MB202 – Diferenciální a integrální počet B
Vlastnosti spojitých funkcí, derivace

Obsah přednášky

Nechť f je reálná nebo komplexní funkce definovaná na **intervalu** $A \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že f je **spojitá v bodě** $x_0 \in A$, jestliže je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce f je spojitá na A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$.

Všimněme si, že pro hraniční body intervalu A říká naše definice, že f v nich má být spojitá zprava, resp. zleva.
Z vět o limitách okamžitě vyplývá většina následujících tvrzení:

Theorem

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu A. Pak

1. *součet $f + g$ je spojitá funkce*
2. *součin $f \cdot g$ je spojitá funkce*
3. *pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak podíl f/g je dobře definován v nějakém okolí x_0 a je spojitý v x_0.*
4. *pokud spojitá funkce h je definována na okolí hodnoty $f(x_0)$, pak složená funkce $h \circ f$ je definována na okolí bodu x_0 a je v x_0 spojitá.*

Důkaz.

Tvrzení (1) a (2) jsou zřejmá,
(3) Jestliže je $g(x_0) \neq 0$, pak také celé ϵ–okolí čísla $g(x_0)$ neobsahuje nulu pro dostatečně malé $\epsilon > 0$. Ze spojitosti g pak vyplývá, že na dostatečně malém δ–okolí x_0 bude g neulové a podíl f/g tam bude tedy dobře definován. Pak bude ovšem i spojitý v x_0 podle předchozí věty.
(4) Zvolme nějaké okolí $\mathcal{O}$ hodnoty $h(f(x_0))$. Ze spojitosti h k němu existuje okolí $\mathcal{O}'$ bodu $f(x_0)$, které je celé zobrazeno funkcí h do $\mathcal{O}$. Do tohoto okolí $\mathcal{O}'$ spojité zobrazení f zobrazí dostatečně malé okolí bodu x_0. To je ale právě definiční vlastnost spojitosti a důkaz je ukončen. □

Nyní si vcelku snadno můžeme odvodit zásadní souvislosti spojitých zobrazení a topologie reálných čísel:

Theorem

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce. Pak*

1. *vzor* $f^{-1}(U)$ *každé otevřené množiny je otevřená množina,*
2. *vzor* $f^{-1}(W)$ *každé uzavřené množiny je uzavřená množina,*
3. *obraz* $f(K)$ *každé kompaktní množiny je kompaktní množina,*
4. *na libovolné kompaktní množině* K *dosahuje spojité zobrazení maxima a minima.*

Důkaz.

(1) Uvažme $x_0 \in f^{-1}(U)$. Nějaké okolí $\mathcal{O}$ hodnoty $f(x_0)$ je celé v U, protože je U otevřená. Proto existuje okolí $\mathcal{O}'$ bodu x_0, které se celé zobrazí do $\mathcal{O}$, patří tedy do vzoru. Každý bod vzoru je tedy vnitřní a tím je důkaz ukončený.
(2) Uvažme hromadný bod x_0 vzoru $f^{-1}(W)$ a posloupnost x_i, $f(x_i) \in W$, která k němu konverguje. Ze spojitosti f zjevně vyplývá, že $f(x_i)$ konverguje k $f(x_0)$, a protože je W uzavřená, musí i $f(x_0) \in W$. Zřejmě jsou tedy všechny hromadné body vzoru W ve W také obsaženy.
(3) Zvolme otevřené pokrytí $f(K)$. Vzory jednotlivých intervalů jsou sjednoceními otevřených intervalů a tedy vytvoří pokrytí množiny K. Z něho lze vybrat konečné pokrytí a proto stačí konečně mnoho odpovídajících obrazů i k pokrytí množiny $f(K)$.
(4) Protože je obrazem kompaktní množiny opět kompaktní množina, musí být obraz ohraničený a zároveň musí obsahovat svoje supremum i infimum. Odtud ale vyplývá, že tyto musí být zároveň maximem a minimem hodnot. $\square$

Důsledek

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom

1. obraz každého intervalu je opět interval
2. f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nabývá všech hodnot mezi svou maximální a minimální hodnotou.

