PA081: Programování numerických výpočtů

2. Nelineární rovnice o jedné neznámé

Aleš Křenek

jaro 2015

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Obecná formulace problému

- hledáme řešení rovnice

$$F(x) = G(x)$$

  kde alespoň jedna z funkcí F, G není lineární
- víceméně všechny numerické metody jsou iterační
  - začínáme s odhadem řešení x_0
  - v každém kroku odhad postupně zpřesňujeme
- výpočet končí dosažením kritéria zastavení
  - dosáhli jsme dostatečně přesné aproximace řešení

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Obecná formulace problému

- hledáme řešení rovnice

$$F(x) = G(x)$$

  kde alespoň jedna z funkcí F, G není lineární
- víceméně všechny numerické metody jsou iterační
  - začínáme s odhadem řešení x_0
  - v každém kroku odhad postupně zpřesňujeme
- výpočet končí dosažením kritéria zastavení
  - dosáhli jsme dostatečně přesné aproximace řešení
- anebo
  - rovnice nemá řešení
  - použitá metoda pro danou rovnici nefunguje
  - špatně jsme odhadli x_0
  - dosáhli jsme falešného řešení
- žádná metoda není dokonale univerzální
- bez jisté analýzy vlastností rovnice se neobejdeme

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Železniční příklad

Kolejnice délky $2d$ je ohnutá do oblouku tak, že její konce jsou ve vzálenosti $2a$. Jaká je vzdálenost středu kolejnice od spojnice krajních bodů?

- označíme R poloměr oblouku, α úhel poloviny úseče, r hledanou vzdálenost
- platí rovnice

$$d = R\alpha \qquad R\sin\alpha = a \qquad r = R(1-\cos\alpha)$$

- dosazením a jednoduchou úpravou

$$\frac{d}{a}\sin\alpha = \alpha$$

- hledáme pevný bod funkce
- kandidát na metodu prosté iterace

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Metoda prosté iterace

- rovnice ve tvaru $x = f(x)$
- řešením je pevný bod funkce f
- počítáme opakovaně $x_{i+1} = f(x_i)$
  - až k dosažení kritéria konvergence

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Metoda prosté iterace

- rovnice ve tvaru $x = f(x)$
- řešením je pevný bod funkce f
- počítáme opakovaně $x_{i+1} = f(x_i)$
  - až k dosažení kritéria konvergence
- kdy a proč to funguje? – věta o pevném bodě

  Je-li pro $K \subseteq \mathbb{R}$ funkce $f\colon K \to K$ kontrakce, tj. existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\forall x, y \in K\colon |f(x) - f(y)| \le q|x - y|$, potom existuje $x^* \in K$ takové, že pro libovolné $x_0 \in K$ je x^* limitou posloupnosti $x_{i+1} = f(x_i)$.
- idea důkazu

$$|x_{i+1} - x^*| = |f(x_i) - f(x^*)| < |x_i - x^*|$$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Metoda prosté iterace

Pro železniční příklad

- je zobrazení $\alpha \mapsto \frac{d}{a} \sin \alpha$ kontrakce?
- postačující podmínka

$$\forall x \in K\colon f'(x) < 1 \quad \text{tedy} \quad \cos \alpha < \frac{a}{d}$$

- $\frac{d}{a} \sin \alpha = \alpha$ bude mít řešení v $(\arccos \frac{a}{d}, \frac{\pi}{2})$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Metoda prosté iterace

Pro železniční příklad

- je zobrazení $\alpha \mapsto \frac{d}{a} \sin \alpha$ kontrakce?
- postačující podmínka

$$\forall x \in K \colon f'(x) < 1 \quad \text{tedy} \quad \cos \alpha < \frac{a}{d}$$

- $\frac{d}{a} \sin \alpha = \alpha$ bude mít řešení v $(\arccos \frac{a}{d}, \frac{\pi}{2})$
- implementačně velmi jednoduchá metoda
- zdánlivě velmi speciální případ
  - řešený problém lze často transformovat, aby splňoval podmínku kontrakce
- rychlost konvergence záleží na vlastnostech $f(x)$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Hledání kořenů

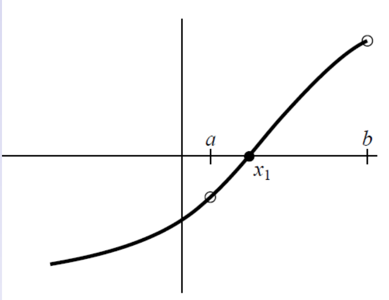
- pro rovnici $F(x) = G(x)$ uvažujeme $f(x) = F(x) - G(x)$
- provedeme separaci kořenů $f(x)$
  - definiční obor $f(x)$ rozdělíme na intervaly $[a_i, b_i]$
  - v každém $[a_i, b_i]$ má funkce právě jeden kořen
  - $f(a_i)f(b_i) < 0$
  - f je na $[a_i, b_i]$ spojitá
- nepovede-li se separace dokonale, musíme být připraveni na následky
- vybereme vhodnou metodu hledání kořene na $[a_i, b_i]$
- stanovíme konkrétní podmínku ukončení

