

# IB112 Základy matematiky

Základy kombinatoriky a kombinatorická pravděpodobnost

Jan Strejček

- *Výběry prvků bez opakování*
  - permutace a faktoriál
  - variace
  - kombinace a kombinační čísla
- *Výběry prvků s opakováním*
  - permutace
  - variace
  - kombinace
- *Obecné principy počítání složených výběrů*
  - princip nezávislých výběrů
  - princip dvojího počítání
- *Kombinatorická pravděpodobnost*
  - konečný pravděpodobnostní prostor
  - nezávislost jevů a podmíněná pravděpodobnost
  - střední hodnota

## Výběry prvků bez opakování

# Permutace bez opakování

## Definice (Permutace bez opakování)

*Necht'  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích. **Permutace** množiny  $M$  je uspořádaná posloupnost všech prvků z  $M$ .*

## Příklad

- Vypište všechny permutace množiny  $\{a, b, c, d\}$ .

# Permutace bez opakování

## Definice (Permutace bez opakování)

Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích. **Permutace** množiny  $M$  je uspořádaná posloupnost všech prvků z  $M$ .

## Příklad

- Vypište všechny permutace množiny  $\{a, b, c, d\}$ .

$(a, b, c, d)$	$(b, a, c, d)$	$(c, a, b, d)$	$(d, a, b, c)$
$(a, b, d, c)$	$(b, a, d, c)$	$(c, a, d, b)$	$(d, a, c, b)$
$(a, c, b, d)$	$(b, c, a, d)$	$(c, b, a, d)$	$(d, b, a, c)$
$(a, c, d, b)$	$(b, c, d, a)$	$(c, b, d, a)$	$(d, b, c, a)$
$(a, d, b, c)$	$(b, d, a, c)$	$(c, d, a, b)$	$(d, c, a, b)$
$(a, d, c, b)$	$(b, d, c, a)$	$(c, d, b, a)$	$(d, c, b, a)$

## Věta

Počet všech permutací  $n$ -prvkové množiny je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Funkce  $n!$  se nazývá *faktoriál*. Klademe  $0! = 1$ .

## Příklad

- Kolika způsoby lze v ruce uspořádat 7 karet?

## Věta

Počet všech permutací  $n$ -prvkové množiny je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Funkce  $n!$  se nazývá *faktoriál*. Klademe  $0! = 1$ .

## Příklad

- Kolika způsoby lze v ruce uspořádat 7 karet?
- Odpověď je  $7! = 5\,040$ .

## Definice (Variace bez opakování)

*Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo splňující  $k \leq n$ .  $k$ -prvkovou **variací** na množině  $M$  rozumíme uspořádanou  $k$ -tici sestavenou z prvků z  $M$  tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.*

## Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové variace na množině  $\{a, b, c, d\}$ .

## Definice (Variace bez opakování)

*Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo splňující  $k \leq n$ .  $k$ -prvkovou **variací** na množině  $M$  rozumíme uspořádanou  $k$ -tici sestavenou z prvků z  $M$  tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.*

## Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové variace na množině  $\{a, b, c, d\}$ .

$(a, b)$	$(b, a)$	$(c, a)$	$(d, a)$
$(a, c)$	$(b, c)$	$(c, b)$	$(d, b)$
$(a, d)$	$(b, d)$	$(c, d)$	$(d, c)$

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových variací na množině s  $n$  prvky je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

- Permutace množiny s  $n$  prvky je totéž jako  $n$ -prvková variace.
- Na množině s  $n$  prvky je vždy stejně  $n$ -prvkových variací jako  $(n-1)$ -prvkových variací. (Proč?)

## Příklad

- Kolik trojčiferných čísel lze sestavit z číslic  $1, 2, \dots, 9$ , jestliže se žádné číslice neopakují?

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových variací na množině s  $n$  prvky je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

- Permutace množiny s  $n$  prvky je totéž jako  $n$ -prvková variace.
- Na množině s  $n$  prvky je vždy stejně  $n$ -prvkových variací jako  $(n-1)$ -prvkových variací. (Proč?)

## Příklad

- Kolik trojčiferných čísel lze sestavit z číslic  $1, 2, \dots, 9$ , jestliže se žádné číslice neopakují?
- Odpověď je  $\frac{9!}{6!} = 504$ .

## Definice (Kombinace bez opakování)

*Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo splňující  $k \leq n$ .  $k$ -prvkovou **kombinací** na množině  $M$  rozumíme  $k$ -prvkovou podmnožinu množiny  $M$ .*

## Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace na množině  $\{a, b, c, d, e\}$ .

