

# PA081: Programování numerických výpočtů

## 2. Nelineární rovnice o jedné neznámé

Aleš Křenek

jaro 2014

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Obecná formulace problému

- ▶ hledáme řešení rovnice

$$F(x) = G(x)$$

kde alespoň jedna z funkcí  $F, G$  není lineární

- ▶ víceméně všechny numerické metody jsou **iterační**
  - ▶ začínáme s odhadem řešení  $x_0$
  - ▶ v každém kroku odhad postupně zpřesňujeme
- ▶ výpočet končí dosažením kritéria zastavení
  - ▶ dosáhli jsme dostatečně přesné aproximace řešení

# Obecná formulace problému

- ▶ hledáme řešení rovnice

$$F(x) = G(x)$$

kde alespoň jedna z funkcí  $F, G$  není lineární

- ▶ víceméně všechny numerické metody jsou **iterační**
  - ▶ začínáme s odhadem řešení  $x_0$
  - ▶ v každém kroku odhad postupně zpřesňujeme
- ▶ výpočet končí dosažením kritéria zastavení
  - ▶ dosáhli jsme dostatečně přesné aproximace řešení
- ▶ anebo
  - ▶ rovnice nemá řešení
  - ▶ použitá metoda pro danou rovnici nefunguje
  - ▶ špatně jsme odhadli  $x_0$
  - ▶ dosáhli jsme falešného řešení
- ▶ žádná metoda není dokonale univerzální
- ▶ bez jisté analýzy vlastností rovnice se neobejdeme

# Železniční příklad

Kolejnice délky  $2d$  je ohnutá do oblouku tak, že její konce jsou ve vzdálenosti  $2a$ . Jaká je vzdálenost středu kolejnice od spojnice krajních bodů?

- ▶ označíme  $R$  poloměr oblouku,  $\alpha$  úhel poloviny úseče,  $r$  hledanou vzdálenost
- ▶ platí rovnice

$$d = R\alpha \quad R \sin \alpha = a \quad r = R(1 - \cos \alpha)$$

- ▶ dosazením a jednoduchou úpravou

$$\frac{d}{a} \sin \alpha = \alpha$$

- ▶ hledáme **pevný bod** funkce
- ▶ kandidát na metodu **prosté iterace**

# Metoda prosté iterace

- ▶ rovnice ve tvaru  $x = f(x)$
- ▶ řešením je pevný bod funkce  $f$
- ▶ počítáme opakovaně  $x_{i+1} = f(x_i)$ 
  - ▶ až k dosažení kritéria konvergence

# Metoda prosté iterace

- ▶ rovnice ve tvaru  $x = f(x)$
- ▶ řešením je pevný bod funkce  $f$
- ▶ počítáme opakovaně  $x_{i+1} = f(x_i)$ 
  - ▶ až k dosažení kritéria konvergence
- ▶ kdy a proč to funguje? - věta o pevném bodě

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovská  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

Je-li pro  $K \subseteq \mathbb{R}$  funkce  $f: K \rightarrow K$  kontrakce, tj. existuje  $q \in (0, 1)$  tak, že  $\forall x, y \in K: |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ , potom existuje  $x^* \in K$  takové, že pro libovolné  $x_0 \in K$  je  $x^*$  limitou posloupnosti  $x_{i+1} = f(x_i)$ .

- ▶ idea důkazu

$$|x_{i+1} - x^*| = |f(x_i) - f(x^*)| < |x_i - x^*|$$

# Metoda prosté iterace

## Pro železniční příklad

- ▶ je zobrazení  $\alpha \mapsto \frac{d}{a} \sin \alpha$  kontrakce?
- ▶ postačující podmínka

$$\forall x \in K: f'(x) < 1 \quad \text{tedy} \quad \cos \alpha < \frac{a}{d}$$

- ▶  $\frac{d}{a} \sin \alpha = \alpha$  bude mít řešení v  $(\arccos \frac{a}{d}, \frac{\pi}{2})$

# Metoda prosté iterace

## Pro železniční příklad

- ▶ je zobrazení  $\alpha \mapsto \frac{d}{a} \sin \alpha$  kontrakce?
- ▶ postačující podmínka

$$\forall x \in K: f'(x) < 1 \quad \text{tedy} \quad \cos \alpha < \frac{a}{d}$$

- ▶  $\frac{d}{a} \sin \alpha = \alpha$  bude mít řešení v  $(\arccos \frac{a}{d}, \frac{\pi}{2})$
- ▶ implementačně velmi jednoduchá metoda
- ▶ zdánlivě velmi speciální případ
  - ▶ řešený problém lze často transformovat, aby splňoval podmínku kontrakce
- ▶ rychlost konvergence záleží na vlastnostech  $f(x)$



