

# MB202 – Diferenciální a integrální počet B

## Newtonův a Riemannův integrál funkcí

# Obsah přednášky

- 1 Newtonův integrál
- 2 Integrace „po paměti“
- 3 Integrace per partes a substitucí
- 4 Riemannův integrál

Předpokládejme, že známe na intervalu  $[a, b]$  reálnou nebo komplexní funkci  $F(x)$  reálné proměnné  $x$  a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $n$  částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech  $x_i$  výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Funkci  $F$  nazýváme **neurčitý integrál** k funkci  $f$ .

Neurčitý integrál reálné funkce  $f(x)$  nejspíš bude pro rozumné funkce vyjadřovat plochu vytyčenou grafem funkce  $f$ , souřadnou osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou  $x$ !).

Dá se tedy očekávat, že takovou plochu skutečně spočteme jako rozdíl hodnot neurčitého integrálu v krajních bodech intervalu. Tomuto postupu se také říká **Newtonův integrál**. Píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

V případě komplexní funkce  $f$  je i reálná a imaginární část jejího integrálu jednoznačně dána reálnou a imaginární částí  $f$ , proto se v dalším omezíme na reálné funkce.

## Poznámka

V dalším skutečně ukážeme, že lze rozumně definovat pojem plocha v rovině tak, aby ji bylo možné počítat právě uvedeným způsobem. Newtonův integrál má ale jednu podstatnou vadu — jeho vyčíslení vyžaduje znalost neurčitého integrálu. Tu obecně není snadné spočítat i když ukážeme, že ke všem spojitým funkcím  $f$  existuje. Proto budeme nařed diskutovat jinou definici integrálu.

Všimněme si ještě, že neurčitý integrál je na každém souvislém intervalu  $[a, b]$  určen jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ , pak Taylorův rozvoj prvního řádu se zbytkem v bodě  $a$  dává

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) + (f(c) - f(c))(x - a) = F(a) - G(a)$$

na nějakém okolí bodu  $a$ . Pokud by ale  $x_0 < b$  bylo supremem hodnot, pro které tento vztah ještě platí, opětovnou volbou tohoto bodu za  $a$  dosáhneme rozšíření tohoto vztahu i napravo od něj. Musí tedy platit na celém intervalu.

S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

Neurčitý integrál nám formálně dovoluje spočít Riemannův integrál pro každou spojitou funkci. Nicméně prakticky bývá zejména použitelný tam, kde v integrované funkci umíme derivaci přímo uvidět. K tomu v jednoduchých případech stačí číst tabulky pro derivace funkcí v našem zvěřinci naopak.

Dostáváme tak např. následující tvrzení pro všechna  $a \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq -1$ :

$$\int a \, dx = ax + C$$
$$\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$
$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{a}{x} dx = a \ln x + C$$

$$\int a \cos bx dx = \frac{a}{b} \sin bx + C$$

$$\int a \sin bx dx = -\frac{a}{b} \cos bx + C$$

$$\int a \cos bx \sin^n bx dx = \frac{a}{b(n+1)} \sin^{n+1} bx + C$$

$$\int a \sin bx \cos^n bx dx = -\frac{a}{b(n+1)} \cos^{n+1} bx + C$$

$$\int a \operatorname{tg} bx dx = -\frac{a}{b} \ln(\cos bx) + C$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \right) + C$$

Pozor definiční obor, na kterém je neurčitý integrál dobře definován!



K takovýmto tabulkovým hodnotám lze relativně snadno dodávat další jednoduchými pozorováními vhodné struktury integrovaných funkcí. Např.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C.$$

Výpočet integrálu pomocí neurčitého integrálu, spolu s pravidlem

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$$

pro derivaci součinu funkcí, dává následující formuli pro neurčitý integrál

$$F(x) \cdot G(x) + C = \int F'(x)G(x) dx + \int F(x)G'(x) dx.$$

Tato formule se většinou používá v případě, že jeden z integrálů napravo máme počítat, zatímco druhý umíme počítat lépe.

Uveďme si nějaké příklady. Nejprve spočteme

$$I = \int x \sin x \, dx.$$

V tomto případě pomůže volba  $F(x) = x$ ,  $G'(x) = \sin x$ . Odtud  $G(x) = -\cos x$ , proto také

$$I = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Obvyklým trikem je také použít tento postup s  $F'(x) = 1$ :

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - x + C.$$

Je-li  $F'(y) = f(y)$  a  $y = \varphi(x)$ , potom

$$\frac{dF(\varphi(x))}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x)$$

a tedy  $F(y) + C = \int f(y) dy$  lze spočítat jako

$$F(\varphi(x)) + C = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Dosažením  $x = \varphi^{-1}(y)$  pak dostaneme původně požadovaný neurčitý integrál. Častěji zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\int f(y) dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

a hovoříme o substituci za proměnnou  $y$ .

