

# Přednášky k předmětu MB102

Autor: Roman Šimon Hilscher

Přednášející: Petr Hasil

## OBSAH

Přehled přednášek podle strany ukončení	iii
1. Polynomy a interpolace	1
1.1. Interpolace	2
1.2. Lagrangeův interpolační polynom	3
1.3. Derivace polynomu	4
1.4. Hermiteův interpolační polynom	5
1.5. Interpolace splajny	7
1.6. Rozklad na parciální zlomky	8
2. Diferenciální počet	10
2.1. Reálná čísla	10
2.2. Supremum a infimum v $\mathbb{R}$	10
2.3. Intervaly	11
2.4. Limita	11
2.5. Spojitost	16
2.6. Body nespojitosti	22
2.7. Derivace	23
2.8. Vlastnosti a pravidla derivací	27
2.9. Derivace elementárních funkcí	32
2.10. Věty o střední hodnotě	37
2.11. L'Hospitalovo pravidlo	38
2.12. Derivace implicitně zadaných funkcí	40
2.13. Jednoduché slovní úlohy s derivacemi	41
2.14. Monotonie funkce a extrémy	44
2.15. Konvexnost, konkávnost, inflexe	49
2.16. Asymptoty	51
2.17. Celkový průběh funkce	54
2.18. Optimalizace	56
2.19. Diferenciál funkce	58
2.20. Taylorův polynom	59
3. Integrální počet	71
3.1. Primitivní funkce	71

3.2.	Základní integrační metody	74
3.3.	Integrovaní racionálních lomených funkcí	79
3.4.	Riemannův integrál	81
3.5.	Vlastnosti Riemannova integrálu	86
3.6.	Věty o střední hodnotě	88
3.7.	Integrál jako funkce horní meze	91
3.8.	Metody výpočtu určitého integrálu	95
3.9.	Aplikace určitého integrálu	98
3.10.	Nevlastní integrály	105
4.	Nekonečné řady	112
4.1.	Nekonečné číselné řady	112
4.2.	Nekonečné řady s nezápornými členy	118
4.3.	Alternující řady	124
4.4.	Absolutně a relativně konvergentní řady	125
4.5.	Mocninné řady	130
4.6.	Poloměr konvergence mocninné řady	133
4.7.	Taylorovy a Maclaurinovy řady	141
4.8.	Aplikace nekonečných řad	146
4.9.	Řady funkcí	148
5.	Fourierova řada a transformace	150
5.1.	Stejněměrná konvergence	150
5.2.	Fourierovy řady	151
5.3.	Fourierova transformace	155
5.4.	Vlastnosti Fourierovy transformace	160
6.	Elementární diferenciální rovnice	162
6.1.	Úvod a motivace	162
6.2.	Diferenciální rovnice 1. řádu	163
6.3.	Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	164
6.4.	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	166
6.5.	Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu	168
6.6.	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	173
	Literatura	175

## PŘEHLED PŘEDNÁŠEK PODLE STRANY UKONČENÍ

Konec 1. přednášky (23.2.2016) .....	??
Konec 2. přednášky (1.3.2016) .....	??
Konec 3. přednášky (8.3.2016) .....	??
Konec 4. přednášky (15.3.2016) .....	??
Konec 5. přednášky (22.3.2016) .....	??
Konec 6. přednášky (29.3.2016) .....	??
Konec 7. přednášky (5.4.2016) .....	??
Konec 8. přednášky (12.4.2016) .....	??
Konec 9. přednášky (19.4.2016) .....	??
Konec 10. přednášky (26.4.2016) .....	??
Konec 11. přednášky (3.5.2016) .....	??
Konec 12. přednášky (10.5.2016) .....	??
Konec 13. přednášky (17.5.2016) .....	??
Konec dokumentu .....	175

## 1. POLYNOMY A INTERPOLACE

Citace z [8, str. 237]: „V této kapitole začneme budovat nástroje umožňujících modelování závislostí, které nejsou ani lineární ani diskrétní. S takovou potřebou se často setkáme, když popisujeme systém vyvíjející se v čase a to ne jen v několika vybraných okamžicích, ale „souvisle“, tj. pro všechny možné okamžiky. Někdy je to přímo záměr či potřeba (třeba ve fyzikálních modelech klasické mechaniky), jindy je to vhodné přiblížení diskrétního modelu (třeba u ekonomických, chemických nebo biologických modelů).“

Polynomem nad  $\mathbb{R}$  rozumíme zobrazení  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dané výrazem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou pevně daná čísla (koeficienty).

Pokud je  $a_n \neq 0$ , říkáme, že polynom  $f$  je stupně  $n$ . Stupeň nulového polynomu není definován.

Pro polynomy  $f$  stupně  $n$  a  $g$  stupně  $m$ , existují jednoznačně určené polynomy  $q$  a  $r$  takové, že stupeň  $r$  je menší než  $m$  nebo je  $r = 0$  a  $f = q \cdot g + r$ , viz [8, str. 238]. Je-li pro nějaký prvek  $b \in \mathbb{R}$  hodnota  $f(b) = 0$ , pak to znamená, že v podílu  $f(x) = q(x)(x - b) + r(x)$  musí být  $r = 0$ . Jinak by totiž nebylo možné dosáhnout  $f(b) = q(b) \cdot 0 + r$ , kde stupeň  $r$  je nulový. Říkáme, že  $b$  je kořen polynomu  $f$ . Stupeň  $q$  je pak právě  $n - 1$ . Pokud má  $q$  opět kořen, můžeme pokračovat a po nejvýše  $n$  krocích dojdeme ke konstantnímu polynomu. Dokázali jsme tedy, že každý nenulový polynom nad  $\mathbb{R}$  má nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odtud již snadno dovodíme i následující pozorování.

**Lemma 1.** *Dva polynomy  $f$  a  $g$  nad  $\mathbb{R}$  jsou si rovny (jako zobrazení), právě když mají shodné koeficienty.*

*Důkaz.* Předpokládejme  $f = g$ , tj.  $f - g = 0$  jako zobrazení. Polynom  $(f - g)(x)$  tedy má nekonečně mnoho kořenů, což je možné pouze tehdy, je-li nulovým polynomem.  $\square$

**Příklad 1.** Uvědomme si, že u konečných polí samozřejmě takové tvrzení neplatí. Uvažte např. polynom  $p(x) = x^2 + x$  nad  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ . Potom je  $p(0) = 0$  a  $p(1) = 1 + 1 = 0$ , ale  $p(x)$  není nulový polynom.  $\square$

Hornerovo schéma je praktický nástroj pro výpočet hodnoty polynomu v nějakém bodě (v důsledku i pro výpočet kořenu polynomu a podílu po dělení příslušným kořenovým činitelem). Uvažme polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a pevně zvolený bod  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Uvažujme postupně hodnoty

$$b_0 := a_n, \quad b_1 := x_0 b_0 + a_{n-1}, \quad b_2 := x_0 b_1 + a_{n-2}, \quad b_3 := x_0 b_2 + a_{n-3}, \quad \dots, \\ \dots, \quad b_{n-1} := x_0 b_{n-2} + a_1, \quad b_n := x_0 b_{n-1} + a_0 = f(x_0).$$

Tj. násobíme číslo  $x_0$  koeficientem  $a_n$  a přičteme koeficient  $a_{n-1}$ , pak to celé vynásobíme číslem  $x_0$  a přičteme koeficient  $a_{n-2}$ , atd. Nakonec takto získáme hodnotu polynomu  $f(x)$  v bodě  $x_0$ . Postup zapisujeme do tabulky takto

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$x_0$	$b_0 := a_n$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_{n-1}$	$b_n = f(x_0)$

Zejména, je-li poslední koeficient  $b_n = f(x_0) = 0$ , pak je číslo  $x_0$  kořenem polynomu  $f(x)$ , tj. platí rovnost  $f(x) = (x - x_0)g(x)$ , kde  $g(x)$  je polynom stupně  $n - 1$ . Současně dostáváme z Hornerova schématu koeficienty polynomu  $g(x)$ , tj.

$$g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

**Příklad 2.** Uvažujme polynom  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 18$ . Pak pro jeho hodnotu v bodě  $x_0 = 1$  platí

	3	-2	1	-18
1	3	1	2	-16

neboli  $f(1) = -16$  a číslo  $x_0 = 1$  není kořenem tohoto polynomu. Naopak, pro  $x_0 = 2$  máme

	3	-2	1	-18
2	3	4	9	0

neboli číslo  $x_0 = 2$  je kořenem tohoto polynomu. Pro polynom  $f(x)$  pak platí, že

$$f(x) = (x - 2)(3x^2 + 4x + 9),$$

což lze jednoduše ověřit zpětným roznásobením.