- ▶ pro rovnici  $F(x) = G(x)$  uvažujeme  $f(x) = F(x) - G(x)$
- ▶ provedeme **separaci kořenů**  $f(x)$ 
  - ▶ definiční obor  $f(x)$  rozdělíme na intervaly  $[a_i, b_i]$
  - ▶ v každém  $[a_i, b_i]$  má funkce právě jeden kořen
  - ▶  $f(a_i)f(b_i) < 0$
  - ▶  $f$  je na  $[a_i, b_i]$  spojitá
- ▶ nepovede-li se separace dokonale, musíme být připraveni na následky
- ▶ vybereme vhodnou metodu hledání kořene na  $[a_i, b_i]$
- ▶ stanovíme konkrétní podmínku ukončení

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovská  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

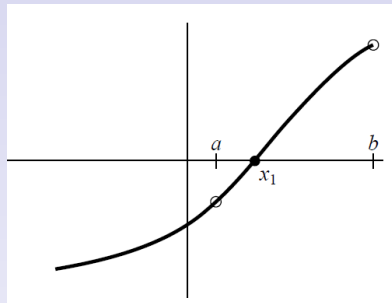
Shrnutí

# Separace kořenů

## Spojité funkce

- ▶ máme štěstí a  $f$  je spojitá, platí varianta **věty o střední hodnotě**

Je-li  $f$  na  $[a, b]$  spojitá a  $f(a)f(b) < 0$ , existuje  $x \in [a, b]$  tak, že  $f(x) = 0$



# Separace kořenů

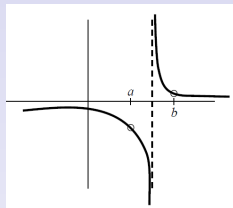
## Nespojitá funkce

- ▶ není-li  $f$  spojitá, ale je ohraničená
  - ▶ „kříží“ osu  $x$  v bodě nespojitosti
  - ▶ numericky nerozlišitelné od kořene

# Separace kořenů

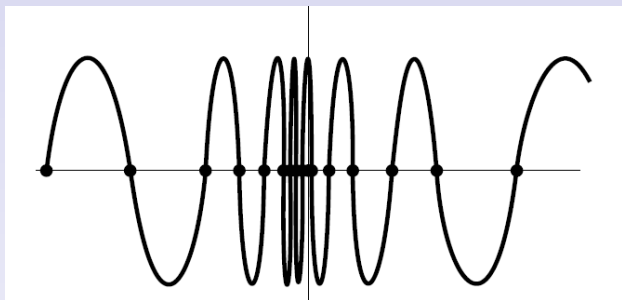
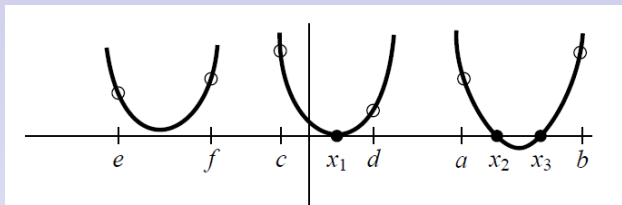
## Nespojitá funkce

- ▶ není-li  $f$  spojitá, ale je ohraničená
  - ▶ „kříží“ osu  $x$  v bodě nespojitosti
  - ▶ numericky nerozlišitelné od kořene
- ▶ není-li ani ohraničená
  - ▶ např.  $\frac{1}{x-c}$
  - ▶ některé metody najdou „kořen“ v  $c$
  - ▶ snadno identifikovatelný problém



# Separace kořenů

## Patologické případy



Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Separace kořenů

## Praktický postup

- ▶ základní analýza vlastností  $f$  je nezastupitelná
  - ▶ netušíme-li vůbec, zdali má kořeny, kde jsou, kolik jich je atd., je problém zpravidla někde jinde

# Separace kořenů

## Praktický postup

- ▶ základní analýza vlastností  $f$  je nezastupitelná
  - ▶ netušíme-li vůbec, zdali má kořeny, kde jsou, kolik jich je atd., je problém zpravidla někde jinde
- ▶ algoritmus „look inward“
  - ▶ alespoň nhrubo známe interval, kde by kořen měl být
  - ▶ rozdělíme na  $n$  menších a postupně prohledáváme
  - ▶ v případě neúspěchu můžeme opakovat s větším  $n$

# Separace kořenů

## Praktický postup

- ▶ základní analýza vlastností  $f$  je nezastupitelná
  - ▶ netušíme-li vůbec, zdali má kořeny, kde jsou, kolik jich je atd., je problém zpravidla někde jinde
- ▶ algoritmus „look inward“
  - ▶ alespoň nhrubo známe interval, kde by kořen měl být
  - ▶ rozdělíme na  $n$  menších a postupně prohledáváme
  - ▶ v případě neúspěchu můžeme opakovat s větším  $n$
- ▶ algoritmus „look outward“
  - ▶ poslední zoufalý pokus
  - ▶ počáteční interval expandujeme exponenciálně na tu stranu, kde se funkce blíží k ose  $x$
  - ▶ zpravidla funguje pro funkce, které mají pro  $x \rightarrow \pm\infty$  opačné znaménko