Pro Riemannovy součty je možné substituci porozumět snadno tak, že přírůstky v proměnné  $y$  a v  $x$  jsou vzájemně ve vztahu

$$dy = \varphi'(x) dx$$

který odpovídá vztahu  $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$  a snadno jej spočítáme výpočtem derivace.

Jako příklad:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

zvolíme substituci  $x = \sin t$ . Odtud  $dx = \cos t dt$  a dostáváme

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt = \int dt = t + C.$$

Zpětným dosazením  $t = \arcsin x$  dopočítáme již známý vzorec

$$I = \arcsin x + C.$$

Při substitucích je třeba dát pozor na skutečnou existenci inverzní funkce  $y = \varphi(x)$  a při výpočtu určitého integrálu je třeba řádně přepočítávat i meze.

Často vede použití substitucí a metody per partes k rekurentním vztahům, ze kterých teprve lze dopočíst hledané integrály. Spočtěme si alespoň jeden příklad. Metodou per partes počítáme

$$\begin{aligned} I_m &= \int \cos^m x \, dx = \int \cos^{m-1} x \cos x \, dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x - (m-1) \int \cos^{m-2} x (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Odtud díky vztahu  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  dostáváme

$$mI_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)I_{m-2}$$

a počáteční hodnoty jsou

$$I_0 = x, \quad I_1 = \sin x.$$

## Integrace racionálních funkcí lomených

U racionálních funkcí lomených si můžeme při integraci pomoci několika zjednodušeními. Zejména v případě, že je stupeň polynomu  $f$  v čitateli větší nebo roven stupni polynomu  $g$  v jmenovateli, je rozumné hned z kraje dělením se zbytkem převést integraci na součet dvou integrálů. První pak bude integrací polynomu a druhý integrací výrazu  $f/g$  se stupněm  $g$  ostře větším, než je stupeň  $f$ . Toho skutečně dosáhneme prostým vydělením polynomů:

$$f = q \cdot g + h, \quad \frac{f}{g} = q + \frac{h}{g}.$$

Můžeme tedy zrovna předpokládat, že stupeň  $g$  je ostře větší než stupeň  $f$ .

Další postup si ukažme na jednoduchém příkladě. Zkusme si rozebrat, jak se dostaneme k výsledku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-2}{x + 1} + \frac{6}{x + 2},$$

který již umíme integrovat přímo:

$$\int \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} dx = -2 \ln |x + 1| + 6 \ln |x + 2| + C.$$

Především převedením součtu zlomků na společného jmenovatele tuto rovnost snadno ověříme. Pokud naopak víme, že lze náš výraz rozepsat ve tvaru

$$\frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

a jde nám pouze o výpočet koeficientů  $A$  a  $B$ , můžeme pro ně získat rovnice pomocí roznásobení obou stran polynomem  $x^2 + 3x + 2$  ze jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin  $x$  ve výsledných polynomech napravo i nalevo:

$$4x + 2 = A(x + 2) + B(x + 1) \implies 2A + B = 2, \quad A + B = 4.$$



Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterou jsme právě odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

Uvažme reálnou funkci  $f$  definovanou na intervalu  $[a, b]$  a zvolme dělení tohoto intervalu, spolu s výběrem reprezentantů  $\xi_i$  jednotlivých částí, tj.  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  a zároveň  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Normou takového dělení nazýváme číslo  $\min\{x_i - x_{i-1}\}$ . **Riemannův součet** odpovídající zvolenému dělení  $\Xi = (x_0, \dots, x_n)$  a reprezentantům  $\xi$  je dán výrazem

$$S_{\Xi, \xi} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Řekneme, že **Riemannův integrál** funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  existuje, jestliže pro každou posloupnost dělení s reprezentanty  $(\Xi_k, \xi_k)$  s normou dělení jdoucí k nule existuje limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\Xi_k, \xi_k} = S,$$

jejíž hodnota navíc nezávisí na volbě posloupnosti dělení a reprezentantů. Píšeme v takovém případě opět

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Tato definice nevypadá příliš prakticky, nicméně nám dovolí sformulovat a dokázat některé jednoduché vlastnosti Riemannova integrálu.