**1.1. Interpolace.** Citace z [8, str. 239]: „Často je užitečné zadat snadno počítatelný vztah pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných bodech  $x_0, \dots, x_n$ . Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom stupně  $n + 1$

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a nikde jinde. To ale není jediná polynomiální odpověď, protože požadovanou vlastnost má i nulový polynom. Ten je přitom jediný s touto vlastností ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše  $n$ . Obdobně to dopadne i v obecném případě.“

**Věta 1.** Pro každou množinu různých bodů  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  a předepsané hodnoty  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  existuje právě jeden polynom  $f$  stupně nejvýše  $n$  (případně nulový polynom), pro který platí

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

*Důkaz.* Označme si prozatím neznámé koeficienty polynomu  $f$  stupně  $n$

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Dosažením požadovaných hodnot dostaneme systém  $n + 1$  rovnic pro stejný počet neznámých koeficientů  $a_i$

$$a_0 + x_0 a_1 + \cdots + (x_0)^n a_n = y_0$$

$$\vdots$$

$$a_0 + x_n a_1 + \cdots + (x_n)^n a_n = y_n.$$

Jak je známo z MB101, tento systém lineárních rovnic má právě jedno řešení pokud je determinant jeho matice různý od nuly. Musíme tedy vyšetřit tzv. Vandermondův determinant

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{vmatrix},$$

pro který platí  $V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i,j=0,\dots,n, i>j} (x_i - x_j)$ , tedy

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,n \\ i > j}} (x_i - x_j) \neq 0,$$

protože jsou body  $x_0, \dots, x_n$  (po dvou) různé. Odtud ale vyplývá jednoznačná existence hledaného polynomu. Protože polynomy jsou jako zobrazení stejné, právě když mají stejné koeficienty, věta je dokázána.  $\square$

Jednoznačně určený polynom  $f$  z předchozí věty nazýváme interpolační polynom pro hodnoty  $y_i$  v bodech  $x_i$ .

Citace z [7]: „Na první pohled se může zdát, že reálné nebo případně racionální polynomy, tj. polynomiálně zadané funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , tvoří hezkou velikou třídu funkcí jedné proměnné. Můžeme jimi proložit jakékoli sady předem zadaných hodnot. Navíc se zdají být snadno vyjádřitelné, takže by s jejich pomocí mělo být dobře možné počítat i hodnoty těchto funkcí pro jakoukoliv hodnotu proměnné  $x$ . Při pokusu o praktické využití v tomto směru ovšem narazíme hned na několik problémů.

Prvním z nich je potřeba rychle vyjádřit polynom, kterým zadaná data proložíme. Pro řešení výše diskutovaného systému rovnic totiž budeme obecně potřebovat čas úměrný třetí mocnině počtu bodů, což při objemnějších datech je jistě těžko přijatelné. Podobným problémem je pomalé vyčíslení hodnoty polynomu vysokého stupně v zadaném bodě. Obojí lze částečně obejít tak, že zvolíme vhodné vyjádření interpolačního polynomu (tj. vybereme lepší bázi příslušného vektorového prostoru všech polynomů stupně nejvýše  $n$ , než je ta nejobvyklejší  $1, x, x^2, \dots, x^n$ ).“

**1.2. Lagrangeův interpolační polynom.** Sestrojíme si nejprve pomocné polynomy  $\ell_i$  s vlastností

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Zřejmě musí být tyto polynomy až na konstantu rovny výrazům

$$(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

a proto

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Hledaný Lagrangeův interpolační polynom pak je dán jako

$$f(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x).$$

Citace z [8, str. 241]: „Toto vyjádření má nevýhodu ve velké citlivosti na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot  $x_i$ , protože se v ní těmito rozdíly dělí. (Pozn.: všimněme si ale, že přímá konstrukce Lagrangeova polynomu může nahradit existenční část důkazu v předchozí Větě 1.)

Další nepříjemností je velice špatná stabilita hodnot reálných nebo racionálních polynomů při zvětšující se hodnotě proměnné  $x$ . Brzy budeme mít nástroje na přesný popis kvalitativního chování funkcí, nicméně i bez nich je zřejmé, že podle znaménka koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu se hodnoty velice rychle při rostoucím  $x$  vydají buď do plus nebo do mínus nekonečna. Ani toto znaménko koeficientu u nejvyššího stupně se ale u interpolačního polynomu při malých změnách prokládaných hodnot nechová stabilně.“

Viz soubor <[interpolace.pdf](#)>.

**Příklad 3.** Nalezněte polynom  $P$  splňující následující podmínky:

$$P(2) = 1, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = -1, \quad P(5) = 6.$$

Tento příklad a jeho řešení je převzat z [8, str. 237–238].

*Řešení.* Řešíme buď přímo, tj. sestavením soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Předpokládáme polynom ve tvaru  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Víme, že polynom stupně nejvýše tři splňující podmínky v zadání je dán jednoznačně.

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= -1 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 6. \end{aligned}$$

Každá rovnice vznikla z jedné z podmínek v zadání.

Druhou možností je vytvořit hledaný polynom pomocí fundamentálních Lagrangeových polynomů:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \cdot \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 0 \cdot (\dots) + \\ &\quad + (-1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 6 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \\ &= \frac{4}{3}x^3 - 12x^2 + \frac{101}{3}x - 29. \end{aligned}$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou samozřejmě jediným řešením výše sestavené soustavy lineárních rovnic.  $\square$

**1.3. Derivace polynomu.** Derivace polynomu je lineární zobrazení prostoru  $\mathcal{P}_n$  polynomů stupně nejvýše  $n$  do prostoru  $\mathcal{P}_{n-1}$  polynomů stupně nejvýše  $n-1$  takové, že každý polynom  $x^k$  standardní báze je zobrazen na polynom  $kx^{k-1}$ . Tuto operaci značíme  $'$ .

**Příklad 4.**

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^{100})' = 100x^{99}, \quad (1)' = 0.$$

$\square$

Z linearity tohoto zobrazení tedy plyne, že derivace polynomu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

je polynom

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Druhá derivace polynomu je opět lineární zobrazení prostoru  $\mathcal{P}_n$  do prostoru  $\mathcal{P}_{n-2}$  definované jako iterace výše uvedeného zobrazení derivace. Tj. polynom  $x^k$  standardní báze je zobrazen na polynom  $k(k-1)x^{k-2}$ . Tuto operaci značíme  $''$ .

**Příklad 5.**

$$\begin{aligned} (x)'' &= (1)' = 0, \quad (x^2)'' = (2x)' = 2, \quad (x^3)'' = (3x^2)' = 6x, \\ (x^{100})'' &= (100x^{99})' = 9900x^{98}, \quad (1)'' = (0)' = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Více se o derivacích (nejen polynomů) dozvíte později v tomto semestru.

**1.4. Hermiteův interpolační polynom.** Citace z [8, str. 243]: „Uvažme opět  $m + 1$  po dvou různých reálných hodnot  $x_0, \dots, x_m$ , tj.  $x_i \neq x_j$  pro všechna  $i \neq j$ . Budeme chtít zase prokládat pomocí polynomů předem dané hodnoty, tentokrát ale budeme vedle hodnot předepisovat i první derivace. Tj. předepíšeme  $y_i$  a  $y'_i$  pro všechna  $i$ . Hledáme polynom  $f$ , který bude nabývat těchto předepsaných hodnot a derivací.“

Zcela analogicky jako u interpolace pouhých hodnot obdržíme pro neznámé koeficienty polynomu  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  systém rovnic

$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\ &\vdots \\ a_0 + x_m a_1 + \dots + (x_m)^n a_n &= y_m \\ a_1 + 2x_0 a_2 + \dots + n(x_0)^{n-1} a_n &= y'_0 \\ &\vdots \\ a_1 + 2x_m a_2 + \dots + n(x_m)^{n-1} a_n &= y'_m. \end{aligned}$$

Toto je systém  $2m + 2$  rovnic pro  $n + 1$  neznámých. Volbou stupně hledaného polynomu  $n = 2m + 1$  bude determinant tohoto systému rovnic nenulový a tudíž bude existovat právě jedno řešení. Nalezený polynom nazýváme Hermiteův interpolační polynom.

**Příklad 6.** Nalezněte polynom  $P$  splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

*Řešení.* Máme  $m = 1$  a hledáme polynom stupně  $n = 2m + 1 = 3$ , tj.  $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ . Dosazením za  $x = 1$  a  $x = 2$  do výrazu pro  $P(x)$  a  $P'(x)$  dostaneme systém

$$\begin{aligned} P(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0, \\ P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3, \\ P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1, \\ P'(2) &= 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3. \end{aligned}$$

Vyřešením tohoto systému dostaneme  $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$ . □

Stejně jako při konstrukci Lagrangeova polynomu lze Hermiteův interpolační polynom zkonstruovat přímo pomocí tzv. fundamentálních Hermiteových polynomů. Podrobnosti viz [8, str. 244].

Nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně  $n = 1$ , tj.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnici v bodě  $x_0$ .

**Příklad 7.** Nalezněte polynom  $P$  splňující následující podmínky:

$$P(1) = 2, \quad P'(1) = 3.$$

*Řešení.*

$$P(x) = P(1) + P'(1) \cdot (x - 1) = 2 + 3(x - 1) = 3x - 1.$$

□

Když zadáme hodnotu a derivaci ve dvou bodech, tj.  $f(x_0) = y_0$ ,  $f'(x_0) = y'_0$ ,  $f(x_1) = y_1$ ,  $f'(x_1) = y'_1$  pro dva různé body  $x_0$  a  $x_1$ , dostaneme ještě pořád snadno počítatelný problém. Ukažme si jej ve zjednodušeném provedení, kdy  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ .

**Příklad 8.** Hledáme polynom stupně  $n = 2m + 1 = 3$ , tj.  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ . Dosazením za  $x = 0$  a  $x = 1$  do výrazu pro  $f(x)$  a  $f'(x)$  dostaneme systém

$$f(0) = a_0 = y_0, \quad f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = y_1, \quad f'(0) = a_1 = y'_0, \quad f'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = y'_1.$$

Tedy matice tohoto systému a její inverze mají tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Vypočtete si tuto inverzi některou z metod z MB101!)