Separace kořenů

Spojitá funkce

- máme štěstí a f je spojitá, platí varianta věty o střední hodnotě

  Je-li f na $[a, b]$ spojitá a $f(a)f(b) < 0$, existuje $x \in [a, b]$ tak, že $f(x) = 0$



Separace kořenů

Nespojitá funkce

- není-li f spojitá, ale je ohraničená
  - „kříží“ osu x v bodě nespojitosti
  - numericky nerozlišitelné od kořene

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

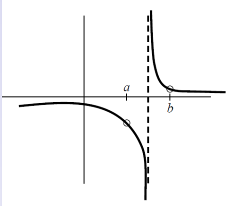
Obchodní případ

Shrnutí

Separace kořenů

Nespojitá funkce

- není-li f spojitá, ale je ohraničená
  - „kříží" osu x v bodě nespojitosti
  - numericky nerozlišitelné od kořene
- není-li ani ohraničená
  - např. $\frac{1}{x-c}$
  - některé metody najdou „kořen" v c
  - snadno identifikovatelný problém



PA081: Programování numerických výpočtů

A. Křenek

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

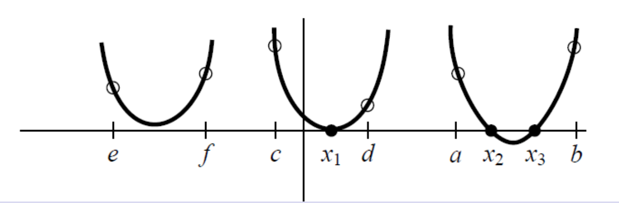
Cirkusové číslo

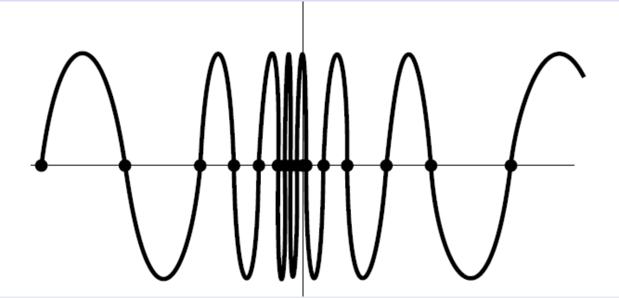
Obchodní případ

Shrnutí

Separace kořenů

Patologické případy





Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Separace kořenů

Praktický postup

- základní analýza vlastností f je nezastupitelná
  - netušíme-li vůbec, zdali má kořeny, kde jsou, kolik jich je atd., je problém zpravidla někde jinde

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Separace kořenů

Praktický postup

- základní analýza vlastností f je nezastupitelná
  - netušíme-li vůbec, zdali má kořeny, kde jsou, kolik jich je atd., je problém zpravidla někde jinde
- algoritmus „look inward“
  - alespoň nahrubo známe interval, kde by kořen měl být
  - rozdělíme na n menších a postupně prohledáváme
  - v případě neúspěchu můžeme opakovat s větším n

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Separace kořenů

Praktický postup

- základní analýza vlastností f je nezastupitelná
  - netušíme-li vůbec, zdali má kořeny, kde jsou, kolik jich je atd., je problém zpravidla někde jinde
- algoritmus „look inward"
  - alespoň nahrubo známe interval, kde by kořen měl být
  - rozdělíme na n menších a postupně prohledáváme
  - v případě neúspěchu můžeme opakovat s větším n
- algoritmus „look outward"
  - poslední zoufalý pokus
  - počáteční interval expandujeme exponenciálně na tu stranu, kde se funkce blíží k ose x
  - zpravidla funguje pro funkce, které mají pro $x \to \pm\infty$ opačné znaménko

Metoda půlení intervalů

Princip

- začínáme se separovaným kořenem
  - pro daný interval $[a, b]$ platí $f(a)f(b) < 0$
- není-li $\frac{b+a}{2}$ přesně kořen, platí právě jedna nerovnost

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right) f(a) < 0 \qquad f\left(\frac{b+a}{2}\right) f(b) < 0$$

- interval rozpůlíme a pokračujeme rekurzivně
- metoda vždy dokonverguje ke kořeni nebo k singularitě
- je-li jich více, odhalí jen jeden

