MB202 – Diferenciální a integrální počet B
Fourierovy řady, metrické prostory

Obsah přednášky

Pro pevný interval $I = [a, b]$, konečný nebo nekonečný, definujeme kvadrát vzdálenosti funkcí na I takto:

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx.$$

Samozřejmě je třeba předpokládat, že tento Riemannův integrál existuje. Velikost $\|f\|$ funkce f je pak její vzdálenost od funkce nulové, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Funguje dobře pro množinu $\mathcal{S} = \mathcal{S}[a, b]$ omezených a po částech spojitých reálných funkcí na I.

Viděli jsme, že $\mathcal{S}$ je vektorový prostor a snadno se ověří, že námi právě uvažovaná velikost je odvozena z dobře definovaného skalárního součinu, tj. symetrického bilineárního zobrazení

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

s příslušnými vlastnostmi. V případě komplexních hodnot funkcí, půjde o skalární součet z unitárních prostorů, tj. $g(x)$ bude ve výrazu vystupovat s pruhem (komplexně konjugovaná hodnota).

V konečněrozměrném případě jsme takto definovali velikost vektorů. Nyní je to naprosto stejné a pokud zúžíme naši definici na vektorový prostor generovaný nad reálnými čísly jen konečně mnoha funkcemi $f_1, \dots, f_k$, dostaneme opět dobře definovaný skalární součin na tomto konečněrozměrném vektorovém podprostoru.

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o tzv. **ortonormální bázi** (pracujeme také s ortogonálními).
Grammova–Schmidtova ortogonalizace vytvoří z libovolného spočetného systému generátorů f_i nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$. Spočteme je postupně: $g_1 = f_1$ a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \cdots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell > 1$.
Příkladem jsou např. ortogonální polynomy.

Aplikujme tuto proceduru na první tři polynomy $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Dostaneme $g_1 = 1$,

$$
\begin{aligned}
g_2 &= x - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx \cdot 1 = x - 0 = x \\
g_3 &= x^2 - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx \cdot 1 - \frac{1}{\|g_2\|^2} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x \, dx \cdot x \\
&= x^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Příslušná ortogonální báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ na intervalu $[-1, 1]$ je tedy $1, x, x^2 - 3$. Normalizací, tj. vhodným násobením skalárem tak, aby prvky v bázi měly velikost jedna dostaneme ortonormální bázi

$$
h_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).
$$

Takovým ortonormálním generátorům $\mathbb{R}_k[x]$ se říká **Legendreovy polynomy**.

Připomeňme si výhody, které ortonormální báze podprostorů měly pro konečněrozměrné vektorové prostory. Můžeme pokračovat v příkladu Legendreových polynomů h_1, h_2 a h_3, které generují $\mathbb{R}_2[x]$ a uvažovat třeba $V = \mathbb{R}_\infty[x]$ jakožto funkce na intervalu $[0,1]$. Pro libovolný polynom $h \in V$ bude funkce

$$H = \langle h, h_1\rangle h_1 + \langle h, h_2\rangle h_2 + \langle h, h_3\rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje vzdálenost $\|h - H\|$ mezi všemi funkcemi v $\mathbb{R}_2[x]$.
Koeficienty pro nejlepší aproximaci zadané funkce pomocí funkce z vybraného podprostoru je možné tedy získat prostě integrací. Stejně tak ale tato formule zadá nejlepší aproximaci polynomem nejvýše druhého stupně pro libovolnou funkci $h \in \mathcal{S}[a,b]$ ve smyslu naší vzdálenosti funkcí na tomto prostoru.

Poslední příklad podbízí zobecnění – co se stane, když zvolíme úplně libovolný spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{S}$ takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin? Takovému systému funkcí na intervalu I říkáme **ortogonální systém funkcí**. Jestliže jsou všechny funkce f_n v posloupnosti po dvou ortogonální a zároveň je pro všechna n velikost $\|f_n\| = 1$ normovaná, hovoříme o **ortonormálním systému funkcí**.
Nechť tedy tvoří posloupnost funcí f_n ortogonální systém po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$ a předpokládejme, že pro konstanty c_n konverguje řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

stejnoměrně na I. Pak snadno vyjádříme skalární součin $\langle F, f_n \rangle$ po jednotlivých sčítancích:

$$\langle F, f_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx = c_n \|f_n\|^2.$$

Máme tedy tušení, v jakou přibližně odpověď je možné doufat, a docela přehledně nám ji skutečně dává následující věta:

Theorem

Nechť f_n, $n = 1, 2, \dots,$ *je ortogonální posloupnost funkcí Riemannovsky integrovatelných na* $I = [a, b]$ *a nechť* g *je libovolná funkce Riemannovsky integrovatelná v kvadrátu na* I*. Označme*

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b f_n(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

(1) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ *má ze všech lineárních kombinací funkcí* $f_1, \dots, f_n$ *nejmenší vzdálenost od* g *výraz*

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x).$$

Theorem (pokračování)

(2) Řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$ vždy konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 \le \|g\|^2.$$

(3) Vzdálenost g od částečných součtů $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n f_n$ jde v limitě k nule, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ještě než se pustíme do důkazu, zkusíme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty.
Náš ortogonální systém funcí je libovolný, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí f_i.
Např. když se omezíme u ortogonálních polynomů pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze sudé funkce.
Nicméně hned první tvrzení nám říká, že vždycky budeme dosahovat nejlepší možné aproximace částečnými součty.

Druhé a třetí tvrzení pak můžeme vnímat jako analogii ke kolmým průmětům do podprostorů vyjádřených pomocí souřadnic.
Skutečně vidíme, že pokud pro naši funkci g bodově konverguje řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$, pak je funkce $F(x)$ kolmým průmětem g do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.
Zároveň ale naše věta neříká, že by částečné součty uvažované řady musely bodově konvergovat k nějaké funkci. Tj. řada $F(x)$ nemusí být obecně konvergentní ani v případě, kdy nastane rovnost v (3). Pokud ale např. existuje konečná hodnota $\sum_{n=1}^{\infty} |c_i|$ a všechny funkce f_n jsou stejnoměrně omezené na I, pak zřejmě řada $F(x)$ konverguje v každém x.

Důkaz věty (v případě reálných hodnot funkcí):
Zvolme libovolnou lineární kombinaci $f = \sum_{n=1}^{k} a_n f_n$ a spočtěme její vzdálenost od g. Dostáváme

$$\|g - \sum_{n=1}^{k} a_n f_n\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{n=1}^{k} \|f_n\|^2((c_n - a_n)^2 - c_n^2).$$

Evidentně lze poslední výraz minimalizovat právě volbou $a_n = c_n$ a tím je první tvrzení dokázáno.

Dosazením minimalizující volby dostáváme tzv. **Besselovu identitu**

$$\|g - \sum_{n=1}^{k} c_n f_n\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^{k} c_n^2 \|f_n\|^2,$$

ze které okamžitě díky nezápornosti levé strany vyplývá tzv. **Besselova nerovnost**

$$\sum_{n=1}^{k} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

Tím je dokázáno druhé tvrzení, protože každá neklesající a shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu (a je jí supremum celé množiny hodnot prvků posloupnosti).

Jestliže v Besselově nerovnosti nastane rovnost, hovoříme o tzv. **Parsevalově rovnosti**. Přímo z definic vyplývá nyní tvrzení (3):

(3) Vzdálenost g od částečných součtů $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n f_n$ jde v limitě k nule, tj.

$$\lim_{k \to \infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ortonogonální systém funkcí nazveme **úplný ortogonální systém** na intervalu $I = [a, b]$, jetliže platí Parsevalova rovnost pro každou funkci g s konečnou velikostí $\|g\|$ na tomto intervalu.

Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

- Není snadné říci, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$.
- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen nejlepší možné přiblížení takovou řadou $F(x)$.

V případě, že místo ortonogonálního systému f_n máme systém ortonormální, jsou formulky ve větě o něco jednodušší, žádné další zlepšení ale nenastane.

Jako pěkný příklad na integrování lze elementárními metodami ověřit, že systém funkcí

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$$

je ortogonální systém na intervalu $[-\pi, \pi]$ (a také na kterémkoliv jiném intervalu o délce 2π).
Řady z předchozí věty odpovídající tomuto systému nazýváme **Fourierovy řady**. I v obecném případě diskutovaném výše se někdy hovoří o obecných Fourierových řadách vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí f_n.
Koeficienty c_n se pak nazývají **Fourierovy koeficienty funkce** f.

Na intervalu $[-\pi, \pi]$ jsou velikosti všech funkcí kromě první vždy $\sqrt{\pi}$, první má velikost $\sqrt{2\pi}$. Lze dokázat, že náš systém funkcí je úplným ortogonálním systémem, nebudeme to zde ale dokazovat.
Ve smyslu vzdálenosti funkcí definované pomocí našeho skalárního součinu proto budou částečné součty Fourierovy řady $F(x)$ pro libovolnou funkci $g(x)$ s konečným integrálem $\int_a^b g(x)^2\,dx$, tj.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\,dx,$$

vždy konvergovat k funkci $g(x)$.