## Definice (Kombinace bez opakování)

Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo splňující  $k \leq n$ .  $k$ -prvkovou **kombinací** na množině  $M$  rozumíme  $k$ -prvkovou podmnožinu množiny  $M$ .

## Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace na množině  $\{a, b, c, d, e\}$ .

$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{c, d\}$	$\{d, e\}$
$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, e\}$	
$\{a, d\}$	$\{b, e\}$		
$\{a, e\}$			

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových kombinací na množině s  $n$  prvky je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Čísla  $\binom{n}{k}$  se nazývají **kombinační čísla** nebo **binomické koeficienty**.
- $k$ -prvková kombinace se někdy popisuje jako neuspořádaný výběr  $k$  prvků.

## Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout tah Sportky (6 čísel z 49)?

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových kombinací na množině s  $n$  prvky je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Čísla  $\binom{n}{k}$  se nazývají **kombinační čísla** nebo **binomické koeficienty**.
- $k$ -prvková kombinace se někdy popisuje jako neuspořádaný výběr  $k$  prvků.

## Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout tah Sportky (6 čísel z 49)?
- Odpověď je  $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ .

## Výběry prvků s opakováním

## Definice (Permutace s opakováním)

Nechť  $M$  je konečná množina. *Permutace s opakováním* je uspořádaná posloupnost prvků z  $M$ , v níž se každý prvek  $i \in M$  vyskytuje  $k_i$ -krát, kde  $k_i$  je předem dané.

## Příklad

- Vypište všechny permutace s opakováním množiny  $\{a, b\}$  pro  $k_a = 2$  a  $k_b = 3$ .

## Definice (Permutace s opakováním)

Necht'  $M$  je konečná množina. *Permutace s opakováním* je uspořádaná posloupnost prvků z  $M$ , v níž se každý prvek  $i \in M$  vyskytuje  $k_i$ -krát, kde  $k_i$  je předem dané.

## Příklad

- Vypište všechny permutace s opakováním množiny  $\{a, b\}$  pro  $k_a = 2$  a  $k_b = 3$ .

$(a, a, b, b, b)$	$(b, a, b, a, b)$
$(a, b, a, b, b)$	$(b, a, b, b, a)$
$(a, b, b, a, b)$	$(b, b, a, a, b)$
$(a, b, b, b, a)$	$(b, b, a, b, a)$
$(b, a, a, b, b)$	$(b, b, b, a, a)$

## Věta

Počet permutací množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  pro dané počty opakování  $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$  je

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

## Příklad

- Kolika způsoby lze navléct na provázek 30 červených, 10 modrých a 3 žluté korále?

## Věta

Počet permutací množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  pro dané počty opakování  $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$  je

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

## Příklad

- Kolika způsoby lze navléct na provázek 30 červených, 10 modrých a 3 žluté korále?
- Odpověď je  $\frac{(30 + 10 + 3)!}{30! \cdot 10! \cdot 3!} = 10\,460\,978\,576\,048.$

## Definice (Variace s opakováním)

Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo.  $k$ -prvkovou **variací s opakováním** na množině  $M$  rozumíme uspořádanou  $k$ -tici sestavenou z prvků z  $M$  tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše  $k$ -krát.

## Příklad

- Vypište všechny 4-prvkové variace s opakováním na množině  $\{a, b\}$ .

# Variace s opakováním

## Definice (Variace s opakováním)

Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo.  $k$ -prvkovou **variací s opakováním** na množině  $M$  rozumíme uspořádanou  $k$ -tici sestavenou z prvků z  $M$  tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše  $k$ -krát.

## Příklad

- Vypište všechny 4-prvkové variace s opakováním na množině  $\{a, b\}$ .

$(a, a, a, a)$	$(a, b, a, a)$	$(b, a, a, a)$	$(b, b, a, a)$
$(a, a, a, b)$	$(a, b, a, b)$	$(b, a, a, b)$	$(b, b, a, b)$
$(a, a, b, a)$	$(a, b, b, a)$	$(b, a, b, a)$	$(b, b, b, a)$
$(a, a, b, b)$	$(a, b, b, b)$	$(b, a, b, b)$	$(b, b, b, b)$

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových variací s opakováním na množině s  $n$  prvky je

$$n^k.$$

## Příklad

- Kolik podmnožin má množina  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ?

