MB202 – Diferenciální a integrální počet B
Topologie množin reálných čísel, limity posloupností a funkcí

Obsah přednášky

1. Vlastnosti reálných čísel
2. Topologie reálné přímky
3. Limity posloupností a funkcí

Reálná čísla a racionální čísla jsou tzv. pole. Už jsme ale na nich používali i relaci uspořádání, kterou značíme „$\leq$“.
Připoměňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělící čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, $\mathbb{R}$ je pole, množina $\mathbb{R}$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané pole** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že $\mathbb{R}$ je „dostatečně husté“, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních. Formálně poslední axiom vysvětlíme za chvilku.
Zároveň si uvědomujme, které z axiomů platí pro $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{C}$.

(R1)	$(a+b)+c=a+(b+c)$, pro všechny a, b, $c \in \mathbb{R}$
(R2)	$a+b=b+a$, pro všechny a, $b \in \mathbb{R}$
(R3)	existuje $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $a+0=a$
(R4)	pro všechny $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a) \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a+(-a)=0$
(R5)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pro všechny a, b, $c \in \mathbb{R}$
(R6)	$a \cdot b = b \cdot a$ pro všechny a, $b \in \mathbb{R}$
(R7)	existuje $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a$
(R8)	pro každý $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a \cdot a^{-1} = 1$
(R9)	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, pro všechny a, b, $c \in \mathbb{R}$
(R10)	relace $\leq$ je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na $\mathbb{R}$
(R11)	pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že z $a \leq b$ vyplývá $a+c \leq b+c$
(R12)	pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$, platí také $a \cdot b > 0$
(R13)	každá neprázdná ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu.
Uvažme podmnožinu $A \subset B$ v uspořádané množině B. **Horní závorou** množiny A je každý prvek $b \in B$, pro který platí, že $b \geq a$ pro všechny $a \in A$. Obdobně definujeme **dolní závory** množiny A jako prvky $b \in A$ takové, že $b \leq a$ pro všechny $a \in A$.
Nejmenší horní závora podmnožiny A, pokud existuje, se nazývá **supremum** této podmnožiny a značíme ji $\sup A$. Přesněji:

$$\boxed{\sup A = b, \text{ jestliže z } c \geq a \text{ pro všechny } a \in A \text{ vyplývá také } c \geq b.}$$

Obdobně, největší dolní závora se nazývá **infimum**, píšeme $\inf A$, tzn.

$$\boxed{\inf A = b, \text{ jestliže z } c \leq a \text{ pro všechny } a \in A \text{ vyplývá také } c \leq b.}$$

Pro výstavbu teorie potřebujeme vědět, zda uvedené vlastnosti reálných čísel lze realizovat, tj. zda **existuje taková množina $\mathbb{R}$ s operacemi a relací uspořádání, které (R1)–(R13) splňují**. Skutečně lze reálná čísla nejen zkonstruovat, ale jde to, až na izomorfismus, jediným způsobem. V textech je naznačena existence, k jednozačnosti se vrátíme později. Pole racionálních čísel splňuje (R1)–(R12), neexistují v nich ale obecně suprema ohraničených podmnožin.
Pole komplexních čísel splňuje axiomy (R1)–(R9), není na nich ale žádným rozumným způsobem definováno uspořádání, které by naplnilo axiomy (R10)–R(13). Protože jsou komplexní čísla $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$ dána jako dvojice reálných čísel, je dobrou představou rovina komplexních čísel.
U komplexních čísel je navíc tzv. **konjugace**, tj. zrcadlení podle přímky reálných čísel. Značíme ji $\bar{z} = \operatorname{re} z - i \operatorname{im} z$. Platí $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, tj. kvadrát velikosti vektoru. Píšeme $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, hovoříme o **absolutní hodnotě**.

Hromadné body a konvergence

Uvažme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots,$ čísel v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{C}$ a pevně zvolenou hodnotu a v témže oboru.

Konvergentní posloupnost

Jestliže pro libovolné pevně zvolené kladné číslo $\epsilon \in \mathbb{R}$ platí pro všechny $i \in N$, až na konečně mnoho výjimek,

$$|a_i - a| < \epsilon,$$

říkáme, že posloupnost a_i, $i = 0, 1, \dots$ **konverguje** k hodnotě a.