Z obecnějších úvah lze dovodit, že z konvergence v tomto smyslu vždy vyplývá bodová konvergence částečných součtů ve skoro všech bodech $x \in I$. Nebudeme zde ale ani vysvětlovat, co znamená „skoro všechny“, ani nebudeme takový výsledek dokazovat.

Jako příklad uveďme Fourierovu řadu pro periodickou funkci vzniklou zúžením Heavisideovy funkce na jednu periodu. Tj. naše funkce g bude na intervalu $[-\pi, 0]$ rovna -1 a na intervalu $[0, \pi]$ bude rovna 1. Protože jde o funkci lichou, jistě budou všechny koeficienty u funkcí $\cos(nx)$ nulové, a pro koeficienty u funkcí $\sin(nx)$ spočteme

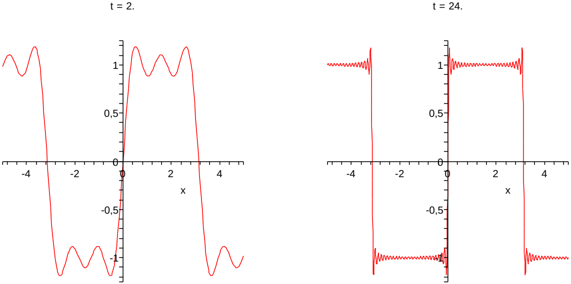
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)$$

a součet jejích prvních pěti a prvních padesáti členů je na následujících dvou obrázcích.

Všimněme si, že se zvyšujícím se počtem členů řady se výrazně spřesňuje aproximace s výjimkou stále se zmenšujícího okolí bodu nespojitosti, na němž je ale maximum odchylky stále zhruba stejné. Je to obecná vlastnost Fourierových řad, které se říká Gibbsův jev.



Povšimněme si také, že v samotném bodě nespojitosti je hodnota aproximující funkce právě v polovině mezi limitami zprava a zleva pro Heavisideovu funkci. Nelze očekávat, že by konvergence pro funkce s body nespojitosti mohla být stejnoměrná (to by totiž g musela být coby stejnoměrná limita spojitých funkcí sama spojitá!).

Bez podrobného důkazu si uvedeme následující větu podávající ucelený obrázek o bodové konvergenci Fourierových řad. Nejde o nutné podmínky konvergence a v literatuře lze najít řadu jiných formulací. Tato je ale jednoduchá a postihuje velké množství užitečných případů.

Theorem

Nechť g je po částech spojitá a monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $F(x)$ konverguje na $[-\pi, \pi]$ a součet je

- *roven hodnotě $g(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ve kterém je funkce $g(x)$ spojitá,*
- *v každém bodě nespojitosti x_0 funkce $g(x)$ roven*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} g(x) + \lim_{x \to x_0^-} g(x)\right),$$

- *v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to -\pi^+} g(x) + \lim_{x \to \pi^-} g(x)\right).$$

Pokud navíc je $g(x)$ spojitá, periodická s periodou 2π a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada $F(x)$ stejnoměrně.

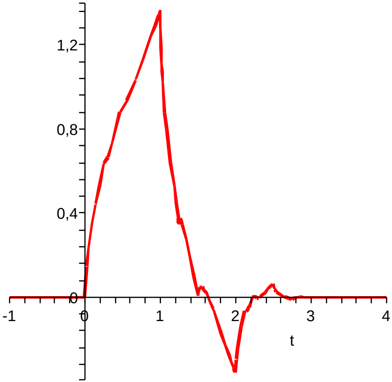
Fourierovy řady a další z nich vycházející nástroje jsou využívány ke zpracování různých signálů, obrázků apod. Povaha použitých periodických goniometrických funkcí a jejich prosté škálování pomocí zvětšující se frekvence zároveň omezují jejich použitelnost. V mnoha oborech proto vyvstala přirozená potřeba nalézt šikovnější úplné ortogonální systémy funkcí, které budou vycházet z předpokládané povahy dat a které bude možné efektivněji zpracovávat.