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Metoda půlení intervalů

Konvergence

- je-li požadovaná přesnost ϵ, je třeba

$$n = \log_2 \frac{b-a}{\epsilon}$$

  iteračních kroků
- lineární rychlost konvergence
  - v každém kroku přibývá konstatně platných číslic přesnosti
- kritéria ukončení
  - jsou-li a, b řádově srovnatelná, nemá smysl více iterací než než počet bitů mantisy
  - v opačném případě opět musíme vědět, co chceme
  - standardně se používá zastavení při velikosti intervalu

$$\epsilon \frac{|a| + |b|}{2}$$

    kde ϵ je přesnost daného datového typu
- metoda je robustní ale relativně pomalá

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Metoda půlení intervalů

```c
float rtbis(float (*func)(float), float x1, float x2,
     float xacc,int *iter)
{
    int j;
    float dx,f,fmid,xmid,rtb;
    f=(*func)(x1);
    fmid=(*func)(x2);
    rtb = f < 0.0 ? (dx=x2-x1,x1) : (dx=x1-x2,x2);
    for (j=1;j<=JMAX;j++) {
        fmid=(*func)(xmid=rtb+(dx *= 0.5));
        if (fmid <= 0.0) rtb=xmid;
        if (fabs(dx) < xacc || fmid == 0.0) {
            *iter = j;
            return rtb;
        }
    }
}
```


Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Newtonova metoda

- také Newton-Raphsonova metoda
- odvozena z Taylorova rozvoje $x^* = x_i + \delta_i$

$$f(x_i + \delta_i) = f(x_i) + f'(x_i)\delta_i + \frac{f''(x_i)\delta_i^2}{2!} + \ldots$$

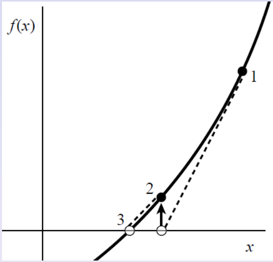
- zanedbáme vyšší derivace

$$\delta_i \doteq -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- opakujeme iterační krok

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- nutno spočítat i derivaci



Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Newtonova metoda

Konvergence

- označíme x^* kořen, a ϵ_i odchylky $x_i - x^*$

$$x^* + \epsilon_{i+1} = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x^* + \epsilon_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

  tedy $\epsilon_{i+1} = \epsilon_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
- Taylorův rozvoj

$$0 = f(x^*) = f(x_i) - \epsilon_i f'(x_i) + \frac{\epsilon_i^2 f''(\xi_i)}{2!}$$

  kde $\xi_i \in [0, \epsilon_i]$
- podělením $f'(x_i)$ a dosazením dostaneme

$$\epsilon_{i+1} = -\epsilon_i^2 \frac{f''(\xi_i)}{2f'(x_i)}$$

- kvadratická konvergence
  - v každém kroku se zdvojnásobí počet platných číslic

PA081: Programování numerických výpočtů

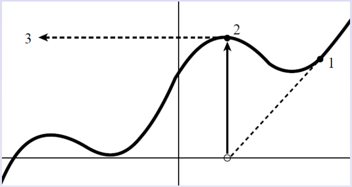
A. Křenek

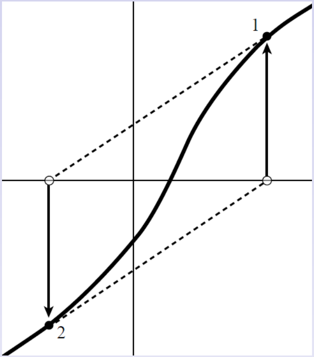
Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Newtonova metoda

Nešvary

- špatná globální konvergence
  - velká citlivost na lokální vlastnosti f mimo kořen





- prakticky nepoužitelná sama o sobě
  - nutno kombinovat s jinými metodami
  - vhodná k „vyleštění“ nahrubo nalezeného kořene

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Newtonova metoda

```
float rtnewt(void (*funcd)(float, float *, float *),
             float x1, float x2, float xacc)
{
   int j;
   float df,dx,f,rtn;
   rtn=0.5*(x1+x2);
   for (j=1;j<=JMAX;j++) {
      (*funcd)(rtn,&f,&df);
      dx=f/df;
      rtn -= dx;
      if ((x1-rtn)*(rtn-x2) < 0.0) {
        /* chyba, utekli jsme */
         return 0;
      }
      if (fabs(dx) < xacc) return rtn;
   }
   /* Příliš mnoho iterací */
   return 0;
}
```


Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Seminewtonovské metody

- výpočet derivace nemusí být možný nebo žádoucí
- aproximace

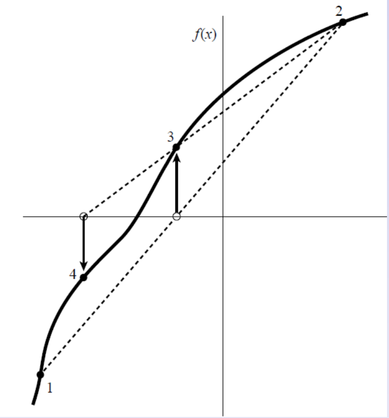
$$f'(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

  není vhodná
  - potřebuji $2\times$ vyhodnocení f, tj. rychost konvergence jen $\sqrt{2}$
  - malé δ – numerická nestabilita
  - velké δ – nepřesnost
- seminewtonovské metody – aproximace derivace „uvnitř“
  - metoda sečen
  - metoda regula falsi

Seminewtonovské metody

Metoda sečen

- derivace je aproximována směrnicí spojnice dvou odhadů
- vždy počítá s posledními dvěma odhady
- konverguje obecně rychleji
  - zlatý řez (1.618...)
- může porušit separaci kořene

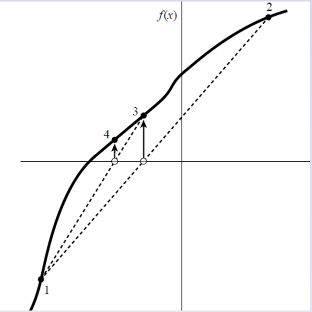


Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Seminewtonovské metody

Regula falsi

- důsledně zachovává separaci kořene
- v případě potřeby použije starší odhad



PA081: Programování numerických výpočtů

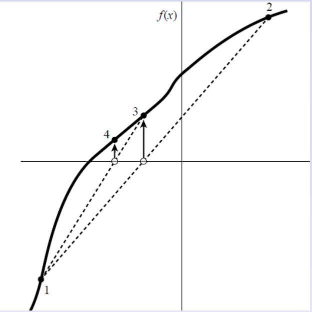
A. Křenek

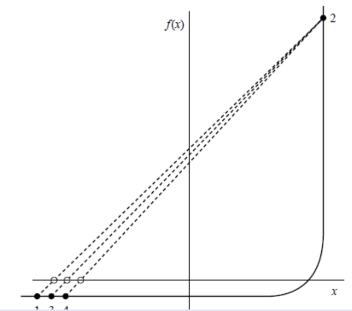
Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Seminewtonovské metody

Regula falsi

- důsledně zachovává separaci kořene
- v případě potřeby použije starší odhad





- v patologických případech pomalá konvergence

Riddersova metoda

- patologické chování předchozích metod
  - jedním z důvodů je proložení přímkou
- idea Riddersovy metody – proložit exponenciálou

$$p(x) = a + be^{cx}$$

- potřebné 3 body x_0, x_1, x_2, omezené na $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = d$
- $p(x) = 0$ v bodě

$$x_4 = x_0 + d\frac{\ln b}{\ln a} \qquad \text{kde} \qquad a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}, \quad b = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_0) - af(x_1)}$$

Riddersova metoda

- vyžaduje výpočet dvou logaritmů, příliš náročné
- nahrazeno aproximací

$$x_3 = x_0 + d\frac{u(3+u^2)}{v(3+v^2)} \qquad \text{kde} \qquad u = \frac{b-1}{b+1}, \quad v = \frac{a-1}{a+1}$$

- Ridders, C. *A new algorithm for computing a single root of a real continuous function*. IEEE Transactions on Circuits and Systems 26: 979-980, 1979.
- x_4 vždy spadne do $[x_0, x_2]$
- vybereme nejbližší z x_0, x_1, x_2 a dopočítáme třetí do stejné vzdálenosti
- rychlost konvergence $\sqrt{2}$
  - po krocích kvadraticky, ale vyžaduje dvojí vyhodnocení

Brentova metoda

- půlení intervalu jako bezpečný základ
- proložení inverzní kvadratickou funkcí pro urychlení konvergence
  - x jako kvadratická funkce y
- opět tři aktuální body odhadu x_1, x_2, x_3, výpočet vede na

$$x_3 = x_1 + \frac{P}{Q}$$

  kde P, Q jsou vyjádřeny z x_1, x_2, x_3 a $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ elementárními aritmetickými operacemi
- algoritmus hlídá zejména $|Q| \gg 0$, jinak se vrací k půlení intervalů
- prakticky zřejmě nejuniverzálnější metoda
  - nejsou-li k dispozici derivace
  - neřešíme-li speciální případ, kde jiná metoda funguje lépe a/nebo rychleji

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Kořeny polynomů

- speciální případ nelineární rovnice
  - lze aplikovat zjednodušená (rychlejší, přesnější) řešení
  - silnější sklony ke špatnému chování

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

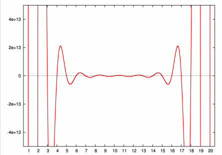
Obchodní případ

Shrnutí

Kořeny polynomů

- speciální případ nelineární rovnice
  - lze aplikovat zjednodušená (rychlejší, přesnější) řešení
  - silnější sklony ke špatnému chování
- špatná podmíněnost, např. Wilkinsonův polynom

$$w_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - i)$$



- reálný polynom stupně n má n kořenů

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Potenciální problémy

- násobné kořeny
  - derivace jsou nulové, selhávají Newtonova a seminewtonovské metody
  - sudě násobné kořeny nelze separovat
- kořeny mohou být komplexní, co s nimi?