Důkaz.

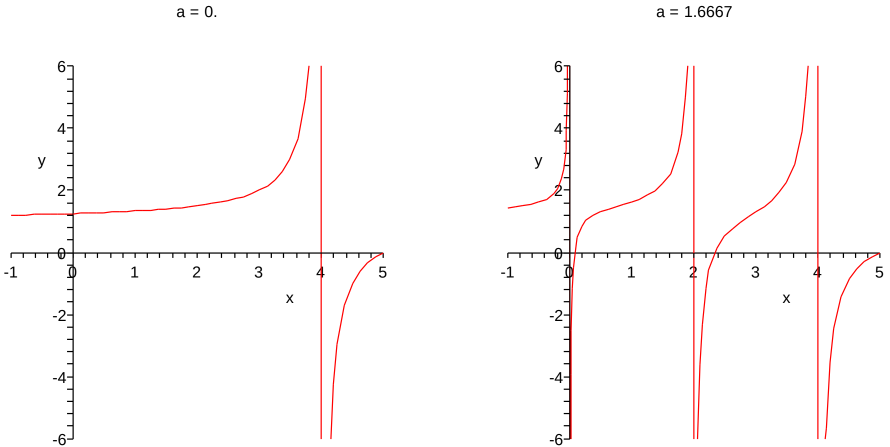
(1) Uvažme interval A a předpokládejme, že existuje $y \in \mathbb{R}$ takový, že $f(A)$ obsahuje body menší i větší než y, ale $y \notin f(A)$. Pak vzory otevřených množin $A_1 = f^{-1}((-\infty, y))$ a $A_2 = f^{-1}((y, \infty))$ pokrývají A. Tyto otevřené množiny jsou disjunktní a obě mají neprázdný průnik s A. Nutně tedy existuje $x \in A$, který neleží v A_1, je ale jejím hromadným bodem. Musí pak ležet v A_2 a to u disjunktních otevřených množin není možné. Proto pokud nějaký bod y nepatří do obrazu intervalu, musí být zároveň všechny hodnoty buď větší nebo menší. Obrazem bude proto opět interval. Všimněme si, že jeho krajní body mohou a nemusí do obrazu patřit.
Tvrzení (2) je přímým důsledkem (1). $\square$

Racionální funkce

Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \cdots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x). Pak funkce $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \to \mathbb{C}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g. Takové funkce nazýváme **racionální funkce**.

Racionální funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen polynomů f i g (a v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.



$$h(x) = \frac{(x - 0.05a)(x - 2 - 0.2a)(x - 5)}{x(x-2)(x-4)}$$

s hodnotami $a = 0$ a $a = 5/3$.
Obrázek vlevo tedy zobrazuje racionální funkci $(x - 5)/(x - 4)$.

Mocninné funkce

Polynomy jsou poskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \dots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.

Pro $n = -a$ s $a \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují pro dané x. Předpokládejme $x > 0$ a označme B množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0,\ y^n \leq x\}$. To je zřejmě zhora ohraničená množina a lze ověřit, že pro $b = \sup B$ skutečně platí požadovaná rovnost.

Zdůvodnili jsme tedy existenci x^a pro všechny $x > 0$ a $a \in \mathbb{Q}$.

