Řešený příklad na rekurencí zadané posloupnosti (12. týden, Jaroslav Šeděnka)

Zadání: Najděte nekonečnou posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ zadanou rekurencí:

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1$$

s počátečními podmínkami $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Řešení (pomocí charakteristického polynomu): První vyřešíme *homogenní rekuretní rovnici* (bez absolutního člene)

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

U lineární homogenní rekurence (tj. bez vyšších mocnin a_k a bez absolutního člene) hledáme řešení tvaru $a_n = c\lambda^n$ pro $c \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$. Po dosazení λ^n za a_n dostaneme rovnici

$$\lambda^n = 4\lambda^{n-1} - 3\lambda^{n-2}$$

Charakteristický polynom je tedy

$$\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

Kromě triviálního řešení $\lambda_0 = 0$ můžeme ještě vyřešit kvadratickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ a získáme kořeny $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Obecné řešení homogenní rekurence je tedy

$$a_n = c_1(1^n) + c_2(3^n) = c_1 + c_2 3^n \text{ pro } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ libovolné.}$$

Nyní hledáme *partikulární řešení* původní rekurence $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1$, zatím stále bez uvážení počátečních podmínek. Budeme hledat partikulární řešení (tj. libovolnou posloupnost splňující danou rekurenci) ve tvaru polynomu $a_n = p(n)$. Začneme s konstantním polynomem $a_n = k$:

$$k = 4k - 3k + 1$$
$$0 = 1$$

Žádná konstantní posloupnost nevyhovuje, pokračujeme s lineárním polynomem $a_n = ln + k$:

$$ln + k = 4(l(n-1) + k) - 3(l(n-2) + k) + 1$$
$$ln + k = 4ln - 4l + 4k - 3ln + 6l - 3k + 1$$
$$0 = 2l + 1$$
$$l = -\frac{1}{2}$$

Tedy partikulárním řešením je posloupnost $a_n = -\frac{n}{2} + k$ pro $k \in \mathbb{R}$ libovolné. Každé řešení nehomogenní rekurence je právě součet (libovolného) partikulárního řešení s nějakým řešením homogenní soustavy, obecné řešení zadané rekurence jsou

$$a_n = c_1 + c_2 3^n - \frac{n}{2}$$

(Koeficient k se "schoval" do c_1.)

Nyní zbývá zahrnout počáteční podmínky $a_0 = 1, a_1 = 2$. Dosadíme obě do obecného řešení a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$1 = a_0 = c_1 + c_2 3^0 - \frac{0}{2} = c_1 + c_2, \text{ tedy } c_1 = 1 - c_2$$

$$2 = a_1 = c_1 + c_2 3^1 - \frac{1}{2} = c_1 + 3c_2 - \frac{1}{2}, \text{ dosadíme } c_1 = 1 - c_2$$

$$2 = (1 - c_2) + 3c_2 - \frac{1}{2} = 1 - 2c_2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = -2c_2, \text{ tedy } c_2 = \frac{3}{4}, \ c_1 = \frac{1}{4}$$

Posloupností splňující všechny podmínky ze zadání je tedy

$$a_n = \frac{3}{4}3^n - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$$

Můžete si dosazením za prvních několik n sami ověřit, že tato posloupnost splňuje počáteční podmínky i rekurentní rovnici.

Tento způsob řešení rekurencí je univerzální, jeho popis můžete najít například v učebnici na v Kapitole 3, podkapitole 2, odstavec 3.9 teorie.

Jiný způsob řešení (pomocí vytvořujících funkcí): Místo posloupnosti $(a_0, a_1, ...a_n, ...)$ budeme hledat funkci odpovídající formální mocninné řadě

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Ze zadání navíc známe vztah pro koeficienty a_k této řady:

$$a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2} + 1 \text{ (pro } k \geq 2 \text{ nebo } k = 0 \text{ , vždyť } a_l = 0 \text{ pro } l < 0)$$

$$a_1 = 4a_0 - 3a_{-1} + 1 - 3$$

Můžeme nyní vynásobit každou z těchto rovností x^k a pak je všechny sečíst. Dostaneme

$$A(x) = 4xA(x) - 3x^2 A(x) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) - 3x$$

Z této rovnosti můžeme úpravami vyjádřit vytvořující funkci pro $A(x)$.

$$A(x) - 4xA(x) + 3x^2 A(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) - 3x$$

$$A(x) = \frac{(\sum_{k=0}^{\infty} x^k) - 3x}{3x^2 - 4x + 1} = \frac{(\sum_{k=0}^{\infty} x^k) - 3x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}{(1-x)(1-3x)} - \frac{3x}{(1-x)(1-3x)} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2(1-3x)} - \frac{3x}{(1-x)(1-3x)}$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$A(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{(1-3x)} + \frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}$$

Přechodem od parciálních zlomků zpět k formálním mocninným řadám (a s využitím našich znalostí o vytvořujících řadách z předchozích cvičení) dostaneme

$$A(x) = \frac{3}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k\right) + \frac{3}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right)$$

Explicitní vyjádření pro členy posloupnosti a_n dostaneme porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x^n na obou stranach rovnosti:

$$a_n = \frac{3}{4}3^n + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{3}{4}3^n + \frac{1}{4} - \frac{n}{2}$$

Příklad vyšel (pochopitelně) stejně oběma způsoby. Tato metoda je však obecnější a dokážeme její pomocí explicitně vyjádřit i složitější rekurence. Návod na použití a podrobnější popis najdete v Kapitole 12 učebnice, mezi odstavci 12.42 a 12.43 teorie.