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Faktorizace kořenů

- pro reálný kořen

$$P_n(x) = (x - x_n)Q_{n-1}(x)$$

- pro dvojici komplexních kořenů

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib))Q_{n-2}(x) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)Q_{n-2}(x) \end{aligned}$$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Faktorizace kořenů

- pro reálný kořen

$$P_n(x) = (x - x_n)Q_{n-1}(x)$$

- pro dvojici komplexních kořenů

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib))Q_{n-2}(x) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)Q_{n-2}(x) \end{aligned}$$

- známe-li x_n, dokážeme spočítat koeficienty $Q(x)$

$$\begin{aligned} &(q_0 + q_1 x + \dots)(x - x_n) \\ &\quad = -x_n q_0 + (q_0 - x_n q_1)x + (q_1 - x_n q_2) + \dots \end{aligned}$$

a tedy

$$q_0 = -\frac{p_0}{x_n} \qquad q_i = \frac{p_i - q_{i-1}}{x_n}$$

- analogicky opačným směrem, počínaje q_n

PA081: Programování numerických výpočtů

A. Křenek

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovské metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Faktorizace kořenů

- dvojitá rekurentní formule, hrozí numerická nestabilita
  - vypočteme nepřesné koeficienty Q_{n-1}, použijeme k výpočtu $Q_{n-2}, \ldots$
- stabilní chování
  - kořen s největší absolutní hodnotou, počítáme od q_0
  - kořen s nejmenší absolutní hodnotou, počítáme od q_n
- „leštění kořenů“
  - postupně nalezené kořeny chápeme jako aproximaci
  - použijeme v původním $P(x)$ např. do Newtonovy metody
  - příliš velká chyba může svést leštění k jinému kořenu (lze ohlídat)

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Přímočará metoda

- odchytíme reálný kořen dříve popsanými metodami
  - separace metodou pokusu a omylu
  - řešení zpravidla Newtonovou metodou
    - výpočet derivace polynomu je triviální
- provedeme faktorizaci, opakujeme pro další reálný kořen
  - zpravidla včetně „leštění“
- následně faktorizace kvadratických polynomů
  - Mullerova metoda – zobecnění metody sečen, aproximace parabolou
  - Bairstowova metoda – vede na Newtonovu metodu ve dvou dimenzích

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Další metody

- Laguerre
  - iterační hledání jednoho kořene včetně komplexních
  - triková manipulace s $\ln|P(x)|$ a jeho derivacemi
  - funguje i pro komplexní koeficienty
  - faktorizace a opakované použití
  - iterační krok lze použít k leštění
- Jenkins-Traub
  - propracovaná metoda, základ obecných knihoven
  - odvození vyžaduje 4 kapitoly v knize …
- Lehmer-Shur
  - generalizace separace kořenů na kruhy v komplexní rovině

Polynomy – vyhodnocení

- výpočetní náročnost

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

  - n násobení $x^i x$
  - n násobení $p_i x^i$
  - n sčítání

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Polynomy – vyhodnocení

- výpočetní náročnost

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

  - n násobení $x^i x$
  - n násobení $p_i x^i$
  - n sčítání
- Hornerův algoritmus

```
p[n]=a[n]
for (i=n-1;i>=0;i-)
    p[i]=xp[i+1]+a[i]
return p[0]
```

  - pouze $2n$ operací, výhradně `madd`
  - lze ukázat numerickou stabilitu
  - lze přímočaře rozšířit na výpočet derivací

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Kořeny polynomů

Vlastní hodnoty matic

- vlastní hodnoty matice A jsou kořeny charakteristického polynomu
$$P(x) = \det|A - xI|$$
- lze zkonstuovat matici
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{p_{m-1}}{p_m} & -\frac{p_{m-2}}{p_m} & \dots & -\frac{p_0}{p_m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
jejíž charakteristický polynom je právě $P(x) = \sum p_i x^i$
- lze aplikovat metody hledání vlastních hodnot
  - zpravidla pomalejší ale celkově robustnější

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Příklady

Montáž ložiska

K sestavení kluzného ložiska uložení ocelové mostní konstrukce je třeba na místě zasunout čep o vnějším průměru 313 mm do náboje o stejném vnitřním průměru.