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových variací s opakováním na množině s  $n$  prvky je

$$n^k.$$

## Příklad

- Kolik podmnožin má množina  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ?
- Odpověď je  $2^{10} = 1\,024$ .
- Podmnožinu lze kódovat jako uspořádanou 10-tici nul a jedniček (jedničky značí, které prvky jsou v podmnožině):  
 $\{2, 5, 6\}$  odpovídá  $(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
- Hledáme tedy všechny 10-prvkové variace s opakováním na množině  $\{0, 1\}$ .

## Definice (Kombinace s opakováním)

*Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo.  $k$ -prvkovou kombinací s opakováním na množině  $M$  rozumíme neuspořádanou  $k$ -tici prvků z  $M$ , kde se každý prvek vyskytuje libovolněkrát.*

## Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace s opakováním na množině  $\{a, b, c, d, e\}$ .

## Definice (Kombinace s opakováním)

Nechť  $M$  je konečná množina o  $n$  prvcích a  $k > 0$  je přirozené číslo.  $k$ -prvkovou **kombinací s opakováním** na množině  $M$  rozumíme neuspořádanou  $k$ -tici prvků z  $M$ , kde se každý prvek vyskytuje libovolněkrát.

## Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace s opakováním na množině  $\{a, b, c, d, e\}$ .

$\{a, a\}$	$\{b, b\}$	$\{c, c\}$	$\{d, d\}$	$\{e, e\}$
$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{c, d\}$	$\{d, e\}$	
$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, e\}$		
$\{a, d\}$	$\{b, e\}$			
$\{a, e\}$				

## Věta

Počet všech  $k$ -prvkových kombinací na množině s  $n$  prvky je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- $k$ -prvkovou kombinaci na množině  $\{1, 2, \dots, n\}$  lze zakódovat do posloupnosti délky  $n+k$  tak, že prvky množiny napíšeme do řady a za každý prvek vložíme tolik znaků  $\square$ , kolikrát je prvek obsažen v kombinaci. Např. kombinace  $\{2, 2, 3\}$  na množině  $\{1, 2, 3, 4\}$  odpovídá posloupnosti  $1 \ 2 \ \square \ \square \ 3 \ \square \ 4$ .
- Posloupnost je přesně určena umístěním znaků  $\square$ .
- Znak  $\square$  se nesmí vyskytnout na prvním místě.
- $k$  znaků  $\square$  se tedy vyskytuje na některých z  $n+k-1$  míst.
- Posloupností (a tedy i kombinací) je celkem  $\binom{n+k-1}{k}$ .

## Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout hod třemi hracími kostkami?  
(Zajímá nás, co kolikrát padne: např. dvě trojky a jedna pětka).

## Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout hod třemi hracími kostkami? (Zajímá nás, co kolikrát padne: např. dvě trojky a jedna pětka).
- Odpověď je  $\binom{6+3-1}{3} = 56$ .
- Jedná se o 3-prvkové kombinace s opakováním nad množinou  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

## Obecné principy počítání složených výběrů

## Princip nezávislých výběrů neboli princip součinu

Pokud se výběr skládá z dvou či více vzájemně nezávislých podvýběrů, pak je celkový počet výběrů roven součinu počtů jednotlivých podvýběrů.

### Příklad

- Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 9 obránců a 2 brankáře. Kolik kombinací hokejistů se může objevit na ledě, aby tam byli 3 útočníci, 2 obránci a jeden brankář?

## Princip nezávislých výběrů neboli princip součinu

Pokud se výběr skládá z dvou či více vzájemně nezávislých podvýběrů, pak je celkový počet výběrů roven součinu počtů jednotlivých podvýběrů.

### Příklad

- Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 9 obránců a 2 brankáře. Kolik kombinací hokejistů se může objevit na ledě, aby tam byli 3 útočníci, 2 obránci a jeden brankář?
- Výběr útočníků:  $\binom{13}{3} = 286$
- Výběr obránců:  $\binom{9}{2} = 36$
- Výběr brankářů:  $\binom{2}{1} = 2$
- Odpověď je  $286 \cdot 36 \cdot 2 = 20\,592$ .

## Princip dvojího počítání

Nechť lze každý výběr dále zjemnit na stejný počet  $l$  zjemněných výběrů. Dále nechť existuje celkem  $m$  různých zjemněných výběrů. Potom počet všech původních výběrů je  $\frac{m}{l}$ .