Přímým vynásobením  $A \cdot (a_3, a_2, a_1, a_0)^T$  pak vyjde vektor  $(y_0, y_1, y'_0, y'_1)^T$ , neboli

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_0 - 2y_1 + y'_0 + y'_1 \\ -3y_0 + 3y_1 - 2y'_0 - y'_1 \\ y'_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y'_0 + y'_1) x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y'_0 - y'_1) x^2 + y'_0 x + y_0.$$

□

Obdobně lze předepisovat libovolný konečný počet derivací v jednotlivých bodech a vhodnou volbou stupně polynomu obdržíme vždy jednoznačné interpolace.

Bohužel, u těchto interpolací pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky.

**1.5. Interpolace splajny.** Citace z [8, str. 241]: „Jak jsme viděli na obrázcích demonstrujících nestabilitu interpolace jedním polynomem dostatečně vysokého stupně, malé lokální změny hodnot zapříčiňovaly dramatické celkové změny chování výsledného polynomu. Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků nízkých stupňů, které ale musíme umět rozumně navazovat.“

Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů polynomem stupně nejvýše jedna (pozn.: vzniká lomená čára). Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změní.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. ... Takové polynomiální přiblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že první derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímo se proto vnucuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně.“

**Definice 1 (Kubický splajn).** Necht'  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  jsou reálné hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty  $y_0, \dots, y_n$ . Kubickým interpolačním splajnem pro toto zadání je funkce  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje následující podmínky:

- zúžení  $S$  na interval  $[x_{i-1}, x_i]$  je polynom  $S_i$  třetího stupně,  $i = 1, \dots, n$ ,
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$  a  $S_i(x_i) = y_i$  pro všechny  $i = 1, \dots, n$ ,
- $S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$  pro všechny  $i = 1, \dots, n - 1$ ,
- $S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$  pro všechny  $i = 1, \dots, n - 1$ .

□

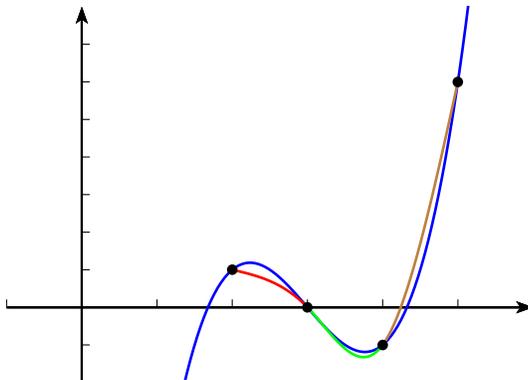
Citace z [8, str. 245]: „Kubický splajn pro  $n + 1$  bodů sestává z  $n$  kubických polynomů, tj. máme k dispozici  $4n$  volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají  $2n + (n - 1) + (n - 1)$  rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro derivace v krajních bodech, tzv. „úplný splajn“, nebo jsou tyto zadány jako nula, tzv. „přirozený splajn“.“

- Úplný splajn = jsou zadány hodnoty první derivace v krajních bodech.
- Přirozený splajn = hodnoty druhé derivace v krajních bodech jsou nulové.

Citace z [8, str. 246]: „Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Při vhodném uspořádání se však dosáhne matice systému, která má nenulové prvky prakticky jen ve třech diagonálách, a pro takové existují vhodné numerické postupy, které umožní splajn počítat také v čase úměrném počtu bodů.“

**Příklad 9.** Přirozený kubický interpolační splajn s hodnotami z Příkladu 3 (interpolace). Řešení je tvaru

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{8}{15}x^3 + \frac{16}{5}x^2 - \frac{103}{15}x + \frac{31}{5} & x \leq 3, \\ \frac{8}{3}x^3 - \frac{128}{5}x^2 + \frac{1193}{15}x - \frac{401}{5} & 3 \leq x \leq 4, \\ -\frac{32}{15}x^3 + 32x^2 - \frac{2263}{15}x + 227 & x \geq 4. \end{cases}$$



OBRÁZEK 1. Srovnání kubického splajnu a Lagrangeova interpolačního polynomu.

□

Více ve skriptech [8, Odstavec 5.1].

**1.6. Rozklad na parciální zlomky.** Jsou-li  $P(x)$  a  $Q(x)$  polynomy,  $Q(x) \neq 0$  (tj. polynom  $Q$  není identicky roven nulovému polynomu), potom se výraz

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{nazývá racionální lomenou funkcí .}$$

Je-li  $\text{st } P < \text{st } Q$ , pak  $R(x)$  nazýváme ryze lomenou.

Pokud nemají polynomy  $P(x)$  a  $Q(x)$  společný kořen (tj. ve funkci  $R(x)$  již nejde žádný výraz s proměnnou  $x$  pokrátit), potom každou takovou ryze racionální lomenou funkcí lze rozložit na součet parciálních zlomků. Tento součet je až na pořadí jednotlivých zlomků určen jednoznačně.

Tvar jednotlivých parciálních zlomků najdeme podle kořenů a násobností jmenovatele, tj. podle funkce  $Q(x)$ . Elementární kořenové činitele polynomu  $Q(x)$  lze nad  $\mathbb{R}$  uvažovat buď lineární (odpovídající reálným kořenům) nebo kvadratické (odpovídající dvojicím komplexně sdružených komplexních kořenů).

- Je-li  $\alpha \in \mathbb{R}$  reálný kořen násobnosti  $k$ , potom polynom  $Q(x)$  obsahuje činitel  $(x - \alpha)^k$ , a příslušné parciální zlomky jsou tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)^k} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x - \alpha)^{k-2}} + \cdots + \frac{A_k}{x - \alpha}.$$

- Je-li  $\beta \pm \gamma i \in \mathbb{C}$  dvojice komplexně sdružených komplexních kořenů násobnosti  $k$  (každý z nich), potom polynom  $Q(x)$  obsahuje činitel  $(x^2 + px + q)^k$ , jehož diskriminant je záporný, a příslušné parciální zlomky jsou tvaru

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \frac{B_3x + C_3}{(x^2 + px + q)^{k-2}} + \cdots + \frac{B_kx + C_k}{x^2 + px + q}.$$

Je nutné vždy zahrnout všechny parciální zlomky (až do stupně  $k$ )!

**Příklad 10.**

$$\begin{aligned}
 R(x) &= \frac{x^2 + 7x + 1}{x(x-1)^3(x^2+x+1)^2} \\
 &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+x+1}.
 \end{aligned}$$

□

Neznáme koeficienty u parciálních zlomků hledáme buď převodem nazpět na společného jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin (což vede na systém lineárních rovnic), nebo jednodušeji dosadíme za proměnnou  $x$  hodnoty kořenů polynomu  $Q(x)$ .

**Příklad 11.**

$$\begin{aligned}
 R(x) &= \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} \\
 &= \frac{A(x-2)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}
 \end{aligned}$$

Porovnáváme polynomy v čitateli:

$$x + 1 = A(x-2)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x-2).$$

Volbou  $x = 1$  dostaneme  $A = 2$ , volbou  $x = 2$  dostaneme  $B = 3$ . Další kořeny již jmenovatel nemá, zvolíme proto libovolnou jinou „jednoduchou“ hodnotu, např.  $x = 0$  a dostaneme  $4A - B + 2C = 1$ , tj.  $C = -2$ . Je tedy

$$R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2}.$$

□

## 2. DIFERENCIÁLNÍ POČET

**2.1. Reálná čísla.** Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme  $\mathbb{R}$ . Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů, viz [8, Odstavec 5.2]. Zejména si z MB101 zopakujte pojmy suprema a infima, se kterými budeme pracovat.

**2.2. Supremum a infimum v  $\mathbb{R}$ .** Nechť je dána neprázdná množina  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Prvek  $b \in \mathbb{R}$  nazveme

horní závora množiny  $A$ , pokud  $\forall x \in A : x \leq b$ ,

tj. pokud je prvek  $b$  větší (nebo roven) než všechny prvky v množině  $A$ . Obdobně se definuje dolní závora množiny  $A$ , tj. je to prvek  $a \in \mathbb{R}$  s vlastností, že  $a \leq x$  pro všechny  $x \in A$ .

Řekneme, že množina  $A$  je shora ohraničená (shora omezená), pokud má  $A$  alespoň jednu horní závora. Podobně se definuje zdola ohraničená (zdola omezená) množina  $A$ . Množina  $A$  je ohraničená (omezená), pokud je  $A$  současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Nejmenší horní závora množiny  $A$  se nazývá supremum množiny  $A$ . Tj. prvek  $b \in \mathbb{R}$  je supremum množiny  $A$ , pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall x \in A : x \leq b$  (tj.  $b$  je horní závora množiny  $A$ ),
- je-li  $y \in \mathbb{R}$  horní závora množiny  $A$ , potom je  $b \leq y$  (tj.  $b$  je nejmenší horní závora).

Supremum množiny  $A$  značíme jako

$$b = \sup A.$$

Obdobně se definuje infimum množiny  $A$ , neboli je to největší dolní závora množiny  $A$ , značíme

$$a = \inf A.$$

**Příklad 12.** Je-li  $A$  libovolný z intervalů  $(0, 1)$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, 1)$  nebo  $(0, 1]$ , potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

□

Má-li množina  $A$  největší prvek  $b$  (tj. všechny ostatní prvky jsou menší než  $b$ ), potom je  $b = \sup A$ . Podobně, má-li množina  $A$  nejmenší prvek  $a$  (tj. všechny ostatní prvky jsou větší než  $a$ ), potom je  $a = \inf A$ . Výhoda suprema či infima oproti největšímu či nejmenšímu prvku spočívá v tom, že největší či nejmenší prvek nemusí v  $A$  existovat, i když je množina  $A$  ohraničená, ale supremum a infimum existují vždy.