## Theorem

(1) Je-li  $f$  omezená reálná funkce definovaná na reálném intervalu  $[a, b]$  a  $c \in [a, b]$  nějaký vnitřní bod, potom integrál  $\int_a^b f(x)dx$  existuje tehdy a jen tehdy když existují oba integrály  $\int_a^c f(x)dx$  a  $\int_c^b f(x)dx$ . V takovém případě pak také platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(2) Jsou-li  $f$  a  $g$  dvě reálné funkce definované na intervalu  $[a, b]$ , a existují-li integrály  $\int_a^b f(x)dx$  a  $\int_a^b g(x)dx$ , pak existuje také integrál jejich součtu a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

## Theorem (pokračování)

(3) Je-li  $f$  reálná funkce definovaná na intervalu  $[a, b]$ ,  $C \in \mathbb{R}$  konstanta a existuje-li integrál  $\int_a^b f(x)dx$ , pak existuje také integrál  $\int_a^b C \cdot f(x)dx$  a platí

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

## Důkaz.

(1) Předpokládejme nejprve, že existuje integrál přes celý interval. Při jeho výpočtu se omezíme na limity Riemannových součtů, jejichž dělení mají bod  $c$  mezi svými dělicími body. Každý takový součet dostaneme jako součet dvou dílčích Riemannových součtů. Pokud by tyto dílčí součty v limitě závisely na zvolených rozděleních a reprezentantech, pak by celkové součty nemohly být v limitě na volbách nezávislé (stačí ponechat jednu posloupnost dělení podintervalu stejnou a druhou měnit tak, aby se limita změnila).

Naopak, jestliže existují oba integrály na podintervalech, jsou libovolně přesně aproximovatelné Riemannovými součty a to navíc nezávisle na jejich volbě. Pokud do libovolné posloupnosti Riemannových součtů přes celý interval  $[a, b]$  přidáme jeden dělicí bod  $c$  navíc, změníme hodnotu celého součtu i částečných součtů přes intervaly patřící do  $[a, c]$  a  $[c, b]$  nejvýše o násobek normy dělení a možných rozdílů omezené funkce  $f$  na celém  $[a, b]$ . To je libovolně blízko k nule při zmenšující se normě dělení.  $\square$

pokračování.

(2) V každém Riemannově součtu se součet funkcí projeví jako součet hodnot ve vybraných reprezentantech. Protože je násobení reálných čísel distributivní, vyplývá odtud právě dokazované tvrzení.

(3) Stejná úvaha jako v předchozím případě. □

## Theorem

*Pro každou spojitou funkci  $f$  na konečném intervalu  $[a, b]$  existuje její Riemannův integrál  $\int_a^b f(x)dx$ . Navíc, je funkce  $F(t)$  zadaná na intervalu  $[a, b]$  pomocí Riemannova integrálu*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

*neurčitým integrálem funkce  $f$  na tomto intervalu.*

Důkaz.

Docela složitý. . .



## Poznámky

(1) Předchozí dvě věty nám říkají, že integrál je lineární zobrazení

$$\int : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

vektorového prostoru spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$  do reálných čísel (tj. lineární forma).

(2) Dokázali jsme, že každá spojitá funkce je derivací nějaké funkce. Newtonův a Riemannův integrál tedy jako koncepty pro spojitě funkce splývají. Riemannův integrál spojitých funkcí lze proto spočítat pomocí rozdílu hodnot  $F(b) - F(a)$  neurčitého integrálu  $F$ .

(3) V prvním pomocném tvrzení v důkazu předchozí věty jsme dokázali důležité tvrzení, že pro omezenou funkci  $f$  na intervalu  $[a, b]$  vždy existují limity horních součtů i dolních součtů. Říká se jim také **horní Riemannův integrál** a **dolní Riemannův integrál**. Takto lze pro omezené funkce ekvivalentně definovat i Riemannův integrál (jak jsme konečně v důkazu i činili).



## Poznámky – pokračování

(4) V dalším tvrzení v důkazu jsme odvodili důležitou vlastnost spojitých funkcí, které se říká **stejněměrná spojitost** na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ . Zjevně je každá stejněměrně spojitá funkce také spojitá, naopak to ale na otevřených intervalech platit nemusí.

(5) Nechť  $f$  je na  $[a, b]$  **po částech spojitá**, tj. všude kromě konečně mnoha **bodů nespojitosti**  $c_i$ ,  $a < c_i < b$ , ve kterých však existují jednostranné limity. Vzhledem k aditivnosti integrálu vůči intervalu přes který se integruje existuje podle poslední věty v takovém případě integrál  $F(t) = \int_a^t f(x)dx$  pro  $t \in [a, b]$  a derivace funkce  $F(t)$  existuje ve všech bodech  $t$ , ve kterých je  $f$  spojitá. Ve zbývajících bodech je funkce  $F(t)$  spojitá, je to tedy spojitá funkce na celém intervalu  $[a, b]$ . Pokud zvolíme neurčitý integrál tak, aby na sebe funkce navazovaly, pak bude i celý integrál vyčíslen jako rozdíl v krajních hodnotách.