MB202 – Diferenciální a integrální počet B
Integrální operátory a transformace

Obsah přednášky

V konečněrozměrných vektorových prostorech:

- vektory jsou dány množinou pevně zvolených generátorů a příslušnými souřadnicemi (zobrazení konečné množiny generátorů do prostoru souřadnic)
- výběr jedné souřadnice je lineární zobrazení vektorů do skalárů (tzv. lineární forma), obecně je každá lineární forma zadána pomocí jednořádkových matic (vektorů v duálním prostoru) jako součet součinů hodnot formy $f = (f_1, \dots, f_n)$ na generátorech se souřadnicemi vektoru $x^T = (x_1, \dots, x_n)^T$.
- Složitější lineární zobrazení s hodnotami opět ve vektorových prostorech byla obdobně zadána maticemi.

Velice podobně umíme přistoupit k lineárním operacím na prostorech funkcí.

Pracujme opět s vektorovým prostorem $\mathcal{S}$ všech po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$. Lineární zobrazení $\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ se nazývají (reálné) **lineární funkcionály**. Jednoduché příklady:

- vyčíslení funkce (případně jejích derivací) v jednotlivých bodech:

$$f \mapsto L(f) = f(x_0)$$

- pomocí integrace zadáme integrální funkcionál s pomocí pevně zvolené funkce $g(x)$:

$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Funkce $g(x)$ zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci $f(x)$. Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s $g(x) = 1$ pro všechny body x.

Dobrou představu dává volba

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

To je funkce hladká na celém $\mathbb{R}$ s kompaktním nosičem v intervalu $(-a, a)$.
Integrální funkcionál

$$L_y(f) = \int_a^b f(x)g(y-x)\,dx$$

je možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování“ hodnot funkce f kolem bodu $x = y$ (funkce g má ve svém středu má hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti a na obě strany).
Ještě lepší volbou je z tohoto pohledu libovolná funkce g jejíž integrál přes celou reálnou osu je jednička.

Pohled na integrální funkcionál L_y jako na zprůměrované chování funkce f v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu $a = -\infty$, $b = \infty$. Místo prostoru $\mathcal{S}$ všech po částech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ budeme uvažovat po částech spojité a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce f v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr y může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce $f \mapsto \tilde{f}$:

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx.$$

Této operaci se říká **konvoluce funkcí** f a g, značíme ji $f * g$. Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém $\mathbb{R}$.

Pomocí transformace $t = z - x$ se snadno spočte

$$(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)\,dx = -\int_{\infty}^{-\infty} f(z-t)g(t)\,dt = (g * f)(z),$$

je tedy konvoluce coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní.
Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument f je přenášenou informací, funkce g je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostorech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y,x)\,dx$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definiční obor takových funkcionálů je nutné vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

Zaměříme se na jeden mimořádně důležitý případ integrálních operátorů, tzv. **Fourierovu transformaci** $\mathcal{F}$, která úzce souvisí s Fourierovými řadami.
Připomeňme si základní formuli pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání $\omega = 2\pi/T$, kde T je čas jednoho oběhu:

$$\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Zjevně funkce $\cos \omega nt$, $\sin \omega nt$ tvoří ortogonální systém funkcí s periodou T a jejich velikosti na intervalu délky periody jsou $\sqrt{T/2}$, (při $n > 0$) např.

$$\int_{-T/2}^{T/2} (\sin \omega nt)^2 dt = \frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin ns)^2 ds = T/2.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci $f(t)$ zavedeme její **komplexní Fourierovy koeficienty** jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega nt}\,dt.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty Fourierových řad

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a těmito čísly c_n:

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Při reálném f jsou samozřejmě c_n a c_{-n} komplexně konjugované.

Označíme-li $\omega_n = \omega n$, je původní funkce $f(t)$ s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega_n t} \, .$$

Při pevně zvoleném T vyjadřuje výraz $\Delta\omega = 2\pi/T$ změnu ve frekvenci způsobenou nárustem n o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence.
Náš další postup bude spočívat v limitním přechodu $T \to \infty$. Přitom se spočetná množina hodnot c_n „zahustí“ na celé kontinuun reálných hodnot a získáme místo Fourierových koeficientů c_n novou funkci $\tilde{f}$.

