 0
  - unární funkci s
  - binární funkce $+, *$
  - binární relaci $<$
- Standardní interpretace I tohoto jazyka:
  - doména $\mathbb{N}_0$
  - $I(0)$ je číslo 0
  - $I(s)(n) = n + 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$
  - $I(+), I(*)$ jsou operace sčítání a násobení na $\mathbb{N}_0$
  - $I(<)$ je relace "menší než" na $\mathbb{N}_0$
- Nestandardní, ale taky možná interpretace I':
  - doména $D = \{a, b\}$
  - $I'(0)$ je prvek a
  - $I'(s)(a) = b$, $I'(s)(b) = a$
  - $I'(+)(x, y) = a$, $I'(*)(x, y) = y$ pro všechna $x, y \in \{a, b\}$
  - $I'(<) = \{(a, b), (a, a)\}$

Sémantika predikátové logiky

Definice (Hodnota termu)

Hodnotou termu t *při interpretaci* I *a valuaci* V *rozumíme prvek* $|t|_{I,V}$ *domény* D *definovaný dle tvaru termu takto:*

- *Je-li* t *proměnná* x*, pak* $|t|_{I,V} = V(x)$*.*
- *Je-li* t *tvaru* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$*, pak* $|t|_{I,V} = I(f)\,(|t_1|_{I,V}, |t_2|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V})$*.*

- Hodnota proměnné je tedy přímo dána valuací této proměnné.
- Hodnotu termu $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ získáme tak, že vezmeme hodnoty termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a na tyto hodnoty aplikujeme funkci $I(f)$ přiřazenou symbolu f interpretací I.
- Hodnota termu závisí pouze na valuaci proměnných, které se v termu vyskytují.

Příklad

Určete hodnotu termu $s(s(0)) * s(x + s(0))$ při dříve definované interpretaci I a valuaci $V(x) = 7$.

Příklad

Určete hodnotu termu $s(s(0)) * s(x + s(0))$ při dříve definované interpretaci I a valuaci $V(x) = 7$.

- $|0|_{I,V} = I(0) = 0$
- $|s(0)|_{I,V} = I(s)(|0|_{I,V}) = I(s)(0) = 0 + 1 = 1$
- $|s(s(0))|_{I,V} = I(s)(|s(0)|_{I,V}) = I(s)(1) = 1 + 1 = 2$
- $|s(x + s(0))|_{I,V} = I(s)(V(x) + 1) = I(s)(7 + 1) = 8 + 1 = 9$
- $|s(s(0)) * s(x + s(0))|_{I,V} = |s(s(0))|_{I,V} \cdot |s(x + s(0))|_{I,V} = 2 \cdot 9 = 18$

Příklad

Určete hodnotu termu $s(s(0)) * s(x + s(0))$ při dříve definované interpretaci I a valuaci $V(x) = 7$.

- $|0|_{I,V} = I(0) = 0$
- $|s(0)|_{I,V} = I(s)(|0|_{I,V}) = I(s)(0) = 0 + 1 = 1$
- $|s(s(0))|_{I,V} = I(s)(|s(0)|_{I,V}) = I(s)(1) = 1 + 1 = 2$
- $|s(x + s(0))|_{I,V} = I(s)(V(x) + 1) = I(s)(7 + 1) = 8 + 1 = 9$
- $|s(s(0)) * s(x + s(0))|_{I,V} = |s(s(0))|_{I,V} \cdot |s(x + s(0))|_{I,V} = 2 \cdot 9 = 18$

Totéž při interpretaci I' a valuaci $V'(x) = b$.

Příklad

Určete hodnotu termu $s(s(0)) * s(x + s(0))$ při dříve definované interpretaci I a valuaci $V(x) = 7$.

- $|0|_{I,V} = I(0) = 0$
- $|s(0)|_{I,V} = I(s)(|0|_{I,V}) = I(s)(0) = 0 + 1 = 1$
- $|s(s(0))|_{I,V} = I(s)(|s(0)|_{I,V}) = I(s)(1) = 1 + 1 = 2$
- $|s(x + s(0))|_{I,V} = I(s)(V(x) + 1) = I(s)(7 + 1) = 8 + 1 = 9$
- $|s(s(0)) * s(x + s(0))|_{I,V} = |s(s(0))|_{I,V} \cdot |s(x + s(0))|_{I,V} = 2 \cdot 9 = 18$

Totéž při interpretaci I' a valuaci $V'(x) = b$.

- $|s(x + s(0))|_{I',V'} = I'(s)(a) = b$
- $|s(s(0)) * s(x + s(0))|_{I',V'} = b$

Sémantika predikátové logiky

$V[x/d]$ značí valuaci lišící se od V pouze tím, že proměnné x přiřazuje prvek d.

Definice (Pravdivost predikátové formule)

Formule φ je pravdivá při interpretaci I a valuaci V, psáno $I, V \models \varphi$, pokud φ je tvaru

- $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *a* $(|t_1|_{I,V}, |t_2|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}) \in I(P)$,
- $t_1 = t_2$ *a* $|t_1|_{I,V} = |t_2|_{I,V}$
- $\neg\psi$ *a* $I, V \not\models \psi$,
- $\psi_1 \vee \psi_2$ *a* $I, V \models \psi_1$ *nebo* $I, V \models \psi_2$,
- $\psi_1 \wedge \psi_2$ *a* $I, V \models \psi_1$ *a* $I, V \models \psi_2$,
- $\psi_1 \Rightarrow \psi_2$ *a* $I, V \not\models \psi_1$ *nebo* $I, V \models \psi_2$,
- $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ *a* $I, V \models \psi_1$ *a* $I, V \models \psi_2$, *nebo* $I, V \not\models \psi_1$ *a* $I, V \not\models \psi_2$,
- $(\forall x)\psi$ *a* $I, V[x/d] \models \psi$ *pro každé* d *z domény* D.
- $(\exists x)\psi$ *a* $I, V[x/d] \models \psi$ *pro nějaké* d *z domény* D.