### Axiom 1.

- (i) Každá neprázdná shora ohraničená množina  $A \subseteq \mathbb{R}$  má supremum.
- (ii) Každá neprázdná zdola ohraničená množina  $A \subseteq \mathbb{R}$  má infimum.

Tyto axiomy zaručují, že v množině reálných čísel nejsou žádné „díry“. Navíc lze jednoduše dokázat, že tvrzení (i) a (ii) jsou navzájem ekvivalentní, tj. stačí mít k dispozici jen jeden z nich, a ten druhý pak již platí automaticky.

**2.3. Intervaly.** Budeme se striktně držet značení, že uzavřený interval je označen hranatými závorkami  $[a, b]$  (krajní body tam patří), zatímco otevřený interval je označen kulatými závorkami  $(a, b)$  (krajní body tam nepatří). Podobně budeme uvažovat polouzavřené intervaly  $[a, b)$  a  $(a, b]$ .

Nekonečné intervaly (neohrazené zdola nebo shora) značíme jako

$$(-\infty, \infty), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, b).$$

Symbol  $-\infty$  a  $\infty$  do intervalu nikdy nepatří, je to jen značení, že do intervalu patří libovolně velké záporné či kladné body.

Definiční obor funkce  $f(x)$  budeme značit symbolem  $\mathcal{D}(f)$ , obor hodnot pak symbolem  $\mathcal{H}(f)$ .

**2.4. Limita.** V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) „blíží“ k nějakému číslu či k  $\pm\infty$ . To pak přirozeně vede k zavedení pojmu „limita“.

### Příklad 13.

- (a) K přiblížení pojmu „limita“ může dobře posloužit již známý pojem infima či suprema. V Příkladu 12 jsme ukázali, že

$$0 = \inf(0, 1), \quad 1 = \sup(0, 1),$$

a přitom ani jedno z čísel 0, 1 v množině  $(0, 1)$  neleží. Uvažujme posloupnost bodů

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \in (0, 1)$$

pro zvyšující se  $n$ . Potom vidíme, že se hodnoty této posloupnosti „nekonečně blíží“ k hodnotě infima (k nule), ale nikdy této hodnoty nedosáhnou. Podobně toto platí pro posloupnost

$$\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\} \in (0, 1)$$

a hodnotu suprema (jedničku).

- (b) Naopak, členy posloupnosti

$$\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

se „nekonečně blíží“ k  $+\infty$  (ale nikdy této „hodnoty“ nedosáhnou), stejně tak jako členy posloupnosti

$$\{-n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

se „nekonečně blíží“ k  $-\infty$  (ale nikdy této „hodnoty“ nedosáhnou).

- (c) Podobně se funkční hodnoty funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  „nekonečně blíží“ k číslu 0 když se nezávislá proměnná  $x$  zvyšuje k  $\pm\infty$  (viz obr.).

□

Intuitivní definice limity: „Funkce  $f(x)$  má limitu  $L$  v bodě  $x_0$ , pokud se funkční hodnoty  $f(x)$  libovolně blíží k číslu  $L$ , když je  $x$  dostatečně blízko k  $x_0$ .“ Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

**Příklad 14.** Uvádíme různé „druhy“ limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci  $f(x) = 3x + 1$  máme (viz obr.)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x + 1) = 10, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1) = \infty.$$

(b) Pro funkci  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  máme (viz obr.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

□

**Označení.**  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Body  $x \in \mathbb{R}$  se nazývají vlastní body, body  $x = \pm\infty$  se nazývají nevlastní body.

**Definice 2 (Okolí bodu).** Bud'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  bodu  $x_0$  je otevřený interval s vlastností (viz obr.)

$$\mathcal{O}(x_0) = \begin{cases} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), & \text{je-li } x_0 \in \mathbb{R}, \\ (a, \infty), & \text{je-li } x_0 = \infty \ (a \in \mathbb{R}), \\ (-\infty, b), & \text{je-li } x_0 = -\infty \ (b \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Množina  $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$  (pro  $x_0 \in \mathbb{R}$ ) se nazývá ryzí (též prstencové) okolí bodu  $x_0$ .

Pro  $x_0 \in \mathbb{R}$  definujeme pravé okolí bodu  $x_0$  jako interval  $[x_0, x_0 + \delta)$  a levé okolí bodu  $x_0$  jako interval  $(x_0 - \delta, x_0]$ . Podobně je pravé ryzí okolí bodu  $x_0$  interval  $(x_0, x_0 + \delta)$  a levé ryzí okolí bodu  $x_0$  interval  $(x_0 - \delta, x_0)$ . □

**Definice 3 (Limita).** Bud'  $x_0, L \in \mathbb{R}^*$ . Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  limitu  $L$ , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí  $\mathcal{O}(L)$  bodu  $L$  existuje okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  bodu  $x_0$  tak, že

$$\text{pro všechna } x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L). \quad (1)$$

□

To, že v podmínce (1) požadujeme, aby  $x \neq x_0$ , znamená, že

limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě  $x_0$ !

Interpretace Definice 3 záleží na tom, jestli je  $x_0$  a  $L$  vlastní nebo nevlastní bod.

**Definice 4 (Vlastní limita ve vlastním bodě).** Bud'  $x_0, L \in \mathbb{R}$ . Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  limitu  $L$ , pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  (toto číslo  $\varepsilon$  určuje okolí  $\mathcal{O}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  bodu  $L$ ) existuje  $\delta > 0$  (toto číslo  $\delta$  určuje okolí  $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  bodu  $x_0$ ) takové, že

$$\text{pro všechna } x \text{ taková, že } \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in \mathcal{O}(L)}. \quad (2)$$

□

Zkráceně lze Definicí 4 přepsat jako

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Příklad 15.** Ukažte z definice, že  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x + 1) = 10$ , viz obr.

*Řešení.* Bud'  $\varepsilon > 0$  libovolné. Chceme najít číslo  $\delta > 0$  takové, aby  $|y - 10| < \varepsilon$ , kdykoliv bude  $0 < |x - 3| < \delta$ . Tedy

$$|(3x + 1) - 10| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x - 9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít  $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ , případně libovolné jiné  $\delta$  splňující  $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . □

**Definice 5 (Vlastní limita v nevlastním bodě).** Bud'  $x_0 = \infty$ ,  $L \in \mathbb{R}$ . Potom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L,$$

pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  (toto číslo  $\varepsilon$  určuje okolí  $\mathcal{O}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  bodu  $L$ ) existuje  $a > 0$  (toto číslo  $a$  určuje okolí  $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$  bodu  $\infty$ ) takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x > a}_{x \in \mathcal{O}(\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in \mathcal{O}(L)}. \quad (3)$$

Bud'  $x_0 = -\infty$ ,  $L \in \mathbb{R}$ . Potom

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  (toto číslo  $\varepsilon$  určuje okolí  $\mathcal{O}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  bodu  $L$ ) existuje  $b < 0$  (toto číslo  $b$  určuje okolí  $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, b)$  bodu  $-\infty$ ) takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x < b}_{x \in \mathcal{O}(-\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in \mathcal{O}(L)}. \quad (4)$$

□

**Příklad 16.** Ukažte z definice, že  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , viz obr.

*Řešení.* Bud'  $\varepsilon > 0$  libovolné. Chceme najít číslo  $a > 0$  takové, aby  $|y - 0| < \varepsilon$ , kdykoliv bude  $x > a$ . Tedy

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Stačí tedy vzít  $a := \frac{1}{\varepsilon}$ , případně libovolné jiné  $a$  splňující  $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . □

**Příklad 17.** Určete limitu posloupnosti  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

*Řešení.* Ukáže se, že je tato posloupnost rostoucí a shora ohraničená a tudíž má limitu. Tuto limitu označujeme symbolem  $e$  a nazýváme ji Eulerovým číslem (základ přirozených logaritmů). Je tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Více ve skriptech [8, str. 276–277]. □

Podobně interpretujeme

- nevlastní limitu ve vlastním bodě ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $L = \pm\infty$ ),
- nevlastní limitu v nevlastním bodě ( $x_0 = \pm\infty$ ,  $L = \pm\infty$ ).

Ve vlastních bodech  $x_0$  se můžeme blížit k bodu  $x_0$  také jen zprava nebo jen zleva, tj. v Defini-  
nici 3 použijeme v podmínce (1) pouze pravé ryzí okolí bodu  $x_0$  nebo pouze levé ryzí okolí bodu  $x_0$ .  
Dostáváme pak pojmy limity zprava a limity zleva:

**Definice 6 (Limita zprava/zleva).** Buď  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $L \in \mathbb{R}^*$ . Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  limitu zprava  
rovnu číslu  $L$ , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí  $\mathcal{O}(L)$  bodu  $L$  existuje  $\delta > 0$  tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L). \quad (5)$$

Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  limitu zleva rovnu číslu  $L$ , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí  $\mathcal{O}(L)$  bodu  $L$  existuje  $\delta > 0$  tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L). \quad (6)$$

□

**Příklad 18.**

(a) Pro funkci  $\operatorname{sgn} x$  („signum“=znaménko, viz obr.) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

(b) Pro funkci  $\frac{1}{x}$  platí (viz obr.)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

□

A kdy limita neexistuje? Pokud má funkce v bodě  $x_0$  a jeho okolí následující chování:

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz Příklad 18(a)),
- „nekonečný“ skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj.  $\pm\infty$ ), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz Příklad 18(b)),
- oscilace – např. funkce  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  v bodě  $x_0 = 0$ , viz obr.