Cauchyovská posloupnost

Posloupnost prvků $a_0, a_1, \dots$ takovou, že pro libolné pevně zvolené kladné reálné číslo $\epsilon > 0$ platí pro všechny prvky a_k až na konečně mnoho výjimek

$$|a_i - a_j| < \epsilon,$$

nazýváme **Cauchyovská**

Jinak řečeno, u Cauchyovské posloupnosti pro každé pevné $\epsilon > 0$ existuje index N takový, že nerovnost $|a_i - a_j| < \epsilon$ platí pro všechna $i, j > N$. Intuitivně jistě cítíme, že buď jsou v takové posloupnosti všechny prvky stejné až na konečně mnoho z nich (pak bude od určitého indexu N počínaje vždy $|a_i - a_j| = 0$) nebo se taková posloupnost „hromadí“ k nějaké hodnotě.
Jestliže posloupnost $a_i \in \mathbb{K}$ konverguje k $a \in \mathbb{K}$, pak pro zvolené ϵ víme, že $|a_i - a| < \epsilon$ pro vhodné $N \in \mathbb{N}$ a všechny $i \geq N$. Pak pro $i, j \geq N$ dostaneme $|a_i - a_j| < |a_i - a| + |a - a_j| < 2\epsilon$. Odtud:

Každá konvergující posloupnost je Cauchyovská.

Použili jsme tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**: Pro každá dvě čísla a, b platí (v $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Hromadné body množin

Cauchyovská posloupnost by se (intuitivně viděno) měla k něčemu „hromadit“, tedy mít svoji limitu. V poli racionálních čísel se může snadno stát, že pro takovéto posloupnosti příslušná hodnota a neexistuje. Např. číslo $\sqrt{2}$ můžeme libovolně přesně přiblížit racionálními čísly a_i, ale samotná odmocnina racionální není. Uspořádaná pole skalárů, ve kterém všechny Caychyovské posloupnosti konvergují, se nazývají **úplná**. Následující tvrzení říká, že axiom (R13) takové chování zaručuje:

Lemma

Každá Cauchyovská posloupnost reálných čísel a_i konverguje k reálné hodnotě $a \in \mathbb{R}$.

Uvažme nyní jakoukoliv množinu $A \subset \mathbb{K}$ a posloupnost $\{a_i\}$ vybranou z prvků A. Pokud konverguje k hodnotě a a navíc je nekonečně mnoho bodů $a_i \in A$ různých od a, hovoříme o **hromadném bodu** množiny A.

Konstrukce reálných čísel

Tento výsledek dává jednu z možností, jak vybudovat reálná čísla. Postupujeme podobně jako při zúplňování přirozených čísel na celá (abychom přidali opačné hodnoty) a celých na racionální (abychom přidali podíly nenulových čísel). Vhodným formálním způsobem zavedeme ekvivalenci na množině všech Cauchyovských posloupností racionálních čísel a tak „přidáme všechny chybějící hromadné body pro podmnožiny racionálních čísel“. Pak se lze již snadno přesvědčit, že všechny požadované axiomy skutečně dojdou naplnění.

Otevřené a uzavřené množiny

Uzavřená podmnožina v $\mathbb{R}$ je taková, která obsahuje i všechny své hromadné body. Typickou uzavřenou množinou je tzv. **uzavřený interval**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

Zde a je reálné číslo nebo hraniční hodnota chybí a píšeme $a = -\infty$ (mínus nekonečno) a podobně $b > a$ je reálné číslo nebo $+\infty$. Uzavřenou množinu bude tvořit i posloupnost reálných čísel bez hromadného bodu nebo posloupnost s konečným počtem hromadných bodů spolu s těmito body. Zjevně je konečné sjednocení uzavřených množin opět uzavřená množina. **Otevřená množina** v $\mathbb{R}$ je taková množina, jejíž doplněk je uzavřenou množinou. Typickou otevřenou množinou je **otevřený interval**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\},$$

kde pro hraniční hodnoty máme stejné možnosti jako výše.

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje.
Je-li okolí definované jako interval

$$\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$$

pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a.
Všimněme si, že pro libovolnou množinu A je $a \in \mathbb{R}$ hromadným bodem A, právě když v libovolném okolí a leží také alespoň jeden bod $b \in A$, $b \neq a$.