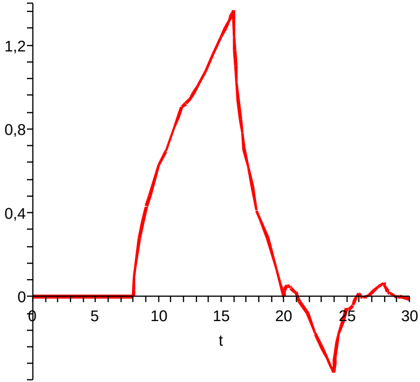
Takový systém se lze například vytvořit volbou vhodné spojité funkce ψ s kompaktním nosičem, ze které sestrojíme spočetně mnoho funkcí ψ_{ij}, $j, k \in \mathbb{Z}$, pomocí dyadických translací a dilatací:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

Pokud tvar mateřské funkce ψ dobře vystihuje možné chování dat, a zároveň její potomci ψ_{jk} tvoří úplný ortogonální systém, pak se zpravidla dobře daří konkrétní zpracovávaný signál aproximovat pomocí jen několika málo funkcí.

Nebudeme zde zacházet do podrobností, jde o mimořádně živý směr výzkumu i základ komerčních aplikací. Zájemce snadno najde spoustu literatury. Na obrázku je ilustrována tzv. Daubechies mateřská wavelet $D4(x)$ a její dcera $D4(2^{-3}x-1)$.





Wavelety navíc nejsou vůbec definovány jako funkce analyticky. Místo toho jsou pouze tabelovány jejich hodnoty v dostatečném rozlišení.

Definition (Metriky a normy)

Množina X spolu se zobrazením $d : X \times X \to \mathbb{R}$ splňující

$$d(x,y) \geq 0 \text{ a } d(x,y) = 0, \text{ právě když } x = y, \tag{1}$$

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{2}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \tag{3}$$

se nazývá **metrický prostor**. Zobrazení d je **metrika** na X.
Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a $\| \; \| : X \to \mathbb{R}$ je funkce splňující

$$\|x\| \geq 0, \text{ přičemž } \|x\| = 0, \text{ právě když } x = 0, \tag{4}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \text{ pro všechny skaláry } \lambda, \tag{5}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{6}$$

pak funkci $\| \; \|$ nazýváme **norma** na X a prostor X je **normovaný vektorový prostor**.
Norma vždy zadává metriku $d(x,y) = \|x - y\|$.

Definition (Cauchyovské posloupnosti)

Uvažme libovolnou posloupnost prvků $x_0, x_1, \dots$ v metrickém prostoru X takovou, že pro libolné pevně zvolené kladné reálné číslo ϵ platí pro všechny dvojice prvků x_i, x_j posloupnosti, až na konečně mnoho výjimek (které závisí na volbě ϵ),

$$d(x_i, x_j) < \epsilon.$$

Jinak řečeno, pro každé pevné $\epsilon > 0$ existuje index N takový, že předcházející nerovnost platí pro všechna $i, j > N$. Takové posloupnosti prvků se říká **cauchyovská posloupnost**.

Stejně jako u reálných či komplexních čísel bychom rádi, aby každá cauchyovská posloupnost prvků $x_i \in X$ konvergovala k nějaké hodnotě x v následujícím smyslu:

Definition

Jestliže pro posloupnost prvků $x_0, x_1, \ldots \in X$, pevně zvolený prvek $x \in X$ a pro libovolné kladné reálné číslo ϵ platí pro všechna i, až na konečně mnoho výjimek (závisejících na volbě ϵ),

$$d(x_i, x) < \epsilon,$$

říkáme, že posloupnost x_i, $i = 0, 1, \ldots,$ **konverguje** k prvku x, kterému říkáme **limita** posloupnosti x_i, $i = 0, 1, \ldots$ v metrickém prostoru X.

Díky trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro každou dvojici prvků x_i, x_j z konvergentní posloupnosti, s dostatečně velikými indexy (značení jako v definici výše),

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) < 2\epsilon,$$

a proto je každá konvergentní posloupnost také cauchyovská.

Definition (Úplné metrické prostory)

Metrické prostory, kde platí i obrácené tvrzení, tj. že *každá cauchyovská posloupnost je konvergentní* nazýváme **úplné metrické prostory**.

Stejně jako v případě reálných čísel můžeme zformulovat konvergenci pomocí „otevřených okolí".

Definition (Otevřené a uzavřené množiny)

Otevřené ϵ–okolí prvku x v metrickém prostoru X (stručně ϵ–okolí) je množina

$$\mathcal{O}_\epsilon(x) = \{y \in X;\ d(x,y) < \epsilon\}.$$

Podmnožina $U \subset X$ je **otevřená**, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějaké jeho ϵ–okolí. Pomnožina $W \subset X$ je **uzavřená**, jestliže je její doplněk $X \setminus W$ otevřenou množinou.

