Matematika IV – 9. týden
Vytvořující funkce

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2015

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`). Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`).
Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.
Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`). Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.

Pro vyjádření koeficientu u x^n ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^n]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti. Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1 - x - x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro n-tý člen posloupnosti. Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $1 - x - x^2$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Po substituci $\lambda_1 = 1/x_1, \lambda_2 = 1/x_2$ dostáváme vztah

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - \lambda_1 x} + \frac{b}{1 - \lambda_2 x},$$

odkud už vcelku snadno vyjde $F_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n$, jak to známe z dřívějška.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_n snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$. Navíc je vidět, že $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = 1/\lambda_1 \approx 0.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny pomůže vždy jednoduchý **rozklad na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\mathrm{st}\, P < \mathrm{st}\, Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny pomůže vždy jednoduchý **rozklad na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\text{st}\, P < \text{st}\, Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny pomůže vždy jednoduchý **rozklad na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x-\alpha_\ell}.$$

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Analogický postup je možné použít při řešení obecných lineárních diferenčních rovnic k-tého stupně s konstatními koeficienty. Má-li charakteristická rovnice jednoduché kořeny pomůže vždy jednoduchý **rozklad na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak
$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$
- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru
$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Plán přednášky

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty[1].

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

[1] Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty[1].

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že exponenciální funkce e^x je (exponenciální) vytvořující funkcí pro základní posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$.

[1] Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Věta z matematické analýzy:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $K \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $n \geq 1$ *je* $|a_n| \leq K^n$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$.

Věta z matematické analýzy:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $K \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $n \geq 1$ *je* $|a_n| \leq K^n$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$. *Hodnotami funkce* $a(x)$ *na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má* $a(x)$ *v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.
- Substitucí polynomu $f(x)$ s nulovým absolutním členem za x vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro $f(x) = \alpha x$, což odpovídá vynásobení k–tého členu posloupnosti skalárem α^k. Dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde

  $$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

  tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k)$. Posloupnost (c_n) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_n), (b_n)$.

Plán přednášky

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.
Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.
Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n, tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + [n = 1]$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}.$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_n = 3^n - 2^n$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
     + L[0:1]
     + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n - 1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k - 1$ a $n - k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n - 1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k - 1$ a $n - k$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right).$$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{n\geq 0} nC_n x^n = \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n + 2\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}x^n$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1},\, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{n\geq 0} nC_n x^n = \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n + 2\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}x^n$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{n\geq 0} nC_n x^n = \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n + 2\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}x^n$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu $\left((1-x)^2 C(x)\right)' = \frac{2x}{1-x}$, a tedy

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\left(\ln\frac{1}{1-x} - x\right),$$

odkud konečně $C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1) - 2n$.