# Metoda půlení intervalů

## Princip

- ▶ začínáme se separovaným kořenem
  - ▶ pro daný interval  $[a, b]$  platí  $f(a)f(b) < 0$
- ▶ není-li  $\frac{b+a}{2}$  přesně kořen, platí právě jedna nerovnost

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)f(a) < 0 \quad f\left(\frac{b+a}{2}\right)f(b) < 0$$

- ▶ interval rozpůlíme a pokračujeme rekurzivně
- ▶ metoda vždy dokonverguje ke kořeni nebo k singularitě
- ▶ je-li jich více, odhalí jen jeden

# Metoda půlení intervalů

## Konvergence

- ▶ je-li požadovaná přesnost  $\epsilon$ , je třeba

$$n = \log_2 \frac{b - a}{\epsilon}$$

iteračních kroků

- ▶ **lineární rychlost konvergence**

- ▶ v každém kroku přibývá konstatně platných číslic přesnosti

- ▶ **kritéria ukončení**

- ▶ jsou-li  $a, b$  řádově srovnatelná, nemá smysl více iterací než než počet bitů mantisy
  - ▶ v opačném případě opět musíme vědět, co chceme
  - ▶ standardně se používá zastavení při velikosti intervalu

$$\epsilon \frac{|a| + |b|}{2}$$

kde  $\epsilon$  je přesnost daného datového typu

- ▶ metoda je robustní ale relativně pomalá

# Metoda půlení intervalů

```
float rtbis(float (*func)(float), float x1, float x2,  
           float xacc,int *iter)  
{  
    int j;  
    float dx,f,fmid,xmid,rtb;  
    f>(*func)(x1);  
    fmid>(*func)(x2);  
    rtb = f < 0.0 ? (dx=x2-x1,x1) : (dx=x1-x2,x2);  
    for (j=1;j<=JMAX;j++) {  
        fmid>(*func)(xmid=rtb+(dx *= 0.5));  
        if (fmid <= 0.0) rtb=xmid;  
        if (fabs(dx) < xacc || fmid == 0.0) {  
            *iter = j;  
            return rtb;  
        }  
    }  
}
```

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

**Půlení  
intervalů**

Newton

Seminewtonovská  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ také Newton-Raphsonova metoda
- ▶ odvozena z Taylorova rozvoje  $x^* = x_i + \delta_i$

$$f(x_i + \delta_i) = f(x_i) + f'(x_i)\delta_i + \frac{f''(x_i)\delta_i^2}{2!} + \dots$$

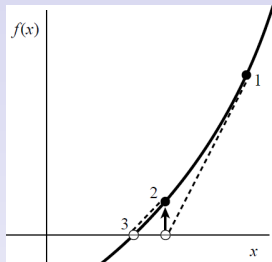
- ▶ zanedbáme vyšší derivace

$$\delta_i \doteq -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- ▶ opakujeme iterační krok

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- ▶ nutno spočítat i derivaci

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenůPůlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Newtonova metoda

## Konvergence

- ▶ označíme  $x^*$  kořen, a  $\epsilon_i$  odchylky  $x_i - x^*$

$$x^* + \epsilon_{i+1} = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x^* + \epsilon_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

tedy  $\epsilon_{i+1} = \epsilon_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

- ▶ Taylorův rozvoj

$$0 = f(x^*) = f(x_i) - \epsilon_i f'(x_i) + \frac{\epsilon_i^2 f''(\xi_i)}{2!}$$

kde  $\xi_i \in [0, \epsilon_i]$

- ▶ podělením  $f'(x_i)$  a dosazením dostaneme

$$\epsilon_{i+1} = -\epsilon_i^2 \frac{f''(\xi_i)}{2f'(x_i)}$$

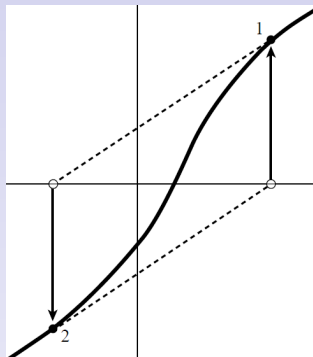
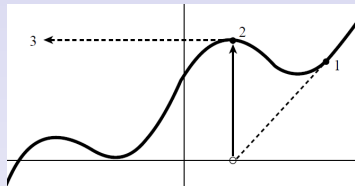
- ▶ kvadratická konvergence

- ▶ v každém kroku se zdvojnásobí počet platných číslic

# Newtonova metoda

Nešvary

- ▶ špatná globální konvergence
  - ▶ velká citlivost na lokální vlastnosti  $f$  mimo kořen



- ▶ prakticky nepoužitelná sama o sobě
  - ▶ nutno kombinovat s jinými metodami
  - ▶ vhodná k „vyleštění“ nahrubo nalezeného kořene