### Příklad

- Výběr šestic hokejistů na ledě z minulého příkladu chceme zjemnit tím, že budeme uvažovat i pořadí útočníků a obránců.
- Každou kombinaci na ledě lze tedy zjemnit v  $3! \cdot 2! = 12$  různých výběrů.
- Celkem těchto uspořádaných výběrů existuje  $(13 \cdot 12 \cdot 11) \cdot (9 \cdot 8) \cdot 2 = 247\,104$ .
- Původních výběrů je  $\frac{247\,104}{12} = 20\,592$  (totéž vyšlo i minule).

- Při řešení příkladů lze někdy použít i princip inkluze a exkluze.
- Obecně je třeba používat selský rozum.

## Příklad

- Máme k dispozici celkem 12 hráčů, z toho 5 dobrých útočníků. Kolik lze sestavit 4-členných týmů, které obsahují alespoň jednoho dobrého útočníka?
- Celkem lze sestavit  $\binom{12}{4} = 495$  týmů.
- Týmů bez dobrého útočníka je  $\binom{12-5}{4} = 35$ .
- Týmů s alespoň jedním dobrým útočníkem tedy je  $\binom{12}{4} - \binom{12-5}{4} = 460$ .

# Kombinatorická pravděpodobnost

- Teorie pravděpodobnosti zkoumá tzv. *náhodné pokusy*. Náhodným pokusem rozumíme opakovatelnou činnost prováděnou za stejných podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě (zejména není určen počátečními podmínkami).
- Kombinatorická (nebo také klasická) pravděpodobnost zkoumá situace, kdy náhodný pokus má jen konečně mnoho možných výsledků.
- Pravděpodobnost daného výsledku pak udává míru jeho očekávatelnosti.
- Motivace je např. v hazardních hrách.

## Definice (Konečný pravděpodobnostní prostor)

*Konečný pravděpodobnostní prostor je dvojice  $(\Omega, P)$ , kde  $\Omega$  je konečná množina **elementárních jevů** a  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  je **funkce pravděpodobnosti**, která podmnožinám  $\Omega$  přiřazuje reálné hodnoty z intervalu  $[0, 1]$  a splňuje*

- $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$  a
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  kdykoliv  $A, B \subseteq \Omega$  jsou disjunktní.

*Libovolná podmnožina  $A \subseteq \Omega$  se nazývá **jev** a  $P(A)$  je **pravděpodobnost** tohoto jevu.*

## Příklad

- Definujte pravděpodobnostní prostor hodů (pocitivou) kostkou.

## Příklad

- Pravděpodobnostní prostor hodů kostkou je  $(\Omega, P)$ , kde
  - elementární jevy jsou “co padne”, tedy  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,
  - funkce pravděpodobnosti  $P(A) = \frac{|A|}{6}$  pro každou  $A \subseteq \Omega$ .
- Co je jev “padne sudé číslo”? Množina  $\{2, 4, 6\}$ .
- Pravděpodobnost tohoto jevu je  $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

## Příklad

- Pravděpodobnostní prostor hodů mincí je  $(\{\text{orel, panna}\}, P)$ , kde

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\{\text{orel, panna}\}) = 1$$

$$P(\{\text{orel}\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\text{panna}\}) = \frac{1}{2}$$

- Pravděpodobnost elementárního jevu  $a \in \Omega$  obvykle zapisujeme jako  $P(a)$  namísto  $P(\{a\})$ .
- Pravděpodobnostní prostor je plně určen množinou  $\Omega$  a pravděpodobnostmi elementárních jevů. Pro neelementární jev  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  totiž podle definice musí platit

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n).$$

- Jevy  $A, B$  jsou *disjunktní*, pokud nemohou nastat zároveň, tj. pokud  $A \cap B = \emptyset$ .
- Různé elementární jevy jsou vždy disjunktní.
- Udejte příklady dvou různých jevů, které nejsou disjunktní.

## Definice

Konečný pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, P)$  je **uniformní**, je-li každý elementární jev  $a \in \Omega$  stejně pravděpodobný, tj.  $P(a) = \frac{1}{|\Omega|}$ .

- Pro každý jev  $A$  v uniformním prostoru platí  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .
- Uvedené prostory hodů kostkou a hodů mincí jsou uniformní.

## Příklad

- Namíchání 32 karet je také uniformní pravděpodobnostní prostor, kde elementární jevy jsou permutace karet (těch je 32!).
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je  $\frac{1}{32!}$ .
- Jaká je pravděpodobnost jevu, že první karta je eso?