Mocninná funkce – pokračování

Konečně, pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 1$ klademe

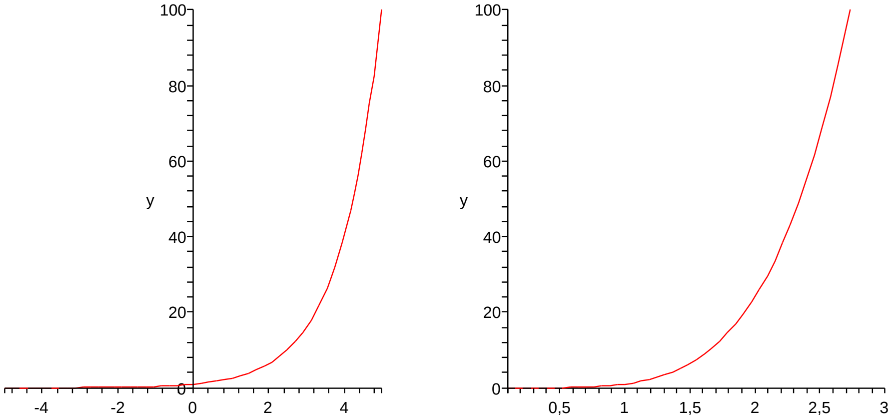
$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q},\ y \leq a\}.$$

Pro $0 < x < 1$ buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohrát s nerovnítky) nebo klademe přímo $x^a = (\frac{1}{x})^{-a}$. Pro $x = 1$ je pak $1^a = 1$ pro libovolné a.
Obecnou mocninnou funkci $x \mapsto x^a$ máme tedy dobře definovanou pro všechny $x \in [0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$.

Exponenciální funkce

Naši konstrukci funkce x^a ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém $\mathbb{R}$, $y \mapsto c^y$. Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu** c.

Na obrázcích vidíme funkce $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$ pro jednu konkrétní hodnotu $a = 2.5167$ a $b = 4.5833$.



Mocninné i exponenciální funkce jsou spojité na celých svých definičních oborech. Zároveň se ze spojitosti definice pomocí suprem množin hodnot zjevně přenáší základní vlastnosti platné pro racionální čísla, a, x, y:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Definition

Nechť f je reálná nebo komplexní funkce s definičním oborem $A \subset \mathbb{R}$ a $x_0 \in A$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak řídáme, že f má v bodě x_0 **derivaci** a. Píšeme často $a = f'(x_0)$ nebo $a = \frac{df}{dx}(x_0)$ případně $a = \frac{d}{dx}f(x_0)$.
Derivace funkce je **vlastní**, resp. **nevlastní**, když je takovou příslušná limita.
Jednostranné derivace (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

Z formulace definice lze očekávat, že $f'(x_0)$ bude opět umožňovat dobře aproximovat danou funkci pomocí přímky

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Takto lze vnímat následující lemma, které říká, že nahrazením konstantního koeficientu $f'(x_0)$ vhodnou spojitou funkcí dostaneme přímo hodnoty f.

Lemma

Reálná nebo komplexní funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci, právě když existuje na nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ funkce ψ spojitá v x_0 a taková, že pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0).$$

Navíc pak vždy $\psi(x_0) = f'(x_0)$.

Důkaz.

Nejprve předpokládejme, že $f'(x_0)$ je vlastní derivace. Pokud má ψ existovat, má jistě tvar $\psi(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ pro všechny $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$. V bodě x_0 naopak definujme hodnotu derivací. Pak jistě

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = f'(x_0) = \psi(x_0)$$

jak je požadováno.
Naopak, jestliže taková funkce ψ existuje, tentýž postup vypočte její limitu v x_0. Proto existuje i $f'(x_0)$ a je $\psi(x_0)$ rovna. □

Geometrický význam derivace

Předchozí lemma lze názorně vysvětlit geometricky a tím popsat smysl derivace. Říká totiž, že na grafu funkce $y = f(x)$, tj. na příslušné křivce v rovině se souřadnicemi x a y, poznáme, zda existuje derivace podle toho, jestli se spojitě mění hodnota směrnice sečny procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$. Pokud ano, pak limitní hodnota této směrnice je hodnotou derivace.

Corollary

Má-li reálná funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x_0) > 0$, pak pro nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0)$ platí $f(b) > f(a)$ pro všechny body $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$, $b > a$. Je-li derivace $f'(x_0) < 0$, pak naopak pro nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0)$ platí $f(b) < f(a)$ pro všechny body $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$, $b > a$.

Důkaz.