# Newtonova metoda

```
float rtnewt(void (*funcd)(float, float *, float *),
             float x1, float x2, float xacc)
{
    int j;
    float df,dx,f,rtn;
    rtn=0.5*(x1+x2);
    for (j=1;j<=JMAX;j++) {
        (*funcd)(rtn,&f,&df);
        dx=f/df;
        rtn -= dx;
        if ((x1-rtn)*(rtn-x2) < 0.0) {
            /* chyba, utekli jsme */
            return 0;
        }
        if (fabs(dx) < xacc) return rtn;
    }
    /* Příliš mnoho iterací */
    return 0;
}
```

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

**Newton**

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ výpočet derivace nemusí být možný nebo žádoucí
- ▶ aproximace

$$f'(x) = \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

není vhodná

- ▶ potřebuji  $2 \times$  vyhodnocení  $f$ , tj. rychlost konvergence jen  $\sqrt{2}$
- ▶ malé  $\delta$  - numerická nestabilita
- ▶ velké  $\delta$  - nepřesnost
- ▶ **seminewtonovské metody** - aproximace derivace „uvnitř“
  - ▶ metoda sečen
  - ▶ metoda regula falsi

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

**Seminewtonovské  
metody**

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

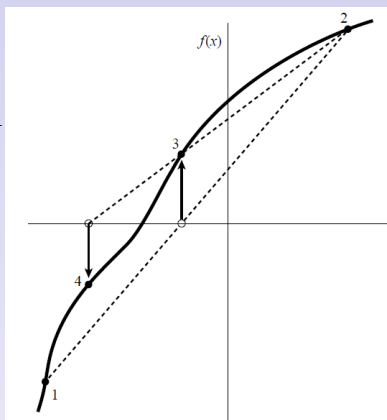
Shrnutí



# Seminewtonovské metody

## Metoda sečen

- ▶ derivace je aproximována směrnicí spojnice dvou odhadů
- ▶ vždy počítá s posledními dvěma odhady
- ▶ konverguje obecně rychleji
  - ▶ zlatý řez (1.618...)
- ▶ může porušit separaci kořene







- ▶ patologické chování předchozích metod
  - ▶ jedním z důvodů je proložení přímkou
- ▶ idea Riddersovy metody - proložit exponenciálou

$$p(x) = a + be^{cx}$$

- ▶ potřebné 3 body  $x_0, x_1, x_2$ , omezené na  
 $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = d$
- ▶  $p(x) = 0$  v bodě

$$x_4 = x_0 + d \frac{\ln b}{\ln a} \quad \text{kde}$$

$$a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$
$$b = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_0) - af(x_1)}$$

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenůPůlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Riddersova metoda

- ▶ vyžaduje výpočet dvou logaritmů, příliš náročné
- ▶ nahrazeno aproximací

$$x_3 = x_0 + d \frac{u(3 + u^2)}{v(3 + v^2)} \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} u &= \frac{b - 1}{b + 1} \\ v &= \frac{a - 1}{a + 1} \end{aligned}$$

- ▶ Ridders, C. *A new algorithm for computing a single root of a real continuous function*. IEEE Transactions on Circuits and Systems 26: 979-980, 1979.
- ▶  $x_4$  vždy spadne do  $[x_0, x_2]$
- ▶ vybereme nejbližší z  $x_0, x_1, x_2$  a dopočítáme třetí do stejné vzdálenosti
- ▶ rychlost konvergence  $\sqrt{2}$ 
  - ▶ po krocích kvadraticky, ale vyžaduje dvojí vyhodnocení

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Brentova metoda

- ▶ půlení intervalu jako bezpečný základ
- ▶ proložení inverzní kvadratickou funkcí pro urychlení konvergence
  - ▶  $x$  jako kvadratická funkce  $y$
- ▶ opět tři aktuální body odhadu  $x_1, x_2, x_3$ , výpočet vede na

$$x_3 = x_1 + \frac{P}{Q}$$

kde  $P, Q$  jsou vyjádřeny z  $x_1, x_2, x_3$  a  $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$  elementárními aritmetickými operacemi

- ▶ algoritmus hlídá zejména  $|Q| \gg 0$ , jinak se vrací k půlení intervalů
- ▶ prakticky zřejmě nejuniverzálnější metoda
  - ▶ nejsou-li k dispozici derivace
  - ▶ neřešíme-li speciální případ, kde jiná metoda funguje lépe a/nebo rychleji

- ▶ speciální případ nelineární rovnice
  - ▶ lze aplikovat zjednodušená (rychlejší, přesnější) řešení
  - ▶ silnější sklony ke špatnému chování

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

**Polynomy**

Příklady

Montáž ložiska

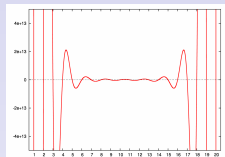
Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ speciální případ nelineární rovnice
  - ▶ lze aplikovat zjednodušená (rychlejší, přesnější) řešení
  - ▶ silnější sklony ke špatnému chování
- ▶ špatná podmíněnost, např. Wilkinsonův polynom

$$w_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - i)$$



- ▶ reálný polynom stupně  $n$  má  $n$  kořenů

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí



# Kořeny polynomů

## Potenciální problémy

- ▶ násobné kořeny
  - ▶ derivace jsou nulové, selhávají Newtonova a seminewtonovské metody
  - ▶ sudě násobné kořeny nelze separovat
- ▶ kořeny mohou být komplexní, co s nimi?