Pravdivost formule

- Snadno se ověří, že pravdivost formule φ při interpretaci I a valuaci V záleží pouze na valuaci proměnných, které jsou volné ve φ a na interpretaci symbolů použitých ve formuli φ.
- Z toho okamžitě plyne, že pravdivost sentencí vůbec nazáleží na valuaci.

Definice

Predikátová formule φ se nazývá

- *pravdivá při interpretaci I, psáno $I \models \varphi$, jestliže φ je pravdivá při interpretaci I a všech valuacích V.*
- *pravdivá nebo tautologie, psáno $\models \varphi$, jestliže je pravdivá při všech interpretacích.*
- *splnitelná, jestliže je pravdivá při nějaké interpretaci.*

Příklad

Zjistěte, zda je formule $\varphi = (\forall x)\, x < s(x)$ splnitelná nebo dokonce tautologie.

Příklad

Zjistěte, zda je formule $\varphi = (\forall x)\, x < s(x)$ splnitelná nebo dokonce tautologie.

- Uvažme dříve uvedené interpretace I a I'.
- Formule φ je splnitelná, neboť například $I \models \varphi$.
- Formule φ není tautologie, neboť například $I' \not\models \varphi$ (formule $x < s(x)$ není pravdivá při I' a $V'(x) = b$).

Vymyslete nějakou tautologii nad daným jazykem predikátové logiky.

Vybrané tautologie

- de Morganovy zákony pro kvantifikátory:
  $\neg(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$, $\neg(\exists x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$
- zaměnitelnost kvantifikátorů stejného typu:
  $(\forall x)(\forall y)\varphi(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x, y)$,
  $(\exists x)(\exists y)\varphi(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x, y)$
- distributivita kvantifikátorů:
  $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
  $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$
- redukce univerzálního kvantifikátoru:
  $(\forall x)(\forall y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y)\varphi(y, y)$
- $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$
- ...

Teorie, model, důsledek

Definice (Teorie, model, důsledek)

Množina sentencí T se nazývá teorie. Interpretace I se nazývá model teorie T, jestliže $I \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$. Formule ψ logicky vyplývá z teorie T (ψ je důsledkem T), psáno $T \models \psi$, pokud je ψ pravdivá v každém modelu teorie T. Teorie T je sporná, pokud nemá žádný model. V opačném případě je teorie bezesporná.

Příklad

- Formální zápis Sokratovy úvahy:

$$\{(\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x)), C(Sokrates)\} \models S(Sokrates)$$

Příklad teorie - Peanova aritmetika

- *Peanova aritmetika* popisuje základy teorie čísel.
- Jazyk obsahuje konstantu 0, unární funkční symbol s (následník), binární funkční symboly $+$ a $*$.

- $(\forall x)\neg(0 = s(x))$
- $(\forall x)(\forall y)(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- $(\forall x)\, x + 0 = x$
- $(\forall x)(\forall y)\, x + s(y) = s(x + y)$
- $(\forall x)\, x * 0 = 0$
- $(\forall x)(\forall y)\, x * s(y) = x * y + x$
- $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\Big(\varphi(0, x_1, \dots, x_n) \wedge$
  $\wedge\ (\forall x_0)\big(\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow\ \varphi(s(x_0), x_1, \dots, x_n)\big)\ \Rightarrow$
  $\Rightarrow\ (\forall x_0)\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)\Big)$ …*princip indukce*

Axiomatický systém predikátové logiky

Axiomy

(A1) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

(A2) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \rho)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \rho))$

(A3) $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$

(A4) *axiom kvantifikátoru*
$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \;\Rightarrow\; (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$, pokud x není volná ve φ

(A5) *axiom substituce*
$(\forall x)\varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(t)$, kde $\varphi(t)$ vznikne z φ dosazením t za všechny volné výskyty x

(A6) *axiomy rovnosti*

- $x = x$
- $x = y \;\Rightarrow\; f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
- $x = y \;\Rightarrow\; P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \Rightarrow P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Axiomatický systém predikátové logiky

Odvozovací pravidla

(P1) Z φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ plyne ψ.

(P2) Z φ plyne $(\forall x)\varphi$

- ($P2$) se nazývá *pravidlo zobecnění* nebo *pravidlo generalizace*.
- Pojmy *dokazatelnosti*, psáno $\vdash \varphi$, a *dokazatelnosti z teorie* T, psáno $T \vdash \varphi$, se definují podobně jako ve výrokové logice.

Věta (Gödelova věta o úplnosti)

Pro libovolnou predikátovou formuli φ platí $\models \varphi$ právě když $\vdash \varphi$.

Poznámky

- V predikátové logice prvního řádu lze kvantifikovat pouze přes proměnné.
- V logice druhého řádu lze kvantifikovat i přes predikátové symboly.