Sestavení probíhá s podchlazeným čepem, díky tepelné roztažnosti materiálu je menší a ložisko lze sestavit. Bezpečné zmenšení průměru je 0.37 mm.

Na jakou teplotu je třeba čep podchladit, předpokládáme-li teplotu prostředí 20°C?

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Montáž ložiska

- koeficient tepelné roztažnosti oceli α závisí na teplotě
  - výpočet tedy není zcela triviální
- v rozmezí $\pm 200°$C je poměrně přesně vyjádřen funkcí

$$\alpha(T) = aT^2 + bT + C$$

kde $a = -8.27 \times 10^{-11}, b = 2.21 \times 10^{-8}, c = 1.17 \times 10^{-5}$
  - koeficienty získány regresí (proložením křivky) experimentálních dat
  - metodu regrese budeme probírat později

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Montáž ložiska

- poloměr po zchlazení počítáme pro $\Delta T \to 0$

$$
\begin{aligned}
r_x = r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0))(1 - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T)) \ldots \\
= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0) - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T) \\
+ (\Delta T)^2 \alpha(T_0) \alpha(T_0 - \Delta T)) \ldots
\end{aligned}
$$

- vedlo by na netriviální diferenciální rovnici
- protože $\alpha(T) \ll 1$, $\Delta T \ll 1$, lze nelineární členy zanedbat
- dostáváme zjednodušení

$$
r_x = r_0(1 - \hat{\alpha}(T_x)) \qquad \text{kde} \qquad \hat{\alpha}(T_x) = \int_{T_x}^{T_0} \alpha(T)\,dT
$$

a budeme řešit rovnici

$$
\hat{\alpha}(T_x) = \frac{r_0 - r_x}{r_0}
$$

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Montáž ložiska

- řešená funkce

$$f(T_x) = \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[\frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT\right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

$$= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

- potřebujeme
  - separaci „správného“ kořene
  - zvolit vhodnou numerickou metodu

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Montáž ložiska

- řešená funkce

$$f(T_x) = \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[\frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT\right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$
$$= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

- potřebujeme
  - separaci „správného“ kořene
  - zvolit vhodnou numerickou metodu
- koeficient u T_x^3 je kladný (a bylo záporné)
  - pro $T_x \to \infty$ také $f(T_x) \to \infty$
  - pro $T_x \to -\infty$ také $f(T_x) \to -\infty$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Montáž ložiska

- derivace řešené funkce

$$f'(T_x) = -aT_x^2 - bT_x - c$$

- $f(T_x)$ má jedno lokální minimum a jedno maximum
  - v bodech, kde $f'(T_x) = 0$
  - numericky stabilní výpočet?
    - první přednáška ;-)
    - $b = -2.21 \times 10^{-8}$, $\sqrt{D} = 6.60 \times 10^{-8}$ je OK
  - při nepřesném určení by mohla Newtonova metoda zabloudit, viz dále
- vypočtené extrémy

$$\begin{aligned} T_1 &= -265.544 & f(T_1) &= 0.000867609 \\ T_2 &= 532.775 & f(T_2) &= -0.00614507 \end{aligned}$$

Montáž ložiska

- dva „nesmyslné“ kořeny $T_- < T_1$ a $T_+ > T_2$
  - nemají fyzikální význam
  - T_+ – čep se při vysokých teplotách začne smršťovat
  - T_- – při nízkých teplotách se začne znovu roztahovat
  - obojí důsledkem aplikace regresní křivky mimo rozsah hodnot, ze kterých byla určena
- skutečný kořen v intervalu $[T_1, T_2]$
- funkce je spojitá, kořen je právě jeden
  - dokonalá separace
- umíme jednoduše počítat derivaci
  - navíc je na (T_1, T_2) derivace nenulová
- Newtonova metoda je ideální

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Montáž ložiska

- numerická stabilita výpočtu $f(T)$ a $f'(T)$
  - rozsah T řádově ve stovkách
  - členy polynomu v řádech 10^{-5}–10^{-2}
  - raději použijeme typ `double`
- potenciální problém Newtonovy metody $f'(T) \to 0$
  - nenastane díky známým vlastnostem funkce

Montáž ložiska

- Průběh výpočtu funkcí `rtnewt`
  - požadovaná absolutní přesnost 10^{-3}
  - nemá smysl více, vstupní data (koeficienty a, b, c) jsou méně přesné
  - a jak budeme při stavbě mostu chladit čep na takhle přesnou teplotu?

```
T               f(T)              f'(T)

133.615         -0.00263873       -1.31765e-05
-66.6454        -0.000221398      -9.85981e-06
-89.1           -8.66255e-06      -9.07435e-06
-90.0546        -1.68088e-08      -9.03911e-06
-90.0564        -6.3964e-14       -9.03904e-06
```

- v následujícím kroku už bylo dosaženo požadované přesnosti
- výsledek je -90.056°C

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Cirkusové číslo

Artisté připravují nové vystoupení.