# Kořeny polynomů

## Faktorizace kořenů

- ▶ pro reálný kořen

$$P_n(x) = (x - x_n)Q_{n-1}(x)$$

- ▶ pro dvojici komplexních kořenů

$$\begin{aligned}P_n(x) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib))Q_{n-2}(x) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)Q_{n-2}(x)\end{aligned}$$

# Kořeny polynomů

## Faktorizace kořenů

- ▶ pro reálný kořen

$$P_n(x) = (x - x_n)Q_{n-1}(x)$$

- ▶ pro dvojici komplexních kořenů

$$\begin{aligned}P_n(x) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib))Q_{n-2}(x) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)Q_{n-2}(x)\end{aligned}$$

- ▶ známe-li  $x_n$ , dokážeme spočítat koeficienty  $Q(x)$

$$\begin{aligned}(q_0 + q_1x + \dots)(x - x_n) \\ = -x_nq_0 + (q_0 - x_nq_1)x + (q_1 - x_nq_2) + \dots\end{aligned}$$

a tedy

$$q_0 = -\frac{p_0}{x_n} \quad q_i = \frac{p_i - q_{i-1}x_n}{x_n}$$

- ▶ analogicky opačným směrem, počínaje  $q_n$

# Kořeny polynomů

## Faktorizace kořenů

- ▶ dvojitá rekurentní formule, hrozí numerická nestabilita
  - ▶ vypočteme nepřesné koeficienty  $Q_{n-1}$ , použijeme k výpočtu  $Q_{n-2}, \dots$
- ▶ stabilní chování
  - ▶ kořen s největší absolutní hodnotou, počítáme od  $q_0$
  - ▶ kořen s nejmenší absolutní hodnotou, počítáme od  $q_n$
- ▶ „leštění kořenů“
  - ▶ postupně nalezené kořeny chápeme jako aproximaci
  - ▶ použijeme v původním  $P(x)$  např. do Newtonovy metody
  - ▶ příliš velká chyba může svést leštění k jinému kořenu (lze ohlídat)

# Kořeny polynomů

## Přímočará metoda

- ▶ odchytneme reálný kořen dříve popsanými metodami
  - ▶ separace metodou pokusu a omylu
  - ▶ řešení zpravidla Newtonovou metodou
    - ▶ výpočet derivace polynomu je triviální
- ▶ provedeme faktorizaci, opakujeme pro další reálný kořen
  - ▶ zpravidla včetně „leštění“
- ▶ následně faktorizace kvadratických polynomů
  - ▶ Mullerova metoda - zobecnění metody sečen, aproximace parabolou
  - ▶ Bairstowova metoda - vede na Newtonovu metodu ve dvou dimenzích

- ▶ Laguerre
  - ▶ iterační hledání jednoho kořene včetně komplexních
  - ▶ triková manipulace s  $\ln |P(x)|$  a jeho derivacemi
  - ▶ funguje i pro komplexní koeficienty
  - ▶ faktorizace a opakované použití
  - ▶ iterační krok lze použít k leštění
- ▶ Jenkins-Traub
  - ▶ propracovaná metoda, základ obecných knihoven
  - ▶ odvození vyžaduje 4 kapitoly v knize ...
- ▶ Lehmer-Shur
  - ▶ generalizace separace kořenů na kruhy v komplexní rovině

# Kořeny polynomů

## Vlastní hodnoty matic

- ▶ vlastní hodnoty matice  $A$  jsou kořeny charakteristického polynomu

$$P(x) = \det |A - xI|$$

- ▶ lze zkonstruovat matici

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{p_{m-1}}{p_m} & -\frac{p_{m-2}}{p_m} & \dots & -\frac{p_0}{p_m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

jejíž charakteristický polynom je právě  $P(x) = \sum p_i x^i$

- ▶ lze aplikovat metody hledání vlastních hodnot
  - ▶ zpravidla pomalejší ale celkově robustnější

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

**Příklady**

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Příklady



# Montáž ložiska

K sestavení kluzného ložiska uložení ocelové mostní konstrukce je třeba na místě zasunout čep o vnějším průměru 313 mm do náboje o stejném vnitřním průměru.

Sestavení probíhá s podchlazeným čepem, díky tepelné roztažnosti materiálu je menší a ložisko lze sestavit. Bezpečné zmenšení průměru je 0.37 mm.

Na jakou teplotu je třeba čep podchládit, předpokládáme-li teplotu prostředí 20°C?