Namísto ϵ–okolí hovoříme také o (otevřené) ϵ–kouli se středem v x. V případě normovaného prostoru si vystačíme s ϵ–koulemi se středem v nule, jejichž přičtením k danému prvku x dostaneme právě jeho ϵ–okolí.

Hromadné body podmnožiny $A \subset X$ jsou takové $x \in X$, ke kterým konverguje posloupnost bodů z A neobsahující bod x.

Theorem

Množina je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body

Důkaz.

Skutečně, A je uzavřená, právě když pro každý bod $x \notin A$ existuje nějaké $\epsilon > 0$ takové, že celé ϵ–okolí $\mathcal{O}_\epsilon(x)$ má s A prázdný průnik. Pokud by tedy A byla uzavřená a x byl hromadný bod množiny A, který do A nepatří, pak v libovolném takovém ϵ–okolí takového x leží nekonečně mnoho bodů množiny A, což je spor.
Naopak předpokládejme, že A obsahuje všechny své hromadné body a uvažme $x \in X \setminus A$. Pokud by v každém ϵ–okolí bodu x existoval bod $x_\epsilon \in A$, pak postupně volbami $\epsilon = 1/n$ dostaneme posloupnost bodů $x_n \in A$ konvergující k x. Pak by ovšem x musel být hromadným bodem, a tedy v A, takže opět máme spor. $\square$

Pro každou podmnožinu A v metrickém prostoru X definujeme její **vnitřek** jako množinu těch bodů v A, které do A patří i s celým svým nějakým okolím. Dále definujeme uzávěr $\bar{A}$ množiny A jako sjednocení původní množiny A s množinou všech jejích hromadných bodů.
Libovolný průnik a libovolné konečné sjednocení uzavřených množin v metrickém prostoru je opět uzavřená množina.
Libovolné sjednocení oteřených množin je opět otevřená množina, ale jen konečný průnik otevřených množin je obecně opět otevřená množina.

Vnitřek množiny A je právě sjednocením všech otevřených množin v A obsažených, zatímco uzávěr A je průnikem všech uzavřených množin obsahujících A.
Uzavřené a otevřené množiny představují základní pojmy tzv. **topologie**.

Pojem konvergence můžeme nyní zformulovat tak, že posloupnost prvků x_i v metrickém prostoru X, $i = 0, 1, \dots,$ konverguje k $x \in X$, právě když pro každou otevřenou množinu U obsahující x jsou všechny body naší posloupnosti, až na konečně mnoho výjimek, obsaženy v U.

Definition

Zobrazení $f : W \to Z$ mezi metrickými prostory je spojité jestliže vzor $f^{-1}(V)$ každé otevřené množiny $V \subset Z$ je otevřená množina ve W. Samořejmě to neznamená nic jiného než tvrzení, že pro každý prvek $z = f(x) \in Z$ a kladné číslo ϵ existuje kladné číslo δ tak, že pro všechny prvky $y \in W$ se vzdáleností $d_W(x, y) < \delta$ je také $d_Z(z, f(y)) < \epsilon$.

Zcela stejně jako u reálných funkcí je zobrazení f mezi metrickými prostory spojité právě tehdy, když respektuje konvergence posloupností.

L_p–normy

Začneme na reálných nebo komplexních konečněrozměrných vektorových prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ a definujeme pro pevné reálné číslo $p \geq 1$ a libovolný vektor $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p\right)^{1/p}.$$

Dokážeme, že takto je definována norma. První dvě vlastnosti z definice jsou zřejmé. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Vyjdeme přitom z tzv. **Hölderovy nerovnosti**.

Lemma (Hölderova nerovnost)

Pro pevné reálné číslo $p > 1$ a každé dvě n–tice nezáporných reálných čísel x_i a y_i platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

kde $1/q = 1 - 1/p$.

Teď už budeme umět dokázat, že $\| \ \|_p$ je skutečně norma:

Lemma (Minkowského nerovnost)

Pro každé $p > 1$ a všechny n–tice nezáporných reálných čísel $(x_1, \ldots, x_n)$ a $(y_1, \ldots, y_n)$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

K ověření této praktické nerovnosti vede následující trik využívající Hölderovu nerovnost. Jistě platí (všimněme si, že $p > 1$)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

a stejně tak

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Nyní sečtením posledních dvou nerovností, s využitím skutečnosti, že $p + q = pq$ a tedy $(p-1)q = pq - q = p$, dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p},$$

ale $1 - 1/q = 1/p$, takže jde právě o dokazovanou **Minkowského nerovnost**.

Ověřili jsme si tedy, že na každém konečněrozměrném reálném nebo komplexním vektorovém prostoru máme třídu norem $\| \ \|_p$ pro všechna $p \geq 1$. Kromě toho ještě klademe

$$\|z\|_\infty = \max\{|z_i|, \ i = 1, \dots, n\},$$

což je zjevně také norma.

Všimněme si, že Hölderovu nerovnost můžeme v kontextu těchto norem zapsat pro všechna $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ jako

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

pro všechna $p \geq 1$ a q splňující $1/p + 1/q = 1$, přičemž pro $p = 1$ klademe $q = \infty$.

L_p–normy pro posloupnosti a funkce

Nyní docela snadno zavedeme normy i na vhodných nekonečněrozměrných vektorových prostorech. Vektorový prostor ℓ_p, $p \geq 1$, je množina všech posloupností reálných nebo komplexních posloupností $x_0, x_1, \dots$ takových, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Všechny posloupnosti s omezenými absolutními hodnotami členů tvoří prostor ℓ_∞. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ okamžitě z Minkowského nerovnosti vidíme, že výraz

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

je norma na ℓ_p. Obdobně klademe na ℓ_∞

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 0, 1, \dots\}$$

a opět dostáváme normu.

Konečně, vraťme se k prostorům funkcí $\mathcal{S}^0[a,b]$ na konečném intervalu $[a,b]$ nebo $\mathcal{S}^0_c[a,b]$ na neohraničeném intervalu. S normou $\| \ \|_1$ jsme se již setkali. Zjevně ale pro každé $p > 1$ a pro všechny funkce v takovém prostoru funkcí existují Riemannovy integrály

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

a můžeme tedy definovat

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Riemannův integrál jsme definovali pomocí limitního přechodu vycházejícího z tzv. Riemannových součtů, které odpovídají dělením Ξ s reprezentanty ξ_i. V našem případě tedy jde o konečné součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p (x_i - x_{i-1}).$$

Hölderova nerovnost použitá na Riemannovy součty součinu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ dá

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)||g(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1})^{1/p}|g(\xi_i)|(x_i - x_{i-1})^{1/q}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p(x_i - x_{i-1})\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i)|^q(x_i - x_{i-1})\right)^{1/q},$$

přičemž napravo máme zjevně právě součin Riemannových součtů pro integrály $\|f\|_p$ a $\|g\|_q$.

Limitním přechodem tak ověřujeme tzv. **Hölderovu nerovnost pro integrály**:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f(x)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b g(x)^q\,dx\right)^{1/q}$$

platnou pro všechny nezáporné reálné funkce f a g v našem prostoru po částech spojitých funkcí s kompaktním nosičem

Přesně stejným postupem jako v předchozím odstavci odvodíme z Hölderovy nerovnosti nerovnost Minkowského v její integrální formě:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Je tedy $\| \ \|_p$ je skutečně norma na vektorovém prostoru všech spojitých funkcí s kompaktními nosiči pro všechna $p > 1$ (a pro $p = 1$ jsme tuto skutečnost ověřili už dávno). Pro celý prostor $S^0[a,b]$ po částech spojitých funkcí budeme sice také slovo norma v tomto kontextu používat, měli bychom ale přitom vědět, že musíme ztotožňovat funkce, které se od sebe liší jen hodnotami v bodech nespojitosti.

Mezi těmito normami je výjimečný případ $p = 2$, který jsme již dříve realizovali pomocí skalárního součinu. V tomto případě jsme mohli odvodit trojúhelníkovou nerovnost daleko jednodušeji pomocí Schwarzovy nerovnosti.
Pro funkce z $\mathcal{S}^0[a, b]$ můžeme definovat i obdobu L_∞–normy na n–rozměrných vektorech. Protože jsou naše funkce po částech spojité, budou pro ně na konečném uzavřeném intervalu vždy existovat suprema absolutních hodnot a klademe tedy pro takovou funkci f

$$\|f\|_\infty = \sup\{f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Všimněme si, že kdybychom za hodnoty $f(x)$ v bodech nespojitosti považovali jak jednostranné limity (které podle naší definice vždy existují), tak samotnou hodnotu funkce, pak můžeme pracovat s maximy místo suprem. Opět je zřejmé, že jde o normu (až na problémy s hodnotami v bodech nespojitosti).