**Příklad 19.** Funkce

$$q(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \text{ (tj. pro } x \text{ racionální),} \\ 0, & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \text{ (tj. pro } x \text{ iracionální),} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , protože v libovolném okolí zvoleného bodu  $x_0$  se nacházejí jak racionální tak iracionální čísla a tedy tato funkce zde nabývá hodnot 1 i 0 (a tedy zde nemůže mít limitu).  $\square$

V následujícím si přiblížíme některé základní vlastnosti limit.

**Věta 2 (Vlastnosti limit).**

- Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  nejvýše jednu limitu.*
- Má-li  $f(x)$  vlastní limitu  $L \in \mathbb{R}$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , potom je  $f(x)$  na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  ohraničená.*
- Limita existuje právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

**Věta 3 (Vlastnosti limit).** *Jsou-li*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M,$$

*kde  $L, M \in \mathbb{R}$  (pouze vlastní limity!) a  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , potom*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M, \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad \text{pokud } M \neq 0, \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |L|. \quad (10)$$

**Věta 4 (O třech limitách).** *Nechť  $x_0, L \in \mathbb{R}^*$ . Je-li  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  a je-li*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

*potom také existuje limita funkce  $f(x)$  a je rovna číslu  $L$ , tj.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

**Příklad 20.** Rozhodněte, jestli má funkce  $x \sin \frac{1}{x}$  limitu v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení.* Protože je funkce  $\sin x$  ohraničená (jedničkou shora a minus jedničkou zdola), pro  $x \neq 0$  platí nerovnosti

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

A protože  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , existuje podle Věty 4 také limita funkce  $x \sin \frac{1}{x}$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

□

**Poznámka 1.** Všechny vlastnosti limit uvedené ve Větách 2, 3 a 4 platí i pro jednostranné limity, tj. pro limity zprava a zleva. □

**Poznámka 2.** Pro výpočet limit používáme značení pro „typ“ dané limity, např.  $|\text{typ } \frac{0}{0}|$ ,  $|\text{typ } \frac{k}{0}|$ ,  $|\text{typ } \frac{k}{\infty}|$ ,  $|\text{typ } \frac{\infty}{\infty}|$ , atd. Typ dané limity zjistíme tak, že dosadíme do daného výrazu přímo limitní hodnotu  $x = x_0$ . Kupříkladu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \left| \text{typ } \frac{0}{8} \right| = 0.$$

□

**2.5. Spojitost.** Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny „důležité“ vlastnosti.

Funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita  $L$ , v bodě  $x_0$  existuje funkční hodnota  $f(x_0)$  a tyto dvě čísla jsou si rovny, tj. pokud

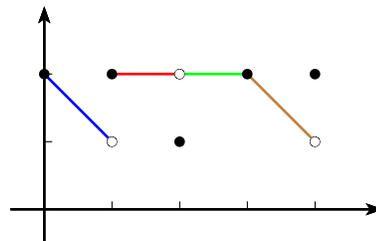
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitost zprava a spojitost zleva v bodě  $x_0$  se definuje stejně, ale s pomocí jednostranné limity, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

**Příklad 21.** Funkce (viz obr.)

$$f(x) := \begin{cases} 2 - x, & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 2, & \text{pro } x \in [1, 2), \\ 1, & \text{pro } x = 2, \\ 2, & \text{pro } x \in (2, 3], \\ 5 - x, & \text{pro } x \in (3, 4), \\ 2, & \text{pro } x = 4, \end{cases}$$



je

- spojitá v každém bodě  $x \in [0, 4]$  kromě  $x = 0, 1, 2, 4$ ,
- spojitá zprava v každém bodě  $x \in [0, 4]$  kromě  $x = 2, 4$ ,
- spojitá zleva v každém bodě  $x \in [0, 4]$  kromě  $x = 0, 1, 2, 4$ .

□

**Věta 5 (Vlastnosti spojitých funkcí).**

(i) Jsou-li funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  spojité v bodě  $x_0$ , pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } g(x_0) \neq 0.$$

(ii) (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Je-li  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$  a je-li funkce  $f(y)$  spojitá v bodě  $y_0 = M$ , potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(M).$$

(iii) (Spojitosť složené funkce.) Je-li funkce  $g(x)$  spojitá v bodě  $x_0$  a je-li funkce  $f(y)$  spojitá v bodě  $y_0 = g(x_0)$ , potom je složená funkce  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  spojitá v bodě  $x_0$ .

Všimněte si, že vlastnost (10) je speciálním případem Věty 5(ii), protože je  $|x|$  spojitá funkce.

**Příklad 22.** Ve Větě 5(ii) může existovat  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$  i v případě, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  neexistuje. Např. pro  $g(x) = \operatorname{sgn} x$  a  $f(y) = y^2$  platí, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$  neexistuje, ale přesto je

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

□

Příklady spojitých funkcí:

- konstantní funkce  $f(x) = C$  (v každém bodě  $x \in \mathbb{R}$ ),
- polynom  $P(x)$  (v každém bodě  $x \in \mathbb{R}$ ),
- racionální lomená funkce  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  (v každém bodě  $x \in \mathcal{D}(R)$ , tj. v každém bodě  $x$ , kde  $Q(x) \neq 0$ ),
- trigonometrické funkce (všude, kde jsou definovány).

Spojitosť funkcí lze dobře využít k výpočtu limit – prostým dosazením.

**Příklad 23.**

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x) = (-1)^2 + 2(-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

□

V následujících příkladech uvádíme tzv. základní limity.

**Příklad 24.** Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

*Řešení.* Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left|\frac{0}{0}\right|$ .

Pro  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  platí

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (\text{viz obr.}).$$

A protože je pro tato  $x$  hodnota  $\sin x > 0$ , je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{tj.} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce  $\cos x$  spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro  $x \rightarrow 0^+$  blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách (Věta 4) je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Protože je funkce  $\frac{\sin x}{x}$  sudá, existuje také limita zleva a je rovna 1, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \quad \text{Věta 2(iii)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}. \quad (11)$$

□

**Příklad 25.** Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

*Řešení.* Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left| \frac{0}{0} \right|$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \right) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Proto je

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0}. \quad (12)$$

□

**Příklad 26.** Určete

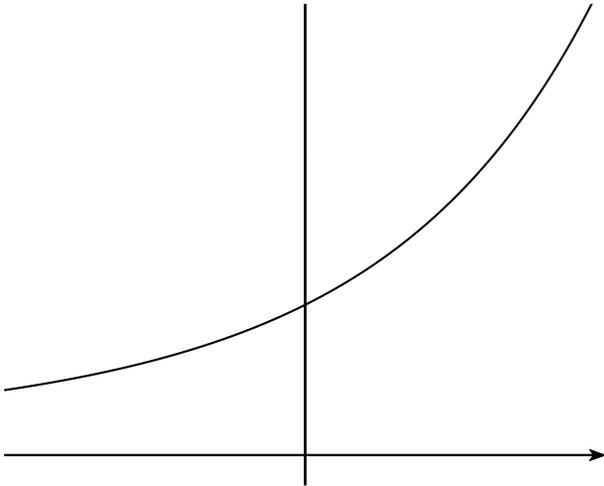
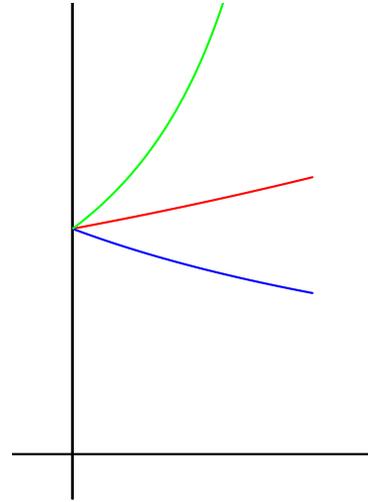
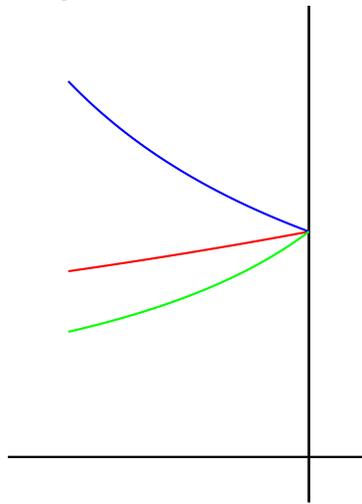
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

*Řešení.* Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left| \frac{0}{0} \right|$ .

Pomocí nerovnosti

$$1 + \frac{x}{x+1} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x}, \quad \text{pro } x \in (0, \frac{1}{2}),$$

(viz obr. níže)

(A) Graf funkce  $\frac{e^x-1}{x}$  na intervalu  $[-1, 1]$ .(B) Graf funkcí  $\frac{e^x-1}{x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$  a  $\frac{1}{1-2x}$  na intervalu  $[0, 0.4]$ .(C) Graf funkcí  $\frac{e^x-1}{x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$  a  $\frac{1}{1-2x}$  na intervalu  $[-0.4, 0]$ .

neboli

$$\frac{1}{x+1} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-2x}, \quad \text{pro } x \in (0, \frac{1}{2}),$$

dostaneme z věty o třech limitách (Věta 4), že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Podobně, platí

$$\frac{1}{1-2x} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{x+1}, \quad \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0),$$

a tedy podle věty o třech limitách (Věta 4) platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Celkově tedy podle Věty 2(iii) je

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}.$$

(13)

□

**Příklad 27.** Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

*Řešení.* Z Příkladu 26 máme, že pro malé  $x$  je  $e^x - 1 \approx x$ , tedy je  $e^x \approx 1 + x$ . Logaritmováním obou stran dostaneme, že  $x \approx \ln(1+x)$ . Tedy platí, že

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}. \quad (14)$$

□

**Příklad 28.** Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

*Řešení.* Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left|\frac{0}{0}\right|$ .