- ▶ koeficient tepelné roztažnosti oceli  $\alpha$  závisí na teplotě
  - ▶ výpočet tedy není zcela triviální
- ▶ v rozmezí  $\pm 200^\circ\text{C}$  je poměrně přesně vyjádřen funkcí

$$\alpha(T) = aT^2 + bT + C$$

kde  $a = -8.27 \times 10^{-11}$ ,  $b = 2.21 \times 10^{-8}$ ,  $c = 1.17 \times 10^{-5}$

- ▶ koeficienty získány regresí (proložením křivky) experimentálních dat
- ▶ metodu regrese budeme probírat později

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovská  
metoda

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Montáž ložiska

- ▶ poloměr po zchlazení počítáme pro  $\Delta T \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}r_x &= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0))(1 - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T)) \dots \\ &= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0) - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T) \\ &\quad + (\Delta T)^2 \alpha(T_0) \alpha(T_0 - \Delta T)) \dots\end{aligned}$$

- ▶ vedlo by na netriviální diferenciální rovnici
- ▶ protože  $\alpha(T) \ll 1$ ,  $\Delta T \ll 1$ , lze nelineární členy zanedbat
- ▶ dostáváme zjednodušení

$$r_x = r_0(1 - \hat{\alpha}(T_x)) \quad \text{kde} \quad \hat{\alpha}(T_x) = \int_{T_x}^{T_0} \alpha(T) dT$$

a budeme řešit rovnici

$$\hat{\alpha}(T_x) = \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ řešená funkce

$$\begin{aligned} f(T_x) &= \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[ \frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT \right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \\ &= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \end{aligned}$$

- ▶ potřebujeme
  - ▶ separaci „správného“ kořene
  - ▶ zvolit vhodnou numerickou metodu

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ řešená funkce

$$\begin{aligned} f(T_x) &= \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[ \frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT \right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \\ &= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \end{aligned}$$

- ▶ potřebujeme
  - ▶ separaci „správného“ kořene
  - ▶ zvolit vhodnou numerickou metodu
- ▶ koeficient u  $T_x^3$  je kladný ( $a$  bylo záporné)
  - ▶ pro  $T_x \rightarrow \infty$  také  $f(T_x) \rightarrow \infty$
  - ▶ pro  $T_x \rightarrow -\infty$  také  $f(T_x) \rightarrow -\infty$

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ derivace řešené funkce

$$f'(T_x) = -aT_x^2 - bT_x - c$$

- ▶  $f(T_x)$  má jedno lokální minimum a jedno maximum
  - ▶ v bodech, kde  $f'(T_x) = 0$
  - ▶ numericky stabilní výpočet?
    - ▶ první přednáška ;-)
    - ▶  $b = -2.21 \times 10^{-8}$ ,  $\sqrt{D} = 6.60 \times 10^{-8}$  je OK
  - ▶ při nepřesném určení by mohla Newtonova metoda zabloudit, viz dále
- ▶ vypočtené extrémy

$$T_1 = -265.544 \quad f(T_1) = 0.000867609$$

$$T_2 = 532.775 \quad f(T_2) = -0.00614507$$

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ dva „nesmyslné“ kořeny  $T_- < T_1$  a  $T_+ > T_2$ 
  - ▶ nemají fyzikální význam
  - ▶  $T_+$  - čep se při vysokých teplotách začne smršťovat
  - ▶  $T_-$  - při nízkých teplotách se začne znovu roztahovat
  - ▶ obojí důsledkem aplikace regresní křivky mimo rozsah hodnot, ze kterých byla určena
- ▶ skutečný kořen v intervalu  $[T_1, T_2]$
- ▶ funkce je spojitá, kořen je právě jeden
  - ▶ dokonalá separace
- ▶ umíme jednoduše počítat derivaci
  - ▶ navíc je na  $(T_1, T_2)$  derivace nenulová
- ▶ Newtonova metoda je ideální

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ numerická stabilita výpočtu  $f(T)$  a  $f'(T)$ 
  - ▶ rozsah  $T$  řádově ve stovkách
  - ▶ členy polynomu v řádech  $10^{-5}$ - $10^{-2}$
  - ▶ raději použijeme typ `double`
- ▶ potenciální problém Newtonovy metody  $f'(T) \rightarrow 0$ 
  - ▶ nenastane díky známým vlastnostem funkce



# Montáž ložiska

- ▶ Průběh výpočtu funkcí `rtnewt`
  - ▶ požadovaná absolutní přesnost  $10^{-3}$
  - ▶ nemá smysl více, vstupní data (koeficienty  $a, b, c$ ) jsou méně přesné
  - ▶ a jak budeme při stavbě mostu chladit čep na takhle přesnou teplotu?

T	f(T)	f'(T)
133.615	-0.00263873	-1.31765e-05
-66.6454	-0.000221398	-9.85981e-06
-89.1	-8.66255e-06	-9.07435e-06
-90.0546	-1.68088e-08	-9.03911e-06
-90.0564	-6.3964e-14	-9.03904e-06

- ▶ v následujícím kroku už bylo dosaženo požadované přesnosti
- ▶ výsledek je  $-90.056^{\circ}\text{C}$

Artisté připravují nové vystoupení.