Lemma

Množina reálných čísel A je otevřená, právě když každý její bod $a \in A$ do ní patří i s nějakým svým okolím.

Důkaz.

Nechť je A otevřená a $a \in A$. Kdyby neexistovalo žádné okolí bodu a uvnitř A, musela by existovat posloupnost $a_n \notin A$, $|a - a_n| \leq 1/n$. Pak je ovšem $a \in A$ hromadným bodem množiny $\mathbb{R} \setminus A$, což není možné, protože doplněk A je uzavřený.
Naopak předpokládejme, že každé $a \in A$ leží v A i s nějakým svým okolím. To přirozeně zabraňuje, aby nějaký hromadný bod b pro množinu $\mathbb{R} \setminus A$ ležel v A. Je proto $\mathbb{R} \setminus A$ uzavřená a tedy je A otevřená. □

Zjevně je libovolné sjednocení otevřených množin opět otevřenou množinou a každý konečný průnik otevřených množin je opět otevřená množina.
Množina A reálných čísel se nazývá **ohraničená**, jestliže celá leží v nějakém konečném intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. V opačném případě je **neohraničená**. Ohraničená a uzavřená množina se nazývá **kompaktní**.

Další užitečné pojmy:
Vnitřním bodem množiny A reálných čísel nazveme takový bod, který do A patří i s nějakým svým okolím.
Hraniční bod $a \in A$ je takový, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s A tak s doplňkem $\mathbb{R} \setminus A$.
Otevřené pokrytí množiny A je takový systém otevřených intervalů U_i, $i \in I$, že jejich sjednocení obsahuje celé A.
Izolovaným bodem množiny A rozumíme bod $a \in A$, který má okolí, jehož průnik s A je právě jednobodová množina $\{a\}$.

Theorem

Pro podmnožiny A reálných čísel platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému otevřených intervalů,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
5. *A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$. Pro tyto účely si zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálně přidanými hodnotami pro libovolná „konečná“ čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$a + \infty = \infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \infty, \text{ je-li } a > 0$$

$$a \cdot \infty = -\infty, \text{ je-li } a < 0$$

Okolím nekonečna rozumíme interval (a, ∞), resp. $(-\infty, a)$ je okolí $-\infty$. Pojem hromadného bodu množin rozšiřujeme tak, že ∞ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{R}$ jestliže každé okolí ∞ s ní má neprázdný průnik, tj. jestliže je A zprava neohraničená. Obdobně pro $-\infty$.

Toplogie komplexní roviny

Vystačíme si zatím s okolími bodů (byť většina pojmů a výsledků se z reálné přímky do komplexní roviny přenáší):

Pro kladné reálné číslo δ rozumíme δ-okolím komplexního čísla $z \in \mathbb{C}$ množinu $\mathcal{O}_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C}, |w - z| < \delta\}$.

Připoměňme, že konvergence posloupnosti z_i komplexních čísel k jejich limitě z byla definována tak, že každé okolí $\mathcal{O}_\epsilon(z)$ obsahuje všechny z_i, až na konečně mnoho výjimek (závisejících na ϵ).

Definice limity

Definition

Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je libovolná podmnožina a f je reálná, resp. komplexní, funkce reálné proměnné definovaná na A a nechť x_0 je hromadný bod množiny A. Říkáme, že f má v x_0 **limitu** $a \in \mathbb{R}$, resp. $a \in \mathbb{C}$ a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

jestliže pro každé okolí bodu $\mathcal{O}(a)$ bodu a lze najít okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechny $x \in A \cap (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\})$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Limita reálné funkce se nazývá **nevlastní**, jestliže je $a = \pm\infty$,
V opačném případě se nazývá **vlastní**.

Je důležité si všimnout, že hodnota f v bodě x_0 v definici nevystupuje a f v tomto hromadném bodě vůbec nemusí být definována!
Je zřejmé, že nevlastní limity komplexních funkcí nemohou být definovány.
Limity v případných nevlastních hromadných bodech $\pm\infty$ definičního oboru reálných i komplexních funkcí však výše uvedenou definicí korektně definovány jsou.

Příklad 1

Jestliže je $A = \mathbb{N}$, tj. funkce f je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o **limitách posloupností reálných nebo komplexních čísel**. Jediným hromadným bodem A je pak ∞ a píšeme pro $f(n) = a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ limitní hodnoty a existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$ pro všechny $n \geq N$. Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence posloupnosti. Říkáme také, že **posloupnost** a_n **konverguje k** a.