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

## Řešení 1

- Elementární jevy jsou součty, tedy  $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ .
- Pravděpodobnost elementárních jevů se ale liší:
  - součet 2 lze získat pouze jako 1+1, proto  $P(2) = \frac{1}{36}$ ,
  - součet 3 lze získat jako 1+2 nebo 2+1, proto  $P(2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ,
  - ostatní pravděpodobnosti spočítáme analogicky.

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

## Řešení 1

- Elementární jevy jsou součty, tedy  $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ .
- Pravděpodobnost elementárních jevů se ale liší:
  - součet 2 lze získat pouze jako 1+1, proto  $P(2) = \frac{1}{36}$ ,
  - součet 3 lze získat jako 1+2 nebo 2+1, proto  $P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ,
  - ostatní pravděpodobnosti spočítáme analogicky.

$$\begin{array}{cccc} P(2) = \frac{1}{36} & P(5) = \frac{1}{9} & P(8) = \frac{5}{36} & P(11) = \frac{1}{18} \\ P(3) = \frac{1}{18} & P(6) = \frac{5}{36} & P(9) = \frac{1}{9} & P(12) = \frac{1}{36} \\ P(4) = \frac{1}{12} & P(7) = \frac{1}{6} & P(10) = \frac{1}{12} & \end{array}$$

- Jev “padne 8” je tedy elementární s pravděpodobností  $P(8) = \frac{5}{36}$ .
- Pravděpodobnostní prostor není uniformní.

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

## Řešení 2

- Elementární jevy jsou dvojice hodnot na jednotlivých kostkách, tedy  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je  $\frac{1}{36}$ .
- Pravděpodobnostní prostor je uniformní.
- Jak spočítáme pravděpodobnost, že padne 8?

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

## Řešení 2

- Elementární jevy jsou dvojice hodnot na jednotlivých kostkách, tedy  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je  $\frac{1}{36}$ .
- Pravděpodobnostní prostor je uniformní.
- Jak spočítáme pravděpodobnost, že padne 8?
- Jev “padne 8” je  $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$  a jeho pravděpodobnost je  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$ .
- Toto řešení umožňuje odpovědět například na otázku, zda jsou disjunktní jevy “součet je 6” a “součin je 8”. Jsou disjunktní?

- Nezávislost jevů intuitivně znamená, že pravděpodobnost toho, že nastane druhý z jevů není nijak ovlivněna tím, zda nastal či nenastal první jev.
- Kupříkladu pokud hážeme dvěma kostkami, jsou jevy “na první kostce padne 6” a “na druhé kostce padne liché číslo” nezávislé.
- Oproti tomu jevy “na první kostce padne 5” a “součet bude 8” nezávislé nejsou.

## Definice (Nezávislé jevy)

Jevy  $A, B$  v prostoru  $(\Omega, P)$  jsou *nezávislé*, pokud platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ukážeme, že jevy “na první kostce padne 5” a “součet bude 8” jsou závislé.

- Pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, P)$  je tvaru  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  a  $P(a) = \frac{1}{36}$  pro každý elementární jev  $a \in \Omega$  (prostor je uniformní).
- Jev “na první kostce padne 5” je  $A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$  a  $P(A) = \frac{1}{6}$ .
- Jev “součet bude 8” je  $B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$  a  $P(B) = \frac{5}{36}$ .
- Jevy  $A, B$  jsou závislé, neboť  $P(A \cap B) = P(\{5, 3\}) = \frac{1}{36}$  a tedy

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}.$$

- Dva různé elementární jevy s nenulovou pravděpodobností jsou závislé, protože  $P(\{a\} \cap \{b\}) = P(\emptyset) = 0 \neq P(a) \cdot P(b)$ . Navíc je jasné, že pokud nastane jeden elementární jev, nemůže nastat druhý.
- Z analogického důvodu platí, že dva různé disjunktní jevy s nenulovými pravděpodobnostmi jsou také závislé.

## Dotazy

- Ze zamíchaných karet rozdáme dvěma hráčům po pěti kartách. Jsou výběry karet, které dostanou, nezávislé?
- Hodíme dvěma kostkami. Je jev “na obou padne totéž” nezávislý s jevem “na první kostce padne 2”?

## Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

*Podmíněná pravděpodobnost*  $P(B|A)$  je pravděpodobnost jevu  $B$  za předpokladu, že nastal jev  $A$  a vypočítá se jako

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Jevy  $A, B$  jsou nezávislé právě když  $P(B|A) = P(B)$ .