Na začátku se jeden z nich zachytí rukama i nohama v kruhové konstrukci o průměru 180 cm a další konstrukci vykoulí na plošinu.

Je třeba, aby se na konci tohoto pohybu původně nejvyšší bod kruhové konstrukce dotýkal plošiny a byl ve stejné výšce jako na začátku.

Jaká je potřebná délka a sklon plošiny?

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovská  
metoda

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

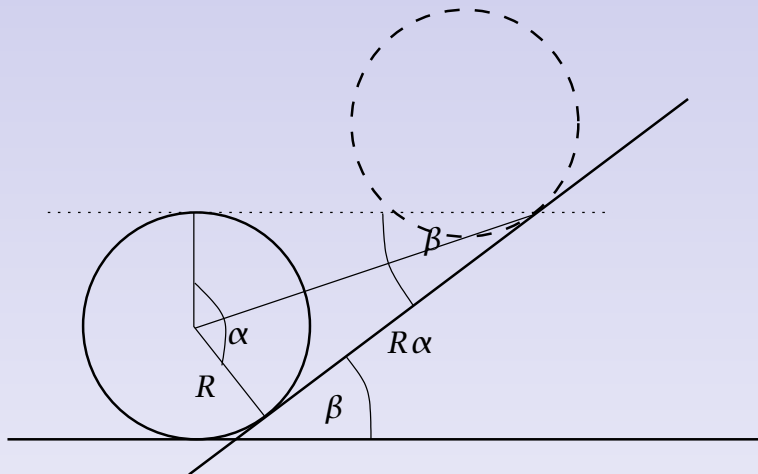
Montáž ložiska

**Cirkusové číslo**

Obchodní případ

Shrnutí

# Cirkusové číslo



Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

**Cirkusové číslo**

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ označíme
  - ▶  $R$  - poloměr kruhu
  - ▶  $\alpha$  - úhel otočení kruhu (v radiánech)
  - ▶  $\beta$  - úhel naklonění plošiny
- ▶ délka pohybu kruhu po plošině je  $R\alpha$
- ▶ z naznačeného čtyřúhelníku odečteme
  - ▶  $\alpha + \beta = \pi$  (další dva úhly jsou pravé)
  - ▶  $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{R}{R\alpha}$
- ▶ z toho vyplývá řešená rovnice

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\pi - \beta} \quad \text{tedy} \quad f(\beta) = (\pi - \beta) \tan \frac{\beta}{2} - 1 = 0$$

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ separace kořene
  - ▶  $\beta$  je ostrý úhel, tj.  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$
  - ▶ řešení je právě jedno
  - ▶ z geometrické podstaty problému
  - ▶ formulací rovnic jsme nepřidali falešný kořen
  - ▶ dáme si práci s exaktním důkazem nebo to rovnou zkusíme
- ▶ pro jistotu ověříme

$$f(0) = -1 \quad f(\pi/2) = 0.5707963$$

- ▶ numericky nebezpečná by byla až oblast  $\beta \rightarrow \pi$ 
  - ▶ vedla by na součin typu  $0 \cdot \infty$
  - ▶ pohybujeme se v bezpečné vzdálenosti
- ▶ budeme předstírat, že neumíme spočítat derivaci
- ▶ ukážeme metodu sečen, Riddersovu, a Brentovu

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Cirkusové číslo

Metoda puleni intervalu, požadovaná absolutní přesnost  $10^{-4}$

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+0.7853982	-0.0240323
4	+1.1780972	+0.3119657
5	+0.9817477	+0.1544612
6	+0.8835729	+0.0679638
7	+0.8344855	+0.0226702
8	+0.8099419	-0.0005027
9	+0.8222137	+0.0111281
...		
15	+0.8105171	+0.0000445
16	+0.8104212	-0.0000467

- ▶ počínaje třetím krokem výpočet vždy ve středu intervalu
- ▶ pomalá konvergence

# Cirkusové číslo

Riddersova metoda, požadovaná absolutní přesnost  $10^{-4}$

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+0.7853982	-0.0240323
4	+0.8103685	-0.0000968
5	+1.1905824	+0.3213144
6	+0.8104702	-0.0000001
7	+1.0005263	+0.1704016
(8)	+0.8104702	

4. první iterační výpočet
5. půlení intervalu mezi 2. a 4.
6. další iterace
7. půlení mezi 5. a 6.
8. výsledek, už je v toleranci

# Cirkusové číslo

Brentova metoda, požadovaná absolutní přesnost  $10^{-4}$

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+1.0000000	+0.1699574
4	+0.7931377	-0.0165737
5	+0.8115179	+0.0009960
6	+0.8104759	+0.0000054
7	+0.8104259	-0.0000422
(8)	+0.8104759	

