MB202 – Diferenciální a integrální počet B
Mocninné řady

Obsah přednášky

Theorem (Rolleova věta)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Jestliže platí* $f(a) = f(b)$*, pak existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že* $f'(c) = 0$*.*

Důkaz.

Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině), proto má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).
Předpokládejme tedy, že buď maximum nebo mimimum je jiné a nechť nastává jedno z nich ve vnitřním bodě c. Pak ovšem není možné, aby v c bylo $f'(c) \neq 0$, protože to by v tomto bodě byla byla funkce f buď rostoucí nebo klesající a jistě by tedy v okolí bodu c nabývala větších i menších hodnot, než je $f(c)$. $\square$

Z Rolleovy věty snadno vyplývá tzv. **věta o střední hodnotě**.

Theorem

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Pak existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (nejlíp vidět na obrázku). Rovnice naší sečny je

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Rozdíl $h(x) = f(x) - g(x)$ udává vzdálenost grafu od sečny (v hodnotách y). Jistě platí $h(a) = h(b)$ a

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předchozí věty existuje bod c, ve kterém je $h'(c) = 0$. □

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

a v případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Corollary

Nechť funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Důkaz.

Opět spoléháme na použití Rolleovy věty. Položíme proto

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Nyní $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, $h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, takže existuje $c \in (a, b)$ takový, že $h'(c) = 0$. Protože je $g'(c) \neq 0$, dostáváme právě požadovaný vztah. □

Podobná úvaha jako v posledním tvrzení vede k mimořádně užitečnému nástroji pro počítání limit funkcí. Je znám jako **L'Hospitalovo pravidlo**:

Theorem

Předpokládejme, že f *a* g *jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$*, ne však nutně v bodě* x_0 *samotném, a nechť existují limity*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pak existuje i limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v x_0 mají funkce f a g nulovou hodnotu.
Výsledek je opět jednoduše představitelný pomocí obrázku. Uvažujme body $[g(x), f(x)] \in \mathbb{R}^2$ parametrizované proměnnou x. Podíl hodnot pak odpovídá směrnici sečny mezi body $[0, 0]$ a $[f(x), g(x)]$. Zároveň víme, že podíl derivací odpovídá směrnici tečny v příslušném bodě. Z existence limity směrnic tečen tedy chceme dovodit existenci limity směrnic sečen.

Pokračování.

Technicky lze využít věty o střední hodnotě v parametrickém tvaru. Předně si uvědomme, že v tvrzení věty implicitně předpokládáme existenci výrazu $f'(x)/g'(x)$ na nějakém okolí x_0, zejména tedy pro dostatečně blízké body c k x_0 bude $g'(c) \neq 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

kde c_x je číslo mezi x_0 a x. Nyní si všimněme, že z existence limity $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vyplývá, že stejnou hodnotu bude mít i limita libovolné posloupnosti vzniklé dosazením hodnot $x = x_n$ jdoucích k x_0 do $f'(x)/g'(x)$. Zejména tedy můžeme dosadit jakoukoliv posloupnost c_{x_n} pro $x_n \to x_0$ a proto bude existovat i limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ a poslední dvě limity zjevně budou mít stejnou hodnotu. Dokázali jsme tedy, že naše hledaná limita existuje a má také stejnou hodnotu. □

Jednoduše lze rozšířit L'Hospitalovo pravidlo i pro limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ a v případě nevlastních hodnot limit. Je-li, např.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

potom je $\lim_{x\to 0_+} f(1/x) = 0$ a $\lim_{x\to 0_+} g(1/x) = 0$. Zároveň z existence limity podílu derivací v nekonečnu dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{(f(1/x))'}{(g(1/x))'} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Použitím předchozí věty tedy dostáváme, že v tomto případě bude existovat i limita podílu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ještě jednodušší je postup při výpočtu limity v případě, kdy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Stačí totiž psát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

což je již případ pro použití L'Hospitalova pravidla z předchozí věty.

Theorem

Nechť f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *a* $\lim_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$. *Jestliže existuje limita* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *pak existuje i limita* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a jsou si rovny.*

Důkaz.

Opět lze vyjít z věty o střední hodnotě. Vyjádříme podíl, abychom "viděli" derivaci:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f(x)-f(y)} \cdot \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$$

kde y volíme nějaký pevný ze zvoleného okolí x_0 a x necháme blížit k x_0. Protože jsou limity f i g v x_0 nekonečné, můžeme jistě předpokládat, že rozdíly hodnot v x a y jsou u obou funkcí při pevném y nenulové. Nyní nahradíme prostřední zlomek podílem derivací

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

kde c závisí na x i y. Při pevném y a x jdoucím k x_0 jde první zlomek zjevně k jedničce a druhý zlomek se blíží k limitní hodnotě podílu derivací. $\square$

Příklad

Vhodnými úpravami sledovaných výrazů lze využít L'Hospitalova pravidla také na výrazy typu $\infty - \infty$, 1^∞, $0 \cdot \infty$ apod. Zpravidla jde o prosté přepsání výrazů nebo o využití nějaké hladké funkce, např. exponenciální. Uveďme alespoň dva příklady hned:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{2x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{2x - \sin 2x}{2x\sin 2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin 2x + 4x\cos 2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{4\cos 2x + 4\cos 2x - 8x\sin 2x} = 0,
\end{aligned}$$

přičemž získané tvrzení je třeba číst od konce. Tj. z existence poslední limity (podíl druhých derivací) vyplývá existence limity podílů prvních derivací a z toho plyne existence i hodnota původní limity.

Příklad

Druhý příklad nám ukáže souvislost aritmetického a geometrického průměru z n hodnot. **Aritmetický průměr**

$$M^1(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

je speciálním případem tzv. **mocninného průměru stupně** r:

$$M^r(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Speciální hodnota M^{-1} se nazývá **harmonický průměr**.

Příklad - pokračování

Spočtěme si limitní hodnotu M^r pro r jdoucí k nule. Za tímto účelem spočteme limitu pomocí L'Hospitalova pravidla (jde o výraz $0/0$, využití spojité funkce ln neškodí a pozor, derivujeme podle r!):

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \ln(M^r(x_1,\dots,x_n)) &= \lim_{r\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{n}(x_1^r + \dots x_n^r))}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{x_1^r \ln x_1 + \dots + x_n^r \ln x_n}{n}}{\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}} \\
&= \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.
\end{aligned}$$

Odtud tedy je přímo vidět, že

$$\lim_{r\to 0} M^r(x_1,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

což je hodnota známá pod názvem **geometrický průměr**.

Budeme „počítat“ e^x.
Jestliže v posloupnosti $a_m = (1+\frac{1}{m})^m$ dosadíme za m hodnoty $m = n/x$ pro nějaké pevné $x \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$b_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}, \quad b_n^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Přitom, je limita b_n pro n jdoucí do nekonečna opět e. Odvodili jsme tedy důležitý vztah platný pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

n-tý člen posloupnosti $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ vyjádříme pomocí bionomické věty:

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)x^2}{2!n^2} + \dots + \frac{n!x^n}{n!n^n} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\qquad + \frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Protože jsou všechny závorky v součinech menší než jedna, dostáváme také

$$u_n(x) < v_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}x^j.$$

Uvažme formální součet $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$, který chápeme jako limitu našich čísel v_n (pokud existuje)

$$u_n(x) < v_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j.$$

Podíl dvou po sobě jdoucích členů v řadě je $c_{j+1}/c_j = x/(n+1)$. Pro každé pevné x tedy existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $c_{j+1}/c_j < 1/2$ pro všechny $j > N$. Pro takto velké j je ovšem $c_{j+1} < \frac{1}{2} c_j < 2^{-(j-N+1)} c_N$. To ale znamená, že částečné součty prvních n členů v našem formálním součtu jsou shora ohraničeny součty

$$v_n < \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} x^j + \frac{1}{j!} x^j \sum_{j=0}^{n-N} \frac{1}{2^j}.$$

Poslední suma je zvláštní případ součtu geometrické řady $\sum_{j=0}^{k} q^j$.
Protože platí pro každé q

$$(1-q)(1+q+\cdots+q^k) = 1-q^{k+1},$$

existuje limita částečných součtů v **geometrické řadě** $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ právě když $|q| < 1$ a v takovém případě platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

Protože čísla v_n tvoří rostoucí posloupnost, jistě také tato posloupnost konverguje. Říkáme, že řada $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$ konverguje.

Čísla u_n, jejichž limitou je e^x, umíme aproximovat libovolně přesně výrazy v_n. S trochou pečlivosti odtud dostaneme:

Theorem

Exponenciální funkce je pro každé $x \in \mathbb{R}$ vyjádřena jako limita částečných součtů ve výrazu

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

Definition

Nekonečná řada je výraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \dots,$$

kde a_n jsou reálná nebo komplexní čísla. Posloupnost **částečných součtů** je dána svými členy $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ a říkáme, že řada konverguje a je rovna s, jestliže existuje konečná limita částečných součtů

$$s = \lim_{k\to\infty} s_n.$$

K tomu, aby posloupnost s_n konvergovala, je nutné a stačí, aby byla Cauchyovská. Tzn. že

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m|$$

musí být libovolně malé pro dostatečně velká $m > n$. Protože je

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_m| > |a_{n+1} + \cdots + a_m|,$$

vyplývá z konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ i konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.

Definition

Říkáme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.
Jestliže posloupnost částečných součtů řady má nevlastní limitu, říkáme že řada **diverguje** k ∞ nebo $-\infty$.

Theorem

Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jsou dvě absolutně konvergentní řady. Pak*

1. *jejich součet absolutně konverguje k součtu*

$$S + T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n),$$

2. *jejich rozdíl absolutně konverguje k rozdílu*

$$S - T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n),$$

3. *jejich součin absolutně konverguje k součinu*

$$S \cdot T = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right).$$

Theorem

Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada reálných nebo komplexních čísel.*

1. *Jestliže* S *konverguje, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. *Předpokládejme, že existuje limita podílů po sobě jdoucích členů řady a platí*
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$
Pak řada S *konverguje absolutně při* $|q| < 1$ *a nekonverguje při* $|q| > 1$. *Při* $|q| = 1$ *může řada konvergovat ale nemusí.*
3. *Jestliže existuje limita*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q,$$
pak při $q < 1$ *řada konverguje, zatímco při* $q > 1$ *diverguje. Je-li* $q = 1$, *může konvergovat i divergovat.*

Corollary

Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada reálných nebo komplexních čísel.*

1. *Je-li*

$$q = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| ,$$

pak řada S *konverguje absolutně při* $q < 1$ *a nekonverguje při* $q > 1$. *Při* $q = 1$ *může řada konvergovat ale nemusí.*

2. *Je-li*

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

pak při $q < 1$ *řada konverguje, zatímco při* $q > 1$ *diverguje. Je-li* $q = 1$, *může konvergovat i divergovat.*

Jestliže máme místo posloupnosti čísel a_n k dispozici posloupnost funkcí $f_n(x)$ se stejným definičním oborem A, můžeme bod po bodu použít definici řady a dostáváme pojem součtu **řady funkcí**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Definition

Mocninná řada je dána výrazem

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Řekneme, že $S(x)$ má **poloměr konvergence** $\rho \geq 0$, jestliže $S(x)$ konverguje pro každé x splňující $|x| < \rho$ a diverguje při $|x| > \rho$.

Theorem

Nechť $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *je mocninná řada a existuje limita*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Pak je poloměr konvergence řady S *roven* $r = \rho^{-1}$*.*
Mocninná řada $S(x)$ *je spojitá na celém svém intervalu konvergence (včetně krajních bodů, pokud v nich konverguje) a existuje také její derivace* $S'(x)$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Všimněme si, že lze poloměr konvergence r pro každou mocninnou řadu přímo zadat vzorcem

$$r^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Example

Podíváme se na mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, .$$

Je to **geometrická řada**, kterou jsme se zabývali již dříve, a její součet je pro všechny x s $|x| < 1$

$$S(x) = \frac{1}{1-x},$$

zatímco $|x| > 1$ zaručuje divergenci. Pro $x = 1$ dostáváme také zjevně divergentní řadu $1 + 1 + 1 + \dots$ s nekonečným součtem, při $x = -1$ jde o řadu $1 - 1 + 1 - \dots$, jejíž částečné součty nemají limitu vůbec.

Example

Poloměr konvergence řady $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ je také jedna, protože existuje

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = x \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = x$$

Pro $x = 1$ tu dostaneme divergentní řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$.
Naopak, řada $T(-1) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ konverguje.

O řadě $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ s reálnými členy řekneme, že je **alternující**, jestliže je znaménko dvou po sobě jdoucích členů vždy opačné. Pokud je navíc $|b_n|$ klesající posloupnost a pro řadu T platí nutná podmínka konvergence, tj. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pak řada konverguje (vyplyne z obecnějších výsledků později).

S mocninnými řadami nám do našeho společenství přibyla spousta nových příkladů hladkých funkcí, tj. funkcí libovolněkrát diferencovatelných na celém svém definičním oboru. Pohrejme si ještě chvíli s nejvýznamnějším a prvním naším příkladem, exponenciálou

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots .$$

Tato mocninnná řada má poloměr konvergence nekonečný a dobře proto definuje funkci pro všechna komplexní čísla x. Její hodnoty jsou limitami hodnot (komplexních) polynomů s reálnými koeficienty a ze spojitosti tedy musí pro ni platit i obvyklé vztahy, které jsme pro reálné hodnoty proměnné x již odvodili.

Zejména platí

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, .$$

Dosaďme si hodnoty $x = i \cdot t$, kde $i \in \mathbb{C}$ je imaginární jednotka, $t \in \mathbb{R}$ libovolné.

$$e^{it} = 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + i\frac{1}{5!}t^5 - \dots$$

a zjevně tedy je komplexně konjugované číslo k $z = e^{it}$ číslo $\bar{z} = e^{-it}$. Proto

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1$$

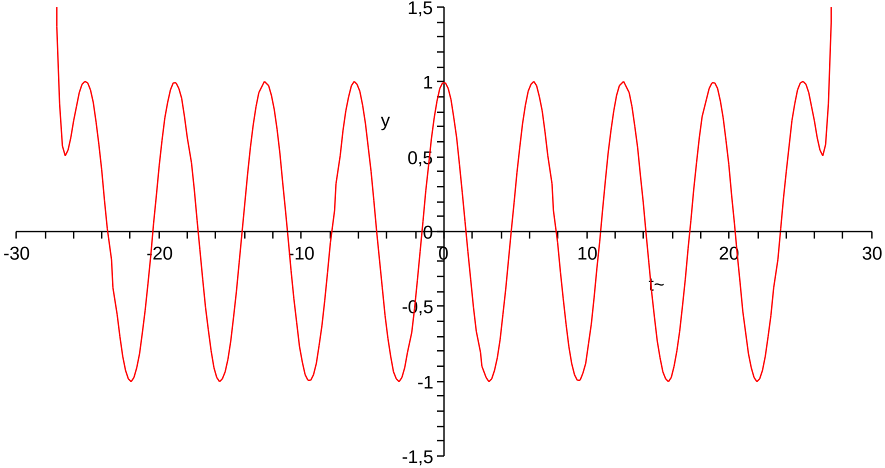
a všechny hodnoty $z = e^{it}$ proto leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině.

Reálné a imaginární složky bodů na jednotkové kružnici přitom bývají popisovány pomocí **goniometrických funkcí** $\cos\theta$ a $\sin\theta$, kde θ je patřičný úhel.
Dostáváme přímou definici goniometrických funkcí pomocí mocninných řad:

$$\cos t = \operatorname{re} e^{it} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}t^{2k} + \dots$$

$$\sin t = \operatorname{im} e^{it} = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}t^{2k+1} + \dots$$

Ilustraci konvergence řady pro funkci cos je vidět na obrázku. Jde o graf příslušného polynomu stupně 68. Při postupném vykreslení částečných součtů je vidět, že aproximace v okolí nuly je velice dobrá a prakticky beze změn. S rostoucím řádem se pak zlepšuje i dále od počátku.



Přímo z definice také vyplývá známý vztah

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

a také z derivace $(e^{it})' = i\, e^{it}$ vidíme, že

$$(\sin t)' = \cos t, \qquad (\cos t)' = -\sin t.$$

Tentýž výsledek lze samozřejmě ověřit přímo derivací našich řad člen po členu. (Ověříme později, že to tak skutečně lze dělat.)

Předpokládejme, že t_0 je nejmenší kladné číslo, pro které je $\mathrm{e}^{-it_0} = -\mathrm{e}^{it_0}$, tj. první kladný nulový bod funkce $\cos t$. Podle obvyklé definice Ludolfova čísla je $t_0 = \frac{1}{2}\pi$. Pak $\mathrm{e}^{-i2t_0} = (\mathrm{e}^{-it_0})^2 = \mathrm{e}^{i2t_0}$ a jde proto o nulový bod funkce $\sin t$. Samozřejmě pak platí pro libovolné t

$$\mathrm{e}^{i(4kt_0+t)} = (\mathrm{e}^{it_0})^{4k} \cdot \mathrm{e}^{it} = 1 \cdot \mathrm{e}^{it}\,.$$

Jsou tedy obě funkce goniometrické funkce **periodické** s periodou 2π. Z našich definic je přitom vidět, že je to nejmenší jejich perioda.

Nyní můžeme snadno odvodit všechny obvyklé vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Uvedeme na ukázku několik z nich. Nejprve si všimněme, že definice vlastně říká

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$
$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Součin těchto funkcí jde tedy vyjádřit jako

$$\sin t \cos t = \frac{1}{4i}(e^{it} - e^{-it})(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{4i}(e^{i2t} - e^{-i2t}) = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Dále můžeme využít naši znalost derivací:

$$\cos 2t = (\frac{1}{2}\sin 2t)' = (\sin t \cos t)' = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Vlastnosti dalších goniometrických funkcí

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \operatorname{cotg} t = (\operatorname{tg} t)^{-1}$$

se snadno odvodí z jejich definice a pravidel pro derivování.