Koeficient $1/T$ u formule pro c_n je roven $\Delta\omega/2\pi$, takže můžeme řadu pro $f(t)$ přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-i\omega_n x}\, dx\, e^{i\omega_n t} \right).$$

Představme si nyní hodnoty ω_n pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly $[\omega_n, \omega_{n+1}]$ o délce $\Delta\omega$. Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

kde $g(\omega)$ je funkce nabývající v bodech ω_n hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-i\omega_n x}\, dx.$$

Předpokládejme, že naše funkce f je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé $\mathbb{R}$. Pak můžeme limitně přejít $T \to \infty$ a dojde ke zjemňování normy $\Delta\omega$ našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci f na $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt.$$

Této funkci $\tilde{f}$ říkáme **Fourierova trasnformace** funkce f. Koeficient $1/\sqrt{2\pi}$ souvisí s definicí inverzní operace:

Naše odvození totiž ukazuje, že pro „rozumné“ funkce $f(t)$ bude platit (viz dva slidy zpět)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

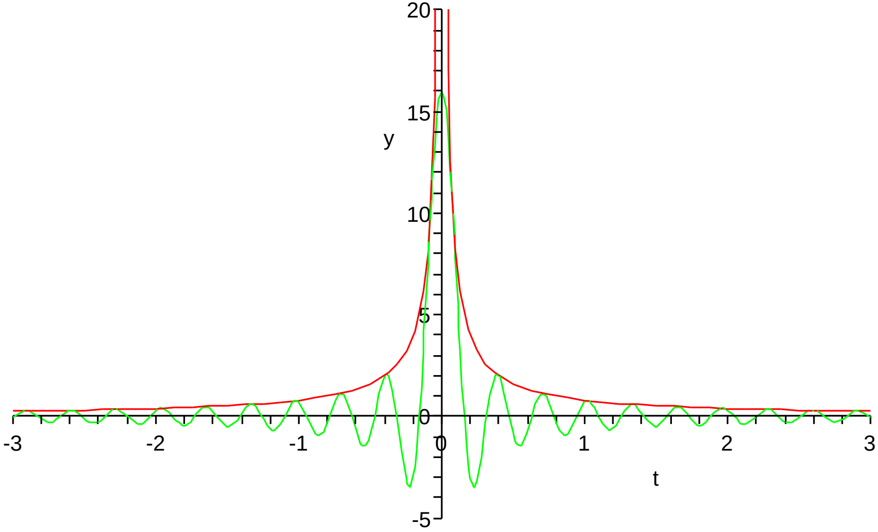
Tím říkáme, že existuje k právě definované **Fourierově transformaci** $\mathcal{F}$ inverzní operace $\mathcal{F}^{-1}$, které říkáme **inverzní Fourierova transformace**. Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem $k(\omega, t) = e^{\pm i\omega t}$.

Fourierova transformace zajímavým způsobem převrací lokální a globální chování funkcí. Začněme jednoduchým příkladem, ve kterém najdeme funkci $f(t)$, která se ztransformuje na charateristickou funkci intervalu $[-\Omega, \Omega]$, tj. $\tilde{f}(\omega) = 0$ pro $|\omega| > \Omega$ a $\tilde{f} = 1$ pro $|\omega| \leq \Omega$. Inverzní transformace $\mathcal{F}^{-1}$ nám dává

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{it}\, \mathrm{e}^{i\omega t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,t} \frac{1}{2i} (\mathrm{e}^{i\Omega t} - \mathrm{e}^{-i\Omega t}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,t} \sin(\Omega t).
\end{aligned}
$$

Přímým výpočtem limity v nule (L'Hospitalovo pravidlo) spočteme, že $f(0) = 2\Omega(2\pi)^{-1/2}$, nejbližší nulové body jsou v $t = \pm\pi/\Omega$ a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek $x = 0$.

Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro $\Omega = 20$. Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím Ω naše funkce $f(t)$ stále rychleji „vlní“.



V dalším příkladu spočtěme Fourierovu transformaci derivace $f'(t)$ pro nějakou funkci f. Pro jednoduchost předpokládejme, že f má kompaktní nosič, tj, zejména $\mathcal{F}(f')$ i $\mathcal{F}(f)$ skutečně existují a počítejme metodou per partes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\mathrm{e} - i\omega t f(t)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\ dt \\
&= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega)
\end{aligned}$$

Transformace derivací

Vidíme tedy, že Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj. $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$, $\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2\mathcal{F}(f), \dots, \mathcal{F}(f^{(n)}) = i^n\omega^n\mathcal{F}(f)$.

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Spočtěme, jak dopadne transformace konvoluce $h = f * g$, kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče.

Při výpočtu prohodíme pořadí integrovanání, což je krok, který ověříme teprve v diferenciálním a integrálním počtu později. V dalším krůčku pak zavedeme substituci $t - x = u$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x)\, dx \right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-i\omega(u+x)}\, du \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-i\omega u)}\, du \right) \\
&= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)
\end{aligned}$$

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce $f * g$ velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny f. Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro g. Prostě spočteme $\mathcal{F}(f * g)$ a podělíme obrazem $\mathcal{F}(g)$. Hovoříme o **dekonvoluci**.