MB104, příklady k domácímu rozjímání (řešení)
jarní semestr 2015

Příklad *Rozhodněte, zda existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají celočíselnou délku a přepona velikost* $\sqrt{2006}$.

Řešení. Neexistuje. Sporem. Předpokládejme negaci daného tvrzení, tedy že takový trojúhelník existuje. Označme délky jeho odvěsen k, l. Potom podle Pythagora $k^2 + l^2 = 2006$. Druhé mocniny sudých čísel dávají po dělení čtyřmi zbytek 0 (sudá čísla), či jedna (čísla lichá). Případná řešení k, l rovnice musí být tedy čísla lichá, pišme $k = 2a + 1$, $l = 2b + 1$. Po dosazení do rovnice dostáváme $4(a(a + 1) + b(b + 1)) + 2 = 2006$. Na levé straně však stojí číslo dávající zbytek 2 po dělení osmi, na pravé $2006 = 8 \cdot 500 + 6$, tedy dávající zbytek 6 po dělení osmi. Tyto se nemohou rovnat, rovnice tudíž nemá řešení, takový trojúhelník neexistuje. Úvahy o dělitelnosti stran rovnice malými čísly (2,3,4,5,8,...) se objevují poměrně často při řešení rovnic v celých číslech (uvidíme i později).

Další možností ukázat neřešitelnost rovnice je povšimnout si faktu, že jak k^2, tak l^2 musí být menší než 2006, tedy menší z nich může být maximálně $\sqrt{1003}$. Stačí tedy probrat 31 možností. $\square$

Příklad *Najděte všechna celá kladná čísla, která mohou být největším společným dělitelem čísel* $5n + 6$ *a* $8n + 7$ *pro vhodné kladné celé* n.

Řešení. Největší společný dělitel daných čísel musí dělit jejich libovolnou lineární kombinaci, tedy i $8(5n + 6) - 5(8n + 7) = 13$. Největší společný dělitel tedy musí být kladným dělitelem čísla 13, tedy je to 13 či 1. Že obě tato čísla skutečně největším společným dělitelem být mohou, ukazuje volba $n = 1$, $(11, 15) = 1$, a $n = 4$, pro nějž $(26, 39) = 13$. $\square$