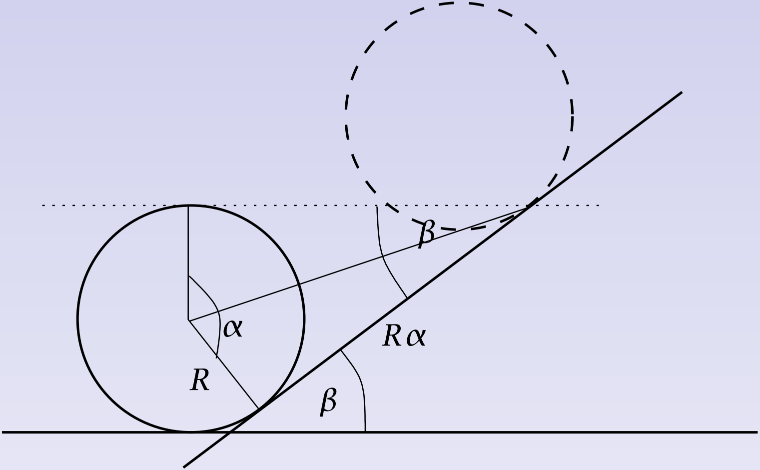
Na začátku se jeden z nich zachytí rukama i nohama v kruhové konstrukci o průměru 180 cm a další konstrukci vykoulí na plošinu.

Je třeba, aby se na konci tohoto pohybu původně nejvyšší bod kruhové konstrukce dotýkal plošiny a byl ve stejné výšce jako na začátku.

Jaká je potřebná délka a sklon plošiny?

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Cirkusové číslo



Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Cirkusové číslo

- označíme
  - R – poloměr kruhu
  - α – úhel otočení kruhu (v radiánech)
  - β – úhel naklonění plošiny
- délka pohybu kruhu po plošině je $R\alpha$
- z naznačeného čtyřúhelníku odečteme
  - $\alpha + \beta = \pi$ (další dva úhly jsou pravé)
  - $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{R}{R\alpha}$
- z toho vyplývá řešená rovnice

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\pi - \beta} \qquad \text{tedy} \qquad f(\beta) = (\pi - \beta) \tan \frac{\beta}{2} - 1 = 0$$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Cirkusové číslo

- separace kořene
  - β je ostrý úhel, tj. $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$
  - řešení je právě jedno
  - z geometrické podstaty problému
  - formulací rovnic jsme nepřidali falešný kořen
  - dáme si práci s exaktním důkazem nebo to rovnou zkusíme
- pro jistotu ověříme

$$f(0) = -1 \qquad f(\pi/2) = 0.5707963$$

- numericky nebezpečná by byla až oblast $\beta \to \pi$
  - vedla by na součin typu $0 \cdot \infty$
  - pohybujeme se v bezpečné vzdálenosti
- budeme předstírat, že neumíme spočítat derivaci
- ukážeme metodu sečen, Riddersovu, a Brentovu

Cirkusové číslo

Metoda puleni intervalu, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

```
        n      beta            f(beta)
        1      +0.0000000      -1.0000000
        2      +1.5707963      +0.5707963
        3      +0.7853982      -0.0240323
        4      +1.1780972      +0.3119657
        5      +0.9817477      +0.1544612
        6      +0.8835729      +0.0679638
        7      +0.8344855      +0.0226702
        8      +0.8099419      -0.0005027
        9      +0.8222137      +0.0111281
...
       15      +0.8105171      +0.0000445
       16      +0.8104212      -0.0000467
```

- počínaje třetím krokem výpočet vždy ve středu intervalu
- pomalá konvergence

Cirkusové číslo

Riddersova metoda, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+0.7853982	-0.0240323
4	+0.8103685	-0.0000968
5	+1.1905824	+0.3213144
6	+0.8104702	-0.0000001
7	+1.0005263	+0.1704016
(8)	+0.8104702	

4. první iterační výpočet
5. půlení intervalu mezi 2. a 4.
6. další iterace
7. půlení mezi 5. a 6.
8. výsledek, už je v toleranci

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Cirkusové číslo

Brentova metoda, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

```
n      beta         f(beta)
1      +0.0000000   -1.0000000
2      +1.5707963   +0.5707963
3      +1.0000000   +0.1699574
4      +0.7931377   -0.0165737
5      +0.8115179   +0.0009960
6      +0.8104759   +0.0000054
7      +0.8104259   -0.0000422
(8)    +0.8104759
```