Uvažme prvý případ. Pak podle předchozího lematu platí $f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$ a $\psi(x_0) > 0$. Protože je ale ψ v x_0 spojitá, musí existovat okolí $\mathcal{O}(x_0)$, na kterém bude $\psi(x) > 0$. Pak ale s rostoucím x nutně poroste i hodnota $f(x)$.
Stejná argumentace ověří i tvrzení se zápornou derivací. □

Funkce, které mají vlastnost $f(b) > f(a)$ kdykoliv $b > a$ pro nějaké okolí bodu x_0 se nazývají **rostoucí v bodě** x_0. Funkce rostoucí ve všech bodech nějakého intervalu se nazývá **rostoucí na intervalu**. Podobně je funkce **klesající v bodu**, resp. **klesající na intervalu**, jestliže $f(b) < f(a)$ kdykoliv je $a < b$.
Funkce která má v bodě nenulovou konečnou derivaci je v tomto bodě buď rostoucí nebo klesající podle znaménka této derivace.

Pravidla pro počítání

Theorem

Nechť f a g jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom

1. *funkce f je v bodě x_0 spojitá,*
2. *pro každé reálné nebo komplexní číslo c má funkce $x \mapsto c \cdot f(x)$ derivaci v x_0 a platí*

$$(cf)'(x_0) = c(f'(x_0)),$$

3. *funkce $f + g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Pravidla pro počítání

Theorem

Nechť f a g jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom

1. *funkce $f \cdot g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

2. *Je-li dále h funkce definovaná na okolí obrazu $y_0 = f(x_0)$, která má derivaci v bodě y_0, má také složená funkce $h \circ f$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Intuitivně:

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při $y = h(x) = f(x) + g(x)$ je přírůstek y dán součtem přírůstků f a g a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.

U součinu musíme být malinko pozornější. Pro $y = h(x) = f(x)g(x)$ je přírůstek

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\ &= f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x) \end{aligned}$$

Nyní ale když budeme zmenšovat přírůstek Δx, jde vlastně o výpočet limity součtu součinů a o tom už víme, že jej lze počítat jako součet součinů limit. Proto z naší formulky lze očkávat pro derivaci součinu fg výraz $fg' + f'g$.

Pro derivaci složené funkce $g = h \circ f$, kde definiční obor funkce $z = h(y)$ obsahuje obor hodnot funkce $y = f(x)$, je to podobné.

$$g' = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Můžeme tedy očekávat, že pravidlo pro výpočet bude $(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$.

Důsledek

Nechť f a g jsou reálné funkce, která mají v bodě x_0 vlastní derivace a $g(x_0) \neq 0$. Pak pro funkci $h(x) = f(x)(g(x))^{-1}$ platí

$$h'(x_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Důkaz.

Nejprve pro $h(x) = x^{-1}$ přímo z definice:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - x - \Delta x}{\Delta x(x^2 + x\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}.$$

Z pravidel pro počítání limit okamžitě dostáváme

$$h'(x_0) = -x^{-2}.$$

Nyní pravidlo pro derivaci složené funkce říká, že $(g^{-1})' = -g^2 \cdot g'$ a konečně pravidlo pro derivaci součinu nám dává právě kýžený vzorec:

$$(f/g)' = (f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = \frac{f'g - gf'}{g^2}.$$

□

Derivace inverzních funkcí

Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}},$$

a druhý již pak platí také. Pokud je f definováno na podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ a $f(A) = B$, je existence f^{-1} podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními id_A resp. id_B na pravých stranách.

Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, pravidlo pro derivaci složené funkce nám říká

$$1 = (\mathrm{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové)

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro $y = f(x)$ je $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zatímco pro $x = f^{-1}(y)$ je $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

Theorem

Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Pokud je $f'(x_0) = 0$ izolovaným nulovým bodem derivace $f'(x)$ a inverzní funkce k f na okolí $f(x_0)$ existuje, pak limity zprava i zleva funkce f' jsou v bodě x_0 nevlastní.