Přímo z naší definice pro komplexní hodnoty je také vidět, že komplexní posloupnost má limitu a, právě když reálné části $\operatorname{re} a_i$ konvergují k $\operatorname{re} a$ a zároveň imaginární části konvergují k $\operatorname{im} a$.

Příklad 2

Jestliže je f definována na intervalu $A = [a, b]$ a x_0 je vnitřním bodem intervalu, hovoříme o limitě funkce ve vnitřním bodě jejího definičního oboru.

Podívejme se, proč je důležité v definici požadovat $f(x) \in \mathcal{O}(a)$ pouze pro body $x \neq x_0$ i v tomto případě. Vezměme jako příklad funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \neq 0 \\ 1 & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Pak zjevně limita v nule je dobře definována a $\lim_{x \to 0} = 0$, přestože $f(0) = 1$ do malých okolí limitní hodnoty 0 nepatří.

Příklad 3

Je-li $A = [a, b]$ ohraničený interval a $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$, hovoříme o limitě v hraničním bodě definičního oboru funkce f. Jestliže je ale bod x_0 vnitřním bodem, můžeme pro účely výpočtu limity definiční obor zúžit na $[x_0, b]$ nebo $[a, x_0]$. Výsledným limitám pak říkáme **limita zprava**, resp. **limita zleva** pro funkci f v bodě x_0. Označujeme ji výrazem $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, resp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Jako příklad nám může sloužit limita zprava a zleva v $x_0 = 0$ pro Heavisideovu funkci h ($h(x) = 0$ pro $x < 0$, $h(x) = 1$ pro $x > 0$). Evidentně je

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} h(x) = 0.$$

Limita $\lim_{x \to 0} f(x)$ přitom neexistuje. Limita ve vnitřním bodu definičního oboru libovolné reálné funkce f existuje, právě když existují limity zprava i zleva a jsou si rovny.

Příklady 4 a 5

Limita komplexní funkce $f : A \to \mathbb{C}$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže existují limity její reálné a imaginární části. V takovém případě je pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\operatorname{re} f(x)) + i \lim_{x \to x_0} (\operatorname{im} f(x)).$$

Nechť f je reálný nebo komplexní polynom. Pak pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Skutečně, je-li $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, pak roznásobením $(x_0 + \delta)^k = x_0^k + k\delta x_0^{k-1} + \cdots + \delta^k$ a dosazením pro $k = 0, \ldots, n$ vidíme, že volbou dostatečně malého δ se hodnotou libovolně blízko přiblížíme $f(x_0)$.

Příklad 6 a 7

Uvažme nyní obzvlášť ošklivou funkci definovanou na celém $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Jistě snadno ověříte, že tato funkce nemá limitu v žádném bodě (dokonce ani zleva nebo zprava).
Ale naše definice umí být ještě záludnější: Definujme následující funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p \text{ a } q \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tato funkce má všude limitu nulovou, tj. je „spojitá“ ve všech iracionálních bodech a „nespojitá“ ve všech racionálních realných bodech.

Theorem (O třech limitách)

Buďte f, g, h reálné funkce se shodným definičním oborem A a takové, že existuje ryzí okolí hromadného bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ definičního oboru, kde platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Potom, pokud existují limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0, \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = h_0$$

a navíc $f_0 = h_0$, pak také existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g_0$$

a platí $g_0 = f_0 = h_0$.

Theorem

Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je definiční obor reálných nebo komplexních funkcí f a g, x_0 nechť je hromadný bod A a existují limity $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{K}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{K}$.

1. *limita a je určena jednoznačně,*
2. *limita součtu $f + g$ existuje a platí*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$$
3. *limita součinu $f \cdot g$ existuje a platí*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$
4. *pokud navíc $b \neq 0$, pak limita podílu f/g existuje a platí*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Theorem

Uvažme reálnou nebo komplexní funkci f definovanou na množině $A \subset \mathbb{R}$ a hromadný bod x_0 množiny A. Funkce f má v bodě x_0 limitu y právě, když pro každou posloupnost bodů $x_n \in A$ konvergující k x_0 a různých od x_0 má i posloupnost hodnot $f(x_n)$ limitu y.