- počítá primárním způsobem, nedošlo na bezpečné půlení intervalů
- srovnatelně rychlá konvergence s Riddersem
- při větší požadované přesnosti se liší ± o jeden krok

Cirkusové číslo

- všechny metody se v rámci požadované tolerance shodují
- rychlost konvergence dle očekávání
  - zdvojnásobení požadované přesnosti zdvojnásobí počet kroků půlení intervalů
  - Riddersova metoda naroste ze 7 na 9
  - Brentova dokonce jen ze 7 na 8
  - lepší výsledky než teoretická rychlost konvergence $\sqrt{2}$

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Cirkusové číslo

- délka pohybu po plošině je

$$R\alpha = R(\pi - \beta) = 2.098$$

- zbývá spočítat část plošiny od země k bodu dotyku

$$\tan\frac{\pi-\beta}{2} = \frac{R}{l} \qquad \text{tedy} \qquad l = \frac{R}{\tan((\pi-\beta)/2)} = 0.3861$$

- nehrozí významné numerické nepřesnosti
- celková délka plošiny je 2.484 m, sklon 46.44°

Obchodní případ

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.

Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

PA081: Programování numerických výpočtů

A. Křenek

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovské metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Obchodní případ

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.

Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

- uvažované náklady
  - fixní jednorázové (pořízení vybavení): \$20000
  - fixní roční (nájem, web, ...): \$15000
  - variabilní (komponenty, hodinová sazba práce, ...): $\$625n$
  - semivariabilní (náročnější logistika atd.) $\$30n^{1.5}$
- předpokládané příjmy
  - prodej počítačů: $\$1500n$
  - slevy (množstevní, VIP zákazníci, ...): $-\$10n^{1.5}$

Formulace problému a příklad

Prostá iterace

Separace kořenů

Půlení intervalů

Newton

Seminewtonovsk metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Obchodní případ

- řešená rovnice

$$f(n) = TC(n) - TS(n) = 35000 - 875n + 40n^{1.5} = 0$$

- první dva členy – lineární funkce
  - prochází bodem (0,35000)
  - osu x protíná v $35000/875 = 40$
- člen $40n^{1.5}$ způsobí „prohnutí“ nahoru
  - posune kořen z bodu 40 dál
  - přidá druhý kořen pro vyšší n
- zisku dosahujeme v oblasti mezi těmito kořeny

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Obchodní případ

- separace 1. kořene
  - podle předchozí úvahy $f(40) > 0$, skutečná hodnota 10119
  - zkusíme $f(80) = -6378$, vyhovuje
- separace 2. kořene
  - předchozí $f(80) = -6378$
  - hrubý odhad zanedbáním absolutního člene

$$-875n + 40n^{1.5} = 0 \qquad \text{tedy} \qquad n = \left(\frac{875}{40}\right)^2 = 478.51$$

  - zkusíme $f(500) = 44713$, vyhovuje
- numerická stabilita v dané separaci kořenů
  - součty/rozdíly čísel s minimálním řádovým rozdílem
  - reálně nás zajímá přesnost na jednotky
  - žádný potenciální problém

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Obchodní případ

- vypočtené kořeny 62.7 a 384.0
- výsledky v požadované přesnosti shodné všemi metodami
- chování jednotlivých metod (počty iterací)

přesnost	10^{-1}		10^{-4}	
kořen	1	2	1	2
půlení	11	15	21	25
Ridders	5	9	7	11
Brent	5	9	7	10

- umělá přesnost 10^{-4} – zdvojnásobení počtu platných číslic
- dokládá očekávanou rychlost konvergence
  - lineární pro půlení intervalů
  - $\sqrt{2}$ pro ostatní metody

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí

Shrnutí

- řešíme nelineární rovnice tvaru $F(x) = G(x)$ iteračními metodami
- redukce na hledání kořenů $f(x) = 0$
- separace kořenů je klíčová
  - nalezení intervalu, ve kterém leží právě jeden
- metoda půlení intervalů
  - robustní ale pomalá
- Newtonova metoda
  - rychlá konvergence
  - vyžaduje derivaci a dobrý počáteční odhad
- seminewtonovské metody
  - vnitřní aproximace derivace
  - metoda sečen, regula falsi
- pokročilé metody
  - aproximace funkce složitější křivkou
  - Ridders, Brent
- speciální metody pro polynomy

Formulace problému a příklad
Prostá iterace
Separace kořenů
Půlení intervalů
Newton
Seminewtonovsk metody
Sečny
Regula falsi
Polynomy
Příklady
Montáž ložiska
Cirkusové číslo
Obchodní případ
Shrnutí