**MB104, příklady k domácímu rozjímání**
**jarní semestr 2015**

**Příklad** *Najděte nejmenší a největší celé číslo (pokud existuje), pro které platí, že součin jeho cifer je roven* 18900.

**Řešení**. Jest $18900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, číslo s daným cif. součinem musí tedy obsahovat cifry 5,5,7 a dále cifry dávající v součinu $2^2 \cdot 3^3$. Ty musí být alespoň tři. Pro právě tři cifry bude tedy jedna cifra jedno z prvočísel 2 či 3, druhé dvě rovny součinu zbylých prvočísel ze seznamu 2,2,3,3,3. Probráním několika málo možností dospějeme k nejmenšímu číslu 255679. Největší takové číslo neexistuje – můžeme přidávat cifru 1 $\square$

**Příklad** *Dokažte, že pro libovolné prvočíslo* $p > 2$ *je čitatel* $m$ *zlomku*

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{p-1},$$

$m$, $n \in \mathbb{N}$, *dělitelný* $p$.

**Řešení**. V dané řadě sečteme sčítance po dvou: první s posledním, druhý s předposledním, ..., pak získané zlomky tvaru $\frac{p}{\text{něco}}$ převedeme na společný jmenovatel $(p-1)!$. Máme tedy zlomek tvaru $\frac{p \cdot k}{(p-1)!}$, ale $(p-1)!$ nedělí $p$, takže i po případném krácení zůstane v čitateli faktor $p$. $\square$