## Příklad

- Kolik je podmíněná pravděpodobnost jevu “při hodu dvěma kostkami padne součet aspoň 10” za předpokladu, že “na první kostce padlo 5”?

## Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

*Podmíněná pravděpodobnost*  $P(B|A)$  je pravděpodobnost jevu  $B$  za předpokladu, že nastal jev  $A$  a vypočítá se jako

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Jevy  $A, B$  jsou nezávislé právě když  $P(B|A) = P(B)$ .

## Příklad

- Kolik je podmíněná pravděpodobnost jevu “při hodu dvěma kostkami padne součet aspoň 10” za předpokladu, že “na první kostce padlo 5”?
- Odpověď je  $\frac{1}{3}$ .
- Pravděpodobnost “padne součet aspoň 10” je  $\frac{1}{6}$  (závislost jevů).

# Střední hodnota

- $X$  je *náhodná proměnná* (nebo *náhodná veličina*), pokud je její hodnota jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu.
- Formálně je náhodná proměnná libovolná funkce přiřazující elementárním jevům prostoru  $(\Omega, \mathcal{P})$  reálná čísla.

## Definice (Střední hodnota)

*Nechť náhodná proměnná  $X$  může nabýt hodnot  $h_1, h_2, \dots, h_n$  s pravděpodobností pořadě  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , kde  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .*

*Střední hodnotou proměnné  $X$  je číslo*

$$EX = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 + \dots + p_n \cdot h_n.$$

- Střední hodnota udává průměr získaných hodnot náhodné proměnné  $X$  při mnoha opakováních náhodného pokusu.

## Příklad

- Jaká je střední hodnota čísel padlých na hrací kostce?

## Příklad

- Jaká je střední hodnota čísel padlých na hrací kostce?
- Odpověď je

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3,5$$

## Příklad

- Kolik je průměrně třeba hodů mincí, aby padlo 3x totéž?
- 3x totéž padne nejdříve třetím a nejpozději pátým hodem.
- Pravděpodobnostní postor je

$(o, o, o)$	$(o, o, p, o)$	$(o, o, p, p, o)$	$(o, o, p, p, p)$
$(p, p, p)$	$(o, p, o, o)$	$(o, p, o, p, o)$	$(o, p, o, p, p)$
	$(o, p, p, p)$	$(o, p, p, o, o)$	$(o, p, p, o, p)$
	$(p, o, o, o)$	$(p, o, o, p, o)$	$(p, o, o, p, p)$
	$(p, o, p, p)$	$(p, o, p, o, o)$	$(p, o, p, o, p)$
	$(p, p, o, p)$	$(p, p, o, o, o)$	$(p, p, o, o, p)$

- Náhodná proměnná  $X$  je vždy rovna délce  $n$ -tice.
- Pravděpodobnost každé  $n$ -tice je  $\frac{1}{2^n}$ .
- Celkem dostáváme, že průměrný počet potřebných hodů je

$$EX = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) + 4 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{16}\right) + 5 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{32}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{15}{8} = 4,125.$$

## Věta

- *Střední hodnota konstanty  $c$  je  $Ec = c$ .*
- *Střední hodnota součinu náhodné proměnné  $X$  a konstanty  $c$  je*  
$$E(cX) = c \cdot EX.$$
- *Střední hodnota součtu náhodných proměnných  $X, Y$  je*  
$$E(X + Y) = EX + EY.$$

## Příklad

- Jaká je střední hodnota součtu čísel padlých na dvou kostkách?
- Odpověď je  $E(X + Y) = EX + EY = 3,5 + 3,5 = 7$ .

## Věta

*Střední hodnota součinu nezávislých náhodných proměnných  $X, Y$  je*

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

## Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel padlých na dvou kostkách?
- Odpověď je  $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25$ .

- Vztah pro střední hodnotu součinu pro závislé náhodné proměnné neplatí.

## Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel horní a spodní stěny hozené kostky?
- Protože náhodné proměnné jsou závislé (součet protilehlých stěn kostky je vždy 7), nelze použít vztah  $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$  (tento vztah by nám dal hodnotu 12,25).

- Vztah pro střední hodnotu součinu pro závislé náhodné proměnné neplatí.

## Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel horní a spodní stěny hozené kostky?
- Protože náhodné proměnné jsou závislé (součet protilehlých stěn kostky je vždy 7), nelze použít vztah  $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$  (tento vztah by nám dal hodnotu 12,25).
- Z definice spočítáme střední hodnotu součinu jako

$$1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 9 + \frac{1}{3}.$$