- ▶ počítá primárním způsobem, nedošlo na bezpečné půlení intervalů
- ▶ srovnatelně rychlá konvergence s Riddersem
- ▶ při větší požadované přesnosti se liší  $\pm$  o jeden krok



- ▶ všechny metody se v rámci požadované tolerance shodují
- ▶ rychlost konvergence dle očekávání
  - ▶ zdvojnásobení požadované přesnosti zdvojnásobí počet kroků půlení intervalů
  - ▶ Riddersova metoda naroste ze 7 na 9
  - ▶ Brentova dokonce jen ze 7 na 8
  - ▶ lepší výsledky než teoretická rychlost konvergence  $\sqrt{2}$

- ▶ délka pohybu po plošině je

$$R\alpha = R(\pi - \beta) = 2.098$$

- ▶ zbývá spočítat část plošiny od země k bodu dotyku

$$\tan \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{R}{l} \quad \text{tedy} \quad l = \frac{R}{\tan((\pi - \beta)/2)} = 0.3861$$

- ▶ nehrozí významné numerické nepřesnosti
- ▶ celková délka plošiny je 2.484 m, sklon 46.44°

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenůPůlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovská  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Obchodní případ

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.  
Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

**Obchodní případ**

Shrnutí

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.

Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

- ▶ uvažované náklady
  - ▶ fixní jednorázové (pořízení vybavení): \$20000
  - ▶ fixní roční (nájem, web, ...): \$15000
  - ▶ variabilní (komponenty, hodinová sazba práce, ...):  $\$625n$
  - ▶ semivariabilní (náročnější logistika atd.)  $\$30n^{1.5}$
- ▶ předpokládané příjmy
  - ▶ prodej počítačů:  $\$1500n$
  - ▶ slevy (množstevní, VIP zákazníci, ...):  $-\$10n^{1.5}$

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

- ▶ řešená rovnice

$$f(n) = TC(n) - TS(n) = 35000 - 875n + 40n^{1.5} = 0$$

- ▶ první dva členy - lineární funkce
  - ▶ prochází bodem (0,35000)
  - ▶ osu  $x$  protíná v  $35000/875 = 40$
- ▶ člen  $40n^{1.5}$  způsobí „prohnutí“ nahoru
  - ▶ posune kořen z bodu 40 dál
  - ▶ přidá druhý kořen pro vyšší  $n$
- ▶ zisku dosahujeme v oblasti mezi těmito kořeny

# Obchodní případ

- ▶ separace 1. kořene
  - ▶ podle předchozí úvahy  $f(40) > 0$ , skutečná hodnota 10119
  - ▶ zkusíme  $f(80) = -6378$ , vyhovuje
- ▶ separace 2. kořene
  - ▶ předchozí  $f(80) = -6378$
  - ▶ hrubý odhad zanedbáním absolutního členu

$$-875n + 40n^{1.5} = 0 \quad \text{tedy} \quad n = \left(\frac{875}{40}\right)^2 = 478.51$$

- ▶ zkusíme  $f(500) = 44713$ , vyhovuje
- ▶ numerická stabilita v dané separaci kořenů
  - ▶ součty/rozdíly čísel s minimálním řádovým rozdílem
  - ▶ reálně nás zajímá přesnost na jednotky
  - ▶ žádný potenciální problém

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovská  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Obchodní případ

- ▶ vypočtené kořeny 62.7 a 384.0
- ▶ výsledky v požadované přesnosti shodné všemi metodami
- ▶ chování jednotlivých metod (počty iterací)

přesnost	$10^{-1}$		$10^{-4}$	
kořen	1	2	1	2
půlení	11	15	21	25
Ridders	5	9	7	11
Brent	5	9	7	10

- ▶ umělá přesnost  $10^{-4}$  - zdvojnásobení počtu platných číslic
- ▶ dokládá očekávanou rychlost konvergence
  - ▶ lineární pro půlení intervalů
  - ▶  $\sqrt{2}$  pro ostatní metody

Formulace  
problému a  
příklad

Prostá iterace

Separace  
kořenů

Půlení  
intervalů

Newton

Seminewtonovské  
metody

Sečny

Regula falsi

Polynomy

Příklady

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní případ

Shrnutí

# Shrnutí

- ▶ řešíme nelineární rovnice tvaru  $F(x) = G(x)$  iteračními metodami
- ▶ redukce na hledání kořenů  $f(x) = 0$
- ▶ separace kořenů je klíčová
  - ▶ nalezení intervalu, ve kterém leží právě jeden
- ▶ metoda půlení intervalů
  - ▶ robustní ale pomalá
- ▶ Newtonova metoda
  - ▶ rychlá konvergence
  - ▶ vyžaduje derivaci a dobrý počáteční odhad
- ▶ seminewtonovské metody
  - ▶ vnitřní aproximace derivace
  - ▶ metoda sečen, regula falsi
- ▶ pokročilé metody
  - ▶ aproximace funkce složitější křivkou
  - ▶ Ridders, Brent
- ▶ speciální metody pro polynomy