Pomocí rovnosti  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$  dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\rightarrow 1} \cdot \ln a = \ln a,$$

a tedy je

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}. \quad (15)$$

Všimněte si, že nyní je limita (13) speciálním případem limity (15) pro  $a = e$ . □

**Příklad 29.** Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

*Řešení.* Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left|\frac{0}{0}\right|$ .

Pomocí rovnosti  $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$  dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a},$$

a tedy je

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}}. \quad (16)$$

Všimněte si, že nyní je limita (14) speciálním případem limity (16) pro  $a = e$ . □

Spojitosť na intervalu – Bud'  $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ . Funkce  $f(x)$  je spojitá na intervalu  $I$ , je-li spojité v každém vnitřním bodě intervalu  $I$  a patří-li levý/pravý krajní bod do intervalu  $I$ , je v něm  $f(x)$  spojité zprava/zleva. Píšeme

$$f \in C(I), \quad \text{případně} \quad f \in C[a, b], \quad \text{pokud } I = [a, b].$$

(Písmeno „ $C$ “ pochází z anglického continuous=spojitý.)

### Příklad 30.

- (a)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  (viz obr.),  $f(x)$  je spojité na intervalu  $[-2, 2]$ , tj.  $f \in C[-2, 2]$ .
- (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (viz obr.),  $f(x)$  je spojité na intervalu  $(-\infty, 0)$ , na intervalu  $(0, \infty)$ , ale není spojité na intervalu  $(-\infty, \infty)$  (na  $\mathbb{R}$ ).
- (c) Všimněte si, že spojitosť funkce na intervalech  $(-\infty, 0)$  a  $[0, \infty)$  stále ještě nemusí stačit pro spojitosť na celém  $\mathbb{R}$ . Např. funkce (viz obr.)

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0, \\ 1, & \text{pro } x \geq 0, \end{cases}$$

je spojité na každém z intervalů intervalech  $(-\infty, 0)$  a  $[0, \infty)$ , ale není spojité na  $\mathbb{R}$ . □

**Věta 6 (Weierstrassova).** *Je-li funkce  $f(x)$  spojité na intervalu  $[a, b]$ , tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty (viz obr.).*

*Důkaz.* Je založen na principu suprema a infima. □

**Poznámka 3.** Žádná z podmínek ve Větě 6 nemůže být vypuštěna, protože by pak existence nejmenší nebo největší hodnoty v daném intervalu nemusela být zaručena, jak ukazují následující příklady.

- (a) Interval musí být konečný. Např.  $f(x) = x$  na uzavřeném intervalu  $[0, \infty)$  nabývá své minimum v bodě  $x = 0$ , ale nenabývá zde své maximum. Navíc je tato funkce neohraničená. (Viz obr.)
- (b) Interval musí být uzavřený. Např.  $f(x) = \frac{1}{x}$  na intervalu  $(0, 1]$  nabývá své minimum v bodě  $x = 1$ , ale nenabývá zde své maximum. Navíc je tato funkce neohraničená. (Viz obr.)
- (c) Interval musí být uzavřený. Např.  $f(x) = x$  na intervalu  $(0, 1)$  nenabývá v tomto intervalu své minimum ani své maximum, ale tato funkce je ohraničená. (Viz obr.) □

**Věta 7 (Bolzanova).** *Je-li funkce  $f(x)$  spojité na intervalu  $[a, b]$ , tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom  $f(x)$  nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou (viz obr.). Tj. označíme-li  $m := \min f(x)$  a  $M := \max f(x)$ , potom pro každou hodnotu  $y \in [m, M]$  existuje (alespoň jedno)  $c \in [a, b]$  tak, že platí  $f(c) = y$ .*

Volbou  $y = 0$  v předchozí větě dostaneme následující.

**Důsledek 1.** Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $[a, b]$  a mají-li hodnoty  $f(a)$  a  $f(b)$  různá znaménka (tj.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), pak existuje bod  $c \in (a, b)$  tak, že platí  $f(c) = 0$ , tj. rovnice  $f(x) = 0$  má v intervalu  $(a, b)$  alespoň jedno řešení (viz obr.).

**Věta 8 (O spojitosti inverzní funkce).** Je-li funkce  $f(x)$  spojitá a ryze monotónní (tj. stále „roste“ nebo stále „klesá“) na intervalu  $I$ , potom je také inverzní funkce  $f^{-1}(x)$  spojitá a ryze monotónní na intervalu  $J := f(I)$ .

Z výše uvedené věty plyne spojitost cyklometrických funkcí  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$ , a dále spojitost logaritmických funkcí.

**2.6. Body nespojitosti.** Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech  $x_0 \in \mathbb{R}$ ):

1. Odstranitelná nespojitost – existuje vlastní limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , ale tato limita je různá od  $f(x_0)$  (případně  $f(x_0)$  není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze „odstranit“ předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty  $f(x_0)$ .

**Příklad 31.**

(a) Funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

má v bodě  $x_0 = 2$  odstranitelnou nespojitost (v podstatě je  $f(x) = x + 2$  pro  $x \neq 2$ ).

(b) Funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

má v bodě  $x_0 = 0$  odstranitelnou nespojitost. □

2. Skok (též nespojitost prvního druhu) – existují vlastní jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě  $f(x_0)$ ).

**Příklad 32.** Funkce  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  má v bodě  $x_0 = 0$  nespojitost typu skok. □

3. Nespojitost druhého druhu – alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

**Příklad 33.** Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

mají v bodě  $x_0 = 0$  nespojitost druhého druhu. □

2.7. **Derivace.** Jako motivaci uvedeme výpočet následujících limit.

**Příklad 34.**

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

□

**Příklad 35.**

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{\frac{x-2}{1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{\frac{x - x_0}{1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 - x}{x x_0 (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

□

**Definice 7 (Derivace).** Necht'  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ . Pokud existuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{vlastní nebo nevlastní}), \quad (17)$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  a značíme  $f'(x_0)$ . Je-li tato limita nevlastní (tj.  $\pm\infty$ ), nazývá se  $f'(x_0)$  nevlastní derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$ . □

Jiná terminologie je diferencovatelnost funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$ .

Co je to vlastně „derivace“ v bodě  $x_0$ ?

1. Analyzujme diferenční podíl (viz obr.)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{tg } \varphi = \frac{\text{směrnice sečny procházející body}}{M = [x_0, f(x_0)] \text{ a } N = [x, f(x)]}$$

2. Pokud se  $x$  blíží k  $x_0$  (tj. bod  $N$  se blíží k bodu  $M$ ), sečna  $MN$  se stává tečnou v bodě  $M$ , a tedy je

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\text{směrnice tečny}} \text{ v bodě } M = [x_0, f(x_0)].$$

**Příklad 36.** Funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  má v bodě  $x_0 = 1$  tečnu, která má směrnici  $a = -1$ . A proto je také  $f'(1) = -1$ , srovnejte s Příkladem 35(a).  $\square$

**Poznámka 4.**

- (i) Derivace  $f'(x_0)$  (jako limita) je vždy limitou typu  $\frac{0}{0}$ .
- (ii) Pokud nahradíme limitu ve výrazu (17) jednostrannými limitami, dostaneme definici derivace zprava a derivace zleva v bodě  $x_0$ , tj.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zřejmě pak  $f'(x_0)$  existuje  $\Leftrightarrow$  existují  $f'_-(x_0)$  a  $f'_+(x_0)$  a tyto jednostranné derivace jsou si rovny.

- (iii) Každá funkce má v libovolném bodě  $x_0$  nejvýše jednu derivaci.
- (iv) Hodnota  $f'(x_0)$  popisuje rychlost změny funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- (v) Položíme-li  $h := x - x_0$ , dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}. \quad (18)$$

- (vi) Aby mohla mít funkce  $f(x)$  derivaci v bodě  $x_0$ , musí být definována na nějakém okolí bodu  $x_0$  (včetně bodu  $x_0$ )!

- (vii)  $f'(x_0)$  někdy píšeme jako  $\frac{df}{dx}(x_0)$ , nebo jako  $f'(x)|_{x=x_0}$ .  $\square$

**Poznámka 5.** Rovnice tečny ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$  je pak

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{kde } y_0 = f(x_0).$$

$\square$

**Příklad 37.** Určete směrnici tečny a rovnici tečny funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  v bodě  $x_0 = 2$ .

*Řešení.* Z Příkladu 35(b) víme, že  $f'(2) = -\frac{1}{4}$ , tedy směrnice tečny v bodě  $x_0 = 2$  je  $a = -\frac{1}{4}$ .

Protože je  $f(2) = \frac{1}{2}$ , je podle Poznámky 5 rovnice tečny v bodě  $x_0 = 2$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2), \quad \text{tj.} \quad y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

□

**Příklad 38.** V Příkladech 34 a 35 jsme vlastně odvodili vztahy

$$(x^2)'|_{x=x_0} = 2x_0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)'|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

□

Z geometrické vlastnosti, že derivace je směrnice tečny, můžeme tedy odvodit následující pravidla:

$$(x)'|_{x=x_0} = 1, \quad (ax + b)'|_{x=x_0} = a, \quad (k)'|_{x=x_0} = 0.$$

**Příklad 39.**

$$(x^3)'|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

□

Podobně lze odvodit takové pravidlo pomocí rozvoje pro  $x^n - x_0^n$  (kde  $n \in \mathbb{N}$ ), tj.

$$(x^n)'|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \dots = nx_0^{n-1}, \quad \text{tj.} \quad \boxed{(x^n)'|_{x=x_0} = nx_0^{n-1}}. \quad (19)$$

Porovnejte tento výsledek s definicí derivace polynomu v Odstavci 1.3.

**Příklad 40.** Určete derivaci funkce  $f(x) = \sqrt{x}$  v bodech  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ .

*Řešení.* Zřejmě je  $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ . Pro  $x_0 > 0$  je

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}. \end{aligned}$$

Pro  $x_0 = 0$  derivace neexistuje (je to krajní bod definičního oboru, a tudíž v něm neexistuje limita – existuje zde pouze limita zprava). Vypočtème tedy derivaci zprava:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Funkce  $f(x) = \sqrt{x}$  tedy má v počátku nevlastní pravostrannou derivaci  $f'_+(0) = \infty$ , neboli tečna v bodě  $x_0 = 0$  je svislá přímka. □

Pokud se na bod  $x_0$  budeme dívat jako na „proměnnou“, potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu  $x$  přiřadí hodnotu  $f'(x)$  (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy  $f'(x)$  je opět funkce proměnné  $x$ , přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

**Příklad 41.** V Příkladu 40 je  $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$  a  $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$ , přestože  $f'_+(0)$  existuje (ale jen jako nevlastní derivace).  $\square$

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Má-li funkce  $f(x)$  derivaci v každém bodě množiny (např. intervalu)  $I$ , pak říkáme, že  $f(x)$  je diferencovatelná na  $I$ . Např.  $x^n$  je diferencovatelná na  $\mathbb{R}$ , nebo  $\frac{1}{x}$  je diferencovatelná na  $(0, \infty)$  a na  $(-\infty, 0)$ .

Normála ke grafu v bodě  $x_0$  je přímka, která prochází bodem  $[x_0, f(x_0)]$  a je kolmá na tečnu (viz obr.). Je-li  $a_1$  směrnice tečny a  $a_2$  směrnice normály, potom platí vztah

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 = -1}.$$

**Příklad 42.** Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce  $f(x) = x^4$  v bodě  $x_0 = 1$ .

*Řešení.* Tečna: Protože je směrnice tečny v bodě  $x_0 = 1$  rovna  $f'(1) = (4x^3)|_{x=1} = 4$  a protože je  $f(1) = 1$ , podle Poznámky 5 je rovnice tečny

$$y - 1 = 4(x - 1), \quad \text{tj.} \quad y = 4x - 3.$$

Normála: Protože je směrnice normály v bodě  $x_0 = 1$  rovna  $a_2 = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$  a protože i normála (stejně jako tečna) prochází bodem  $[x_0, f(x_0)] = [1, 1]$ , je rovnice normály

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1), \quad \text{tj.} \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

$\square$

**Příklad 43.** Určete zda má funkce  $f(x) = |x|$  v bodě  $x_0 = 0$  derivaci.

*Řešení.*

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \quad \dots \text{ limita neexistuje.}$$

Funkce  $|x|$  nemá v počátku derivaci. Pochopitelně, protože míti derivaci = míti (právě jednu) tečnu.

Na druhou stranu, můžeme vypočítat jednostranné derivace v počátku:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Tedy tyto jednostranné derivace jsou různé, a proto podle Poznámky 4(ii) neexistuje  $f'(0)$ .  $\square$

## Derivace v praxi

1. Je-li  $s(t)$  poloha hmotného bodu na přímce v čase  $t$ , potom je výraz

$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

roven průměrné rychlosti za časový úsek  $[t_0, t]$ . Zřejmě je pak

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rychlost v okamžiku  $t_0$ , a tedy je

$$v(t) = s'(t), \quad \boxed{\text{rychlost je derivace dráhy}}.$$

Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost  $v(t)$  má znaménko, tj.  $v(t) > 0$  ve směru pohybu, kdy se  $s(t)$  zvětšuje a  $v(t) < 0$ , když se  $s(t)$  zmenšuje.

2. Protože je zrychlení  $a(t)$  změna rychlosti, podobně platí, že

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

je zrychlení v okamžiku  $t_0$ , a tedy je

$$a(t) = v'(t), \quad \boxed{\text{zrychlení je derivace rychlosti}}.$$

3. Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \quad \boxed{\text{výkon je derivace práce}}.$$

4. Protože platí, že

$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna elektrického náboje}}{\text{změna času}},$$

je

$$I(t) = Q'(t), \quad \boxed{\text{proud je derivace náboje}}.$$

**2.8. Vlastnosti a pravidla derivací.** V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

**Věta 9.** Má-li  $f(x)$  v bodě  $x_0$  vlastní derivaci  $f'(x_0)$ , potom je funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ .

*Důkaz.* Chceme ukázat, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Protože existuje vlastní  $f'(x_0)$  je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} \right) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Je tedy  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ . □

Z Věty 9 plyne, že pokud je funkce  $f(x)$  nespojitá v bodě  $x_0$ , pak v něm nemůže mít derivaci.

**Příklad 44.** Funkce  $\operatorname{sgn} x$  je nespojitá v počátku, a proto zde nemá (vlastní) derivaci.  $\square$

Pozor! Opačné tvrzení k Větě 9 neplatí, tj. ze spojitosti v  $x_0$  neplyne existence derivace v bodě  $x_0$ . Příkladem je funkce  $|x|$  v bodě  $x_0 = 0$ .

Pokud má funkce nevlastní derivaci v bodě  $x_0$ , tak stále ještě může být spojitá v  $x_0$ . Obecné pravidlo jako ve Větě 9 ale k dispozici nemáme.

**Příklad 45.**

(a) Funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  je zřejmě spojitá v bodě  $x_0 = 0$  (dokonce na celém  $\mathbb{R}$ ). Přitom

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty.$$

Tato funkce má tedy v počátku nevlastní derivaci (tečna je svislá přímka = osa  $y$ , viz obr.) a přitom je spojitá.

(b) Funkce  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  je nespojité v bodě  $x_0 = 0$ . Přitom

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} \left| \text{typ } \frac{-1}{0^-} \right| = \infty,$$

a tedy také  $f'(0) = \infty$  existuje. Tato funkce má tedy v počátku nevlastní derivaci a přitom je zde nespojitá (nemá tečnu v počátku).  $\square$

**Věta 10 (Pravidla pro derivace).** *Nechť mají funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  vlastní derivaci v bodě  $x$ . Potom platí následující pravidla.*

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

(iii) *Pravidlo součinu:*

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(iv) *Pravidlo podílu:*

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

*Důkaz.* Pravidla (i) a (ii) jsou triviální z definice derivace (jako limity). Ukážeme pravidlo součinu:

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\rightarrow g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \right\} \\
 &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),
 \end{aligned}$$

přičemž jsme použili Větu 9 pro spojitost funkce  $g(x)$  v bodě  $x_0$ . Pravidlo podílu se ukáže podobně, jako pravidlo součinu.  $\square$

#### Příklad 46.

$$(2x^3 + 3x + 1)' = 2(x^3)' + 3(x)' + (1)' = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 3,$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)' &= \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x} \cdot x^2)' &= (\sqrt{x})' \cdot x^2 + \sqrt{x} \cdot (x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 + \sqrt{x} \cdot 2x \\
 &= \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \sqrt{x^3}.
 \end{aligned}$$

Všimněte si, že poslední uvedený příklad má na levé straně  $(x^{\frac{5}{2}})'$ .  $\square$

**Příklad 47.** Uvažujme soukolí tří ozubených kol, přičemž kolo  $A$  má 12 zubů, kolo  $B$  má 4 zuby a kolo  $C$  má 6 zubů (viz obr.). Jestliže kolo  $A$  udělá  $y$  otáček, kolo  $B$  udělá  $u$  otáček a kolo  $C$  udělá  $x$  otáček, potom platí

$$y = \frac{1}{3}u, \quad u = \frac{3}{2}x, \quad \text{a tedy je} \quad y = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x.$$

Velikost změny  $y$  ke změně  $u$  je zřejmě  $\frac{1}{3}$ , velikost změny  $u$  ke změně  $x$  je zřejmě  $\frac{3}{2}$ , a proto velikost změny  $y$  ke změně  $x$  je  $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ .

Ukázali jsme tedy, že při skládání funkcí se velikost změn (= derivace) násobí.  $\square$

**Věta 11 (Derivace složené funkce).** *Má-li funkce  $y = f(u)$  derivaci v bodě  $u_0 := g(x_0)$  a funkce  $u = g(x)$  derivaci v bodě  $x_0$ , potom má složená funkce  $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$  derivaci v bodě  $x_0$  a platí*

$$(f \circ g)'(x) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

**Příklad 48.** Určete derivaci funkce  $\sqrt{x^2 + x}$ .

*Řešení.* Označme  $f(u) = \sqrt{u}$  a  $u = g(x) = x^2 + x$ . Potom je  $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$  a  $g'(x) = 2x + 1$ . A proto je podle Věty 11

$$(\sqrt{x^2 + x})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x + 1) \Big|_{u=x^2+x} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$$

□

Složenou funkci je výhodné derivovat podle pravidla vnější funkce a vnitřní funkce:

$$\left[ \underbrace{f}_{\text{vnější}} \left( \underbrace{g}_{\text{vnitřní}}(x) \right) \right]' = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{derivuj vnější} \\ \text{nechej jako} \\ \text{argument vnitřní}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivuj vnitřní}}.$$

**Příklad 49.**

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1})' &= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} \cdot (3x^2 + 2x + 1), \\ [(x^2 + x)^2]' &= 2(x^2 + x) \cdot (2x + 1) = 4x^3 + 6x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Všimněte si, že poslední uvedený příklad lze spočítat i přímo

$$[(x^2 + x)^2]' = (x^4 + 2x^3 + x^2)' = 4x^3 + 6x^2 + 2x,$$

nebo podle pravidla součinu

$$[(x^2 + x)^2]' = [(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)]' = (2x + 1) \cdot (x^2 + x) + (x^2 + x) \cdot (2x + 1) = 4x^3 + 6x^2 + 2x.$$

□

Druhá derivace funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  se definuje jako derivace funkce  $f'(x)$  v bodě  $x_0$ , tj.  $f''(x) := [f'(x)]'$ .

Podobně definujeme  $n$ -tou derivaci funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  jako derivace funkce  $f^{(n-1)}(x)$  v bodě  $x_0$ , tj.  $f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}(x)]'$ .

**Příklad 50.**

$$(\sqrt{x})'' = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 \cdot \sqrt{x} - 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{[\sqrt{x}]^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

□

Poslední pravidlo, které budeme pro derivování potřebovat, je pravidlo pro derivaci inverzní funkce. Jak již víme, funkce  $f$  má inverzní funkci  $f^{-1}$  pouze pokud je  $f(x)$  prostá (injektivní v terminologii MB101), tedy na zadaném intervalu buď stále roste nebo stále klesá (tj. je tzv. ryze monotónní). Složení funkce  $f$  a její inverze  $f^{-1}$  (v libovolném pořadí) dává identické zobrazení a tudíž jsou grafy funkce  $f$  a její inverze  $f^{-1}$  souměrné podle přímky  $y = x$  (tj. podle osy 1. a 3. kvadrantu).

Jelikož budeme nyní primárně studovat vlastnosti funkce inverzní  $f^{-1}$ , označíme si tuto funkci v proměnné  $x$ , tj. inverzní funkce  $f^{-1}$  bude zadána jako předpis  $y = f^{-1}(x)$  na svém definičním oboru

$\mathcal{D}(f^{-1}) = J$ . Neznámé vlastnosti (zejména tedy derivaci) inverzní funkce  $f^{-1}(x)$  vyjádříme pomocí derivace „původní“ a tudíž známé funkce  $f$ , kterou si označíme v proměnné  $y$ . Tj. „původní“ funkce je dána předpisem  $x = f(y)$  na svém definičním oboru  $\mathcal{D}(f) = I = f^{-1}(J)$ , neboli  $\mathcal{D}(f^{-1}) = J = f(I)$ .

**Příklad 51.** Zajímají nás vlastnosti (např. derivace) funkce  $\sqrt[3]{x}$ . Tato funkce je inverzní k funkci  $x^3$ . Označíme si proto tuto inverzi v proměnné  $x$ , tj.  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ , a „původní“ funkci v proměnné  $y$ , tj.  $f(y) = y^3$ .

Potom budeme moct vyjádřit derivaci funkce  $\sqrt[3]{x}$  pomocí derivace „původní“ funkce  $f(y) = y^3$ , tj. pomocí  $f'(y) = 3y^2$ .  $\square$

**Věta 12 (Derivace inverzní funkce).** *Je-li funkce  $x = f(y)$  spojitá a ryze monotonní na intervalu  $J$  a je-li  $y_0 \in J$  vnitřní bod tohoto intervalu takový, že  $f(y)$  má derivaci (vlastní nebo nevlastní)  $f'(y_0)$  v bodě  $y_0$ , potom má inverzní funkce  $y = f^{-1}(x)$  derivaci  $(f^{-1})'(x_0)$  v bodě  $x_0 := f(y_0)$ . Pro tuto derivaci platí následující:*

(i) *Je-li  $f'(y_0) \neq 0$ , potom je*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

(ii) *Je-li  $f'(y_0) = 0$ , potom je  $(f^{-1})'(x_0)$  nevlastní a přitom*

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x_0) &= \infty, & \text{pro } f(y) \text{ rostoucí,} \\ (f^{-1})'(x_0) &= -\infty, & \text{pro } f(y) \text{ klesající.} \end{aligned}$$

*Důkaz.* Označme jako

$\varphi =$  (známý) směrový úhel tečny ke grafu funkce  $x = f(y)$  v bodě  $[y_0, x_0]$   
vzhledem ke kladnému směru osy  $y$ ,

$\psi =$  (neznámý) směrový úhel tečny ke grafu funkce  $y = f^{-1}(x)$  v bodě  $[x_0, y_0]$ ,  
vzhledem ke kladnému směru osy  $x$ ,

přičemž platí, že  $\text{tg } \varphi = f'(y_0)$  je známá hodnota a my chceme určit neznámou hodnotu

$$\text{tg } \psi = (f^{-1})'(x_0).$$

Vzhledem k tomu, že  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$  (viz obr.), je pro  $\text{tg } \varphi \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{tg } \psi &= \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \varphi - \cos \frac{\pi}{2} \sin \varphi}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\pi}{2} \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \\ &= \cotg \varphi = \frac{1}{\text{tg } \varphi}, \end{aligned}$$

neboť  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  a  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Je tedy

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Je-li  $\operatorname{tg} \varphi = 0$  (tečna ke grafu původní funkce  $x = f(y)$  je vodorovná), potom je tečna ke grafu inverzní funkce  $y = f^{-1}(x)$  svislá, tj.  $(f^{-1})'(x_0)$  je nevlastní.  $\square$

**Poznámka 6.** Derivaci inverzní funkce lze také odvodit z pravidla pro složenou funkci (Věta 11). Je totiž pro každé  $x \in \mathcal{D}(f^{-1})$

$$x = f(f^{-1}(x)),$$

a tedy derivováním na obou stranách této rovnosti dostaneme

$$1 = [f(f^{-1}(x))]'' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x), \quad \text{tj.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

$\square$

**Příklad 52.** Určete derivaci funkce  $\sqrt[3]{x}$ .

*Řešení.* Označme si (viz Příklad 51)

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = f(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 3y^2.$$

Tedy podle Věty 12 je

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Všimněte si, že  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  a výraz na pravé straně je  $\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ .  $\square$

**2.9. Derivace elementárních funkcí.** V tomto odstavci odvodíme derivace všech elementárních funkcí.

Ze vztahu (19) víme, že pro  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je  $(x^n)' = nx^{n-1}$  (pro  $n = 0$  derivaci funkce  $x^0 \equiv 1$  můžeme v tomto vztahu interpretovat jako  $0 = (1)' = (x^0)' = 0x^{-1}$ , přičemž poslední uvedený výraz definujeme jako 0).

Nyní ukážeme, že stejný vztah platí pro libovolné (reálné) exponenty, nejen pro přirozená čísla.

**Tvrzení 1 (Derivace mocniny).** Pro libovolný exponent  $r \in \mathbb{R}$  platí, že

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \tag{20}$$

kdykoliv mají uvedené výrazy smysl.

*Důkaz.*

Krok I. ( $r = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ). To jsme již ukázali ve vzorečku (19).

Krok II. ( $r = m \in \mathbb{Z}$ ). Nechť  $m$  je záporné celé číslo, tj.  $m = -n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ . Potom  $x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  a tedy derivaci funkce  $x^m$  odvodíme z pravidla pro derivaci podílu (Věta 10(iv)):

$$(x^m)' = \left( \frac{1}{x^n} \right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(n-1)-2n} = (-n)x^{-n-1} = mx^{m-1}.$$

Krok III. ( $r = \frac{1}{q}$ , kde  $q \in \mathbb{N}$ ). Derivaci funkce  $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$  odvodíme z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 12, podobně jako v Příkladu 52). Označme si  $y = f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$  a  $x = f(y) = y^q$ . Protože je  $q \in \mathbb{N}$ , je podle Kroku I.  $f'(y) = qy^{q-1}$ . A tedy podle Věty 12 platí, že

$$(x^r)' = (\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q(\sqrt[q]{x})^{q-1}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Krok IV. ( $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , kde  $p \in \mathbb{Z}$  a  $q \in \mathbb{N}$ ). Derivaci funkce  $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$  odvodíme z věty o derivaci složené funkce (Věta 11) a z Kroku I. a III.:

$$(x^r)' = [(x^{\frac{1}{q}})^p]' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1+1-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Nebo lze postupovat v obráceném pořadí, tj. derivovat výraz  $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$  jako složenou funkci. Vyzkoušejte si tuto druhou možnost sami.

Krok V. ( $r \in \mathbb{R}$ ). Tento poslední krok plyne např. z pravidla pro derivování exponenciální funkce, které odvodíme později (viz Důsledek 2).  $\square$

**Poznámka 7.** Výraz  $x^r$  obecně není definován pro libovolné  $r \in \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Např. pro  $r = \frac{1}{2}$  je tento výraz definován pouze pro  $x \geