MB202 – Diferenciální a integrální počet B
Taylorův rozvoj a průběh funkce

Obsah přednášky

Jestliže má první derivace $f'(x)$ reálné nebo komplexní funkce f v bodě x_0 derivaci $(f')'(x_0)$, říkáme že existuje **druhá derivace** funkce f, resp. derivace druhého řádu. Píšeme pak $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ nebo také $f^{(2)}(x_0)$.
Derivace vyšších řádů definujeme induktivně:
Reálná nebo komplexní funkce f je v bodě x_0 $(k+1)$–**krát diferencovatelná** pro nějaké přirozené číslo k, jestliže je k–krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0 a její k–tá derivace má v bodě x_0 derivaci. Pro k-tou derivaci funkce $f(x)$ píšeme $f^{(k)}(x)$. Pro $k = 0$ rozumíme 0–krát diferencovatelnými funkcemi funkce spojité.
Jestliže existují derivace všech řádů na intervalu, říkáme, že je tam funkce f **hladká**.
Pro funkce se spojitou k–tou derivací používáme označení **třída funkcí** $C^k(A)$ na intervalu A, kde k může nabývat hodnot $0, 1, \dots, \infty$. Často píšeme pouze C^k, je-li definiční obor znám z kontextu.

Již jsme viděli, že první derivace funkce je jejím lineárním přiblížením v okolí daného bodu a že ze znaménka nenulové derivace vyplývá, že funkce je v bodě x_0 rostoucí nebo klesající. Body, ve kterých je první derivace nulová se nazývají **kritické body** dané funkce.
Je-li x_0 kritický bod funkce f, může být chování funkce f v okolí bodu x_0 jakékoliv. Vidíme to již z chování funkce $f(x) = x^n$ v okolí nuly pro libovolné n. Pro lichá $n > 0$ bude $f(x)$ rostoucí, pro sudá n naopak bude nalevo klesající a napravo rostoucí, dosáhne tedy v bodě x_0 své minimální hodnoty mezi body z (dostatečně malého) okolí bodu $x_0 = 0$.

Tentýž pohled můžeme aplikovat na funkci f'. V kritickém bodě x_0 bude derivace $f'(x)$

- rostoucí při kladné druhé derivaci
- klesající při záporné druhé derivaci.

Jestliže je ale rostoucí, znamenená to, že nutně bude záporná nalevo od kritického bodu a kladná napravo od něj. Funkce f v takovém případě je klesající nalevo od kritického bodu a rostoucí napravo od něj. To znamená, že má funkce f v bodě x_0 minimum ze všech hodnot z nějakého malého okolí bodu x_0.

Naopak, je-li druhá derivace záporná v x_0, je první derivace klesající, tedy záporná vlevo od x_0 a kladná vpravo. Funkce f bude tedy mít v bodě x_0 maximální hodnotu ze všech hodnot na nějakém okolí.

Extrémy funkce

Funkce diferencovatelná na (a, b) a spojitá na $[a, b]$ má jistě na tomto intervalu absolutní maximum a minimum. Může ho dosáhnout pouze buď na hranici nebo v bodě s nulovou derivací, tj. v kritickém bodě. Pro diskusi extrémů nám tedy mohou stačit kritické body a druhé derivace pomůžou určit typy extrémů, pokud jsou nenulové. Pro přesnější diskusi ale potřebujeme lepší než lineární aproximace zkoumaných funkcí. Proto se nejprve budeme věnovat úvahám v tomto směru a teprve poté se vrátíme k diskusi průběhu funkcí.

Jako překvapivě jednoduché využití Rolleovy věty teď odvodíme mimořádně důležitý výsledek. Říkává se mu **Taylorův rozvoj se zbytkem**. Intuitivně se k němu můžeme dostat obrácením našich úvah kolem mocninných řad. Máme-li totiž mocninnou řadu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a derivujeme-li ji opakovaně, dostáváme mocninné řady (víme, že je možné takový výraz derivovat člen po členu, i když jsme to ještě nedokázali)

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

V bodě $x = a$ je $S^{(k)}(a) = k!a_k$. Můžeme tedy naopak číst poslední tvrzení jako rovnici pro a_k a původní řadu přepsat jako

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Jestliže místo mocninné řady máme nějakou dostatečně hladkou funkci $f(x)$, je tedy na místě se ptát, zda ji můžeme vyjádřit jako mocninnou řadu a jak rychle budou konvergovat částečné součty (tj. přiblížení funkce f polynomy). Naše úvaha právě naznačila, že můžeme očekávat v okolí bodu a dobrou aproximaxi polynomy, tzv. **Taylorovými polynomy k–tého řádu**:

$$P_k f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Přesná odpověď vypadá podobně jako věta o střední hodnotě, jen pracujeme s vyššími stupni plynomů (tzv. **Taylorův rozvoj se zbytkem**).

Theorem

Nechť je $f(x)$ funkce k–krát diferencovatelná na intervalu (a,b) a spojitá na $[a,b]$. Pak pro každé $x \in (a,b)$ existuje číslo $c \in (a,x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-a)^k \\ &= P_{k-1}f(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-a)^k. \end{aligned}$$

Pokud tedy umíme odhadnout velikost k–té derivace na celém intervalu, dostaneme přímo odhady chyb. Speciálním případem je samozřejme věta o střední hodnotě coby aproximace řádu nula.
Iterováním derivace funkce $\sin x$ dostaneme vždy buď sinus nebo cosinus s nějakým znaménkem, ale v absolutní hodnotě budou hodnoty vždy nejvýše jedna. Dostáváme tedy přímý odhad rychlosti konvergence mocninné řady

$$|\sin x - (P_k \sin)(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Vidíme tedy, že pro x výrazně menší než k bude chyba malá, pro x srovnatelné s k nebo větší ale bude obrovská.

Theorem (Taylorova věta)

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(a-b, a+b)$ hladká a že všechny její derivace jsou zde omezeny stejnoměrně konstantou $M > 0$, tj.

$$|f^{(k)}(x)| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, \; x \in (a-b, a+b).$$

Pak mocninná řada $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ konverguje na intervalu $(a-b, a+b)$ k funkci $f(x)$.

Důkaz.

Důkaz je shodný s úvahou v konkrétním případě fukce $\cos x$. □

Je-li f v bodě a hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je $S(x) = f(x)$ na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme **analytické funkce** v bodě a. Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě.
Ne všechny hladké funkce jsou ale analytické. Ve skutečnosti lze dokázat, že pro každou posloupnost čísel a_n umíme najít hladkou funkci, jejíž derivace řádů k budou tato čísla a_k.

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

Je dobře definovaná hladká funkce pro všechny body $x \neq 0$.
Derivací dostaneme $f'(x) = f(x) \cdot 2x^{-3}$ a iterovanou derivací dostaneme součet konečně mnoha členů tvaru $C \cdot f(x) \cdot x^{-k}$, kde C je nějaké celé číslo a k je přirozené číslo. Pro takové výrazy lze opakovanou aplikací L'Hospitalova pravidla zjistit, že jdou limitně k nule, při x jdoucím k nule. Dodefinujeme-li tedy hodnoty všech derivací naší funkce v nule rovnicí

$$f^{(k)} = 0,$$

získáme hladkou funkci na celém $\mathbb{R}$. Je vidět, že skutečně jde o nenulovou funkci všude mimo $x = 0$, všechny její derivace v tomto bodě jsou ale nulové. Samozřejmě to tedy není analytická funkce v bodě $x_0 = 0$.

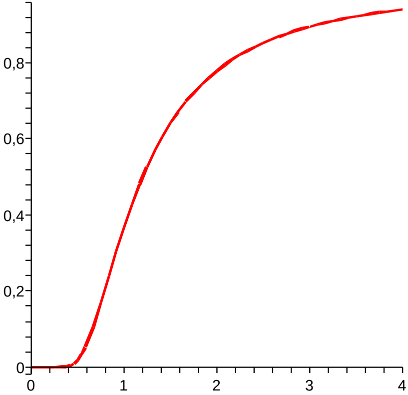
Snadno teď můžeme naši funkci modifikovat takto:

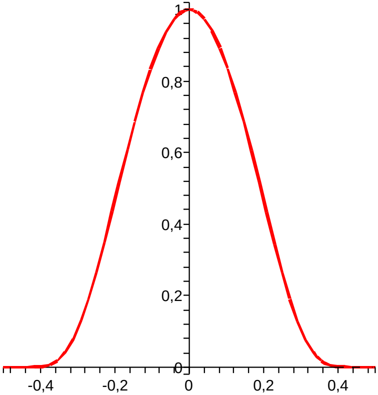
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{je-li } x > 0 \end{cases}.$$

Opět jde o hladkou funkci na celém $\mathbb{R}$. Další úpravou můžeme získat funkci nenulovou ve všech vnitřních bodech intervalu $[-a, a]$, $a > 0$ a nulovou jinde:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

Tyto funkce je hladké na celém $\mathbb{R}$. Poslední dvě funkce jsou na obrázcích, vpravo je použit parametr $a = 1$.



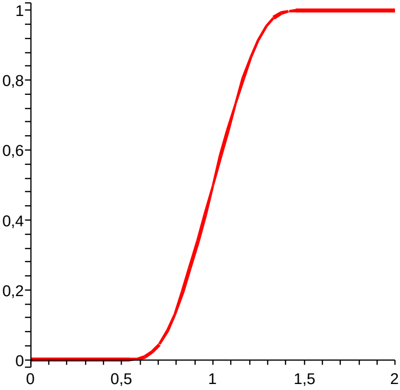


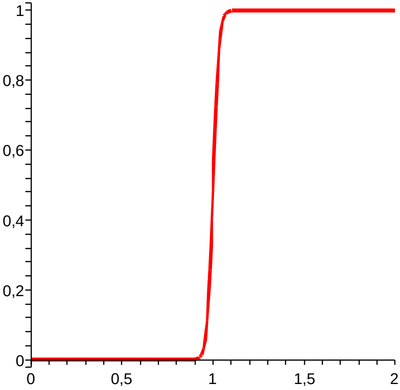
Nakonec ještě ukážeme, jak lze dostat hladké analogie Heavisideových funkcí. Pro dvě pevně zvolená reálná čísla $a < b$ definujeme funkci $f(x)$ s použitím výše definované funkce g takto:

$$f(x) = \frac{g(x-a)}{g(x-a) + g(b-x)}.$$

Zjevně je pro každé $x \in \mathbb{R}$ jmenovatel zlomku kladný (pro každý z intervalů určených čísly a a b je totiž alespoň jeden ze sčítanců jmenovatele nenulový a tedy je celý jmenovatel kladný). Dostáváme z našeho definičního vztahu proto hladkou funkci $f(x)$ na celém $\mathbb{R}$. Při $x \leq a$ je přitom jmenovatel zlomku přímo dle definice funkce g nulový, při $x \geq b$ je čitatel i jmenovatel stejný.

Na dalších dvou obrázcích jsou právě funkce $f(x)$ a to s parametry $a = 1 - \alpha$, $b = 1 + \alpha$, kde nalevo je $\alpha = 0.8$ a napravo $\alpha = 0.4$.





Budeme v dalším uvažovat funkce s dostatečným počtem spojitých derivací, aniž bychom tento předpoklad přímo uváděli.

Řekneme, že bod a v definičním oboru funkce f je **kritický bod řádu** k, jestliže platí $f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(k+1)}(a) \neq 0$.

Předpokládejme, že $f^{(k+1)}(a) > 0$. Pak je tato spojitá derivace kladná i na jistém okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a. Taylorův rozvoj se zbytkem nám v takovém případě dává pro všechna x z $\mathcal{O}(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}.$$

Je proto změna hodnot $f(x)$ v okolí bodu a dána chováním funkce $(x-a)^{k+1}$.

Je-li $k+1$ sudé číslo, jsou hodnoty $f(x)$ v takovém okolí větší než hodnota $f(a)$ — bod a bodem lokálního minima.

Pokud je k sudé číslo, pak jsou hodnoty vlevo menší a vpravo větší než než $f(a)$, extrém tedy ani lokálně nenastává. Zato graf funkce $f(x)$ protíná svoji tečnu $y = f(a)$ bodem $[a, f(a)]$.

Naopak, je-li $f^{(k+1)}(a) < 0$, pak ze stejného důvodu jde o lokální maximum při lichém k a extrém opět nenastává pro k sudé.

Funkce f je v bodě a **konkávní**, jestliže se její graf nachází v jistém okolí celý pod tečnou v bodě $[a, f(a)]$, tj. požadujeme

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Říkáme, že funkce f je **konvexní** v bodě a, jetliže naopak je její graf nad tečnou v bodě a, tj.

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkce je konvexní nebo konkávní na intervalu, jestliže má tuto vlastnost v každém jeho bodě.
Má-li funkce f spojité druhé derivace v okolí bodu a, z Taylorova rozvoje druhého řádu se zbytkem

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(c)(x - a)^2.$$

Proto je zjevně funkce konvexní, kdykoliv je $f''(a) > 0$, a je konkávní, kdykoliv $f''(a) < 0$.
Pokud je druhá derivace nulová, můžeme (opatrně) použít derivace vyšších řádů.

Bod a nazýváme **inflexní bod** diferencovatelné funkce f, jestliže graf funkce f přechází z jedné strany tečny na druhou.
Předpokládejme, že f má spojité třetí derivace a napišme si Taylorův rozvoj třetího řádu se zbytkem:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(c)(x-a)^3.$$

Je-li a nulový bod druhé derivace takový, že $f'''(a) \neq 0$, pak je třetí derivace nenulová i na nějakém okolí a jde proto zjevně o inflexní bod. Znaménko třetí derivace nám v takovém případě určuje, zda graf funkce přechází tečnu zdola nahoru nebo naopak.
Pokud je bod a navíc izolovaným nulovým bodem druhé derivace a zároveň inflexním bodem, pak zjevně je na nějakém malém okolí bodu a funkce na jedné straně konkávní a na druhé konvexní. Inflexní body tedy můžeme také vnímat jako body přechodu mezi konkávním a konvexním chováním grafu funkce.

Asymptotou funkce f v nevlastním bodě ∞ je taková přímka $y = ax + b$, pro kterou je

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Říkáme jí také **asymptota se směrnicí**. Pokud taková asymptota existuje, platí

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$$

a tedy existuje i limita

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Pokud ovšem existují poslední dvě limity, existuje i limita z definice asymptoty, jde proto i o podmínky dostatečné. Obdobně v $-\infty$.
Zbývají nám případné přímky kolmé na osu x: Asymptoty v bodech $a \in \mathbb{R}$ jsou přímky $x = a$ takové, že funkce f má v bodě a alespoň jednu jednostrannou limitu nekonečnou. Hovoříme tako o **asymptotách bez směrnice**.

Závislostmi mezi různými veličinami, řekněme y a x, často nejsou dány pevně. Explicitní vztah $y = f(x)$ s nějakou funkcí f je tedy jen jednou z možností. Derivování pak vyjadřuje, že okamžitá změna $y = f(x)$ je úměrná okamžité změně x a to s úměrou $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Tento vztah pak píšeme

$$df(x) = \frac{df}{dx}(x)dx,$$

kde $df(x)$ interpretujeme jako lineární zobrazení přírůstků dané $df(x)(\Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x$, zatímco $dx(x)(\Delta x) = \Delta x$.
Hovoříme o **diferenciálu funkce** f pokud platí aproximační vlastnost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - df(x)(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Z Taylorovy věty tedy vyplývá, že funkce s ohraničenou derivací f' má diferenciál df. To zejména v bodě x nastane, když je v něm první derivace $f'(x)$ existuje a je spojitá.

Pokud je veličina x vyjádřena pomocí další veličiny t, tj. $x = g(t)$, a to opět funkcí se spojitou první derivací, pak pravidlo o derivaci složené funkce říká, že i složená funkce $f \circ g$ má opět diferenciál

$$df(t) = \frac{df}{dx}(x)\frac{dx}{dt}(t)dt.$$

Můžeme proto vnímat df jako lineární přiblížení dané veličiny v závislosti na přírustcích závislé proměnné, ať už je tato závislost dána jakkoliv.

Křivost grafu funkce

Graf hladké funkce $f(x)$ teď budeme diskutovat jako zvláštní případ parametrizované křivky v rovině. Můžeme si ji představit jako pohyb v rovině parametrizovaný pomocí nezávislé proměnné x. Pro libovolný bod x z definičního oboru naší funkce můžeme okamžitě výpočtem první derivace vidět vektor $(1, f'(x)) \in \mathbb{R}^2$, který představuje okamžitou rychlost takového pohybu. Tečna bodem $[x, f(x)]$ parametrizovaná pomocí tohoto směrového vektoru pak představuje lineární přiblížení křivky.
Viděli jsme už také, že v případě, že $f''(x) = 0$ a zároveň $f'''(x) \neq 0$, přechází graf naší funkce přes svoji tečnu, tzn. že tečna je i nejlepším přiblížením křivky v bodě x i do druhého řádu. To zpravidla popisujeme tvrzením, že má graf funkce f v bodě x **nulovou křivost**.

Tečnu grafu v pevném bodě $P = [x, f(x)]$ jsme dostali pomocí limity sečen, tj. přímek procházejícími body P a $Q = [x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$. Chceme-li přiblížit druhou derivaci, budeme body P a $Q \neq P$ prokládat kružnicí C_Q, jejíž střed je na průsečíku kolmic na tečny, vztyčených v bodech P a Q. Pro poloměr této tzv. **oskulační kružnice** platí

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\alpha} = \frac{(1 + (f')^2)^{3/2}}{f''}.$$