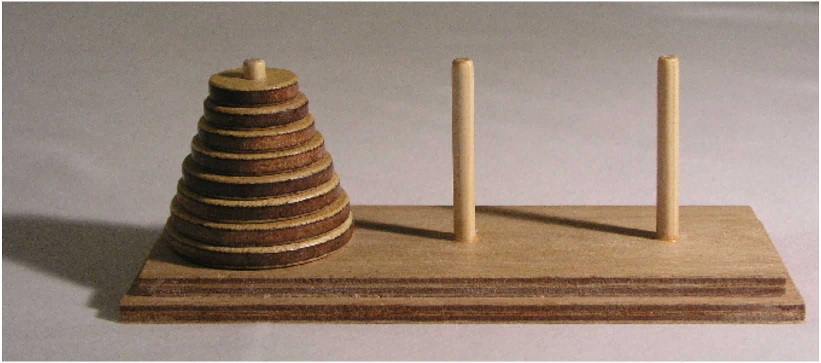
Rozděl a panuj

Hanojské věže



- Jak (rekurzivně) vyřešit?
- Kolik kroků (přesně) je třeba vykonat?

Rozděl a panuj

Násobení čísel

Máme na vstupu dvě $n$bitová čísla x a y a chceme je vynásobit.
Časovou složitost počítáme jako počet bitových operací.

- Jak složité je násobení dvou čísel „školním“ algoritmem?

Rozděl a panuj

Násobení čísel

Máme na vstupu dvě *n*bitová čísla x a y a chceme je vynásobit. Časovou složitost počítáme jako počet bitových operací.

- Jak složité je násobení dvou čísel „školním“ algoritmem?
- Jak bychom mohli použít princip *Rozděl a panuj*?

Rozděl a panuj

Násobení čísel

Máme na vstupu dvě *n*bitová čísla x a y a chceme je vynásobit.
Časovou složitost počítáme jako počet bitových operací.

- Jak složité je násobení dvou čísel „školním“ algoritmem?

- Jak bychom mohli použít princip *Rozděl a panuj*?

Pokud rozdělíme čísla na poloviny (bitového zápisu), pak máme:

$$x = 2^m \cdot x_L + x_R \qquad y = 2^m \cdot y_L + y_R \qquad \text{kde } m = \lceil n/2 \rceil$$

a součin $x \cdot y$ můžeme spočítat jako:

$$2^{2m} \cdot x_L \cdot y_L + 2^m \cdot (x_L \cdot y_R + x_R \cdot y_L) + x_R \cdot y_R$$

- Jakou má toto rekurzivní řešení složitost?
- Jak to můžeme vylepšit?

Master Theorem (pro připomenutí)

Pokud $T(n) \leq a \cdot T(\lceil n/b \rceil) + \mathcal{O}(n^d)$ pro nějaká $a \geq 1$, $b > 1$ a $d \geq 0$, pak

$$T(n) \in \begin{cases} \mathcal{O}(n^d) & a < b^d \\ \mathcal{O}(n^d \cdot \log n) & a = b^d \\ \mathcal{O}(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

Rozděl a panuj

Počítání mocniny

Chceme počítat mocninu b^k, kde k je přirozené číslo (včetně 0) a b je libovolný objekt, který umíme násobit (přirozené číslo, reálné číslo, čtvercová matice). Složitost budeme počítat jako počet operací násobení.

- Triviální řešení používá $\mathcal{O}(k)$ operací násobení. Zvládnete to lépe pomocí techniky *Rozděl a panuj*?

Rozděl a panuj

Rozbíjení džbánů

Máme žebřík s n příčkami a máme k dispozici k džbánů. Chceme zjistit, jaká je nejvyšší bezpečná příčka. Bezpečná příčka je taková, že džbán z ní hozený se nerozbije. Kolik nejméně pokusů (hodů) je třeba učinit?

1. Předpokládejme, že $k = 1$.

Rozděl a panuj

Rozbíjení džbánů

Máme žebřík s n příčkami a máme k dispozici k džbánů. Chceme zjistit, jaká je nejvyšší bezpečná příčka. Bezpečná příčka je taková, že džbán z ní hozený se nerozbije. Kolik nejméně pokusů (hodů) je třeba učinit?

1. Předpokládejme, že $k = 1$.

2. Předpokládejme, že $k = 2$.

Rozděl a panuj

Rozbíjení džbánů
Máme žebřík s n příčkami a máme k dispozici k džbánů. Chceme zjistit, jaká je nejvyšší bezpečná příčka. Bezpečná příčka je taková, že džbán z ní hozený se nerozbije. Kolik nejméně pokusů (hodů) je třeba učinit?

1. Předpokládejme, že $k = 1$.
2. Předpokládejme, že $k = 2$.
3. Jak by vypadalo řešení pro obecné k?

Rozděl a panuj

Souvislá podposloupnost s největším součtem
Máme na vstupu posloupnost celých čísel. Chceme najít souvislou podposloupnost této posloupnosti, která má co největší součet.

Příklad: Pro vstup 3, -5, 7, 0, -2, 6, 8, -9, 3 je řešením souvislá podposloupnost 7, 0, -2, 6, 8 (součet 19).

- Jak zde použít techniku *Rozděl a panuj*?
- Jakou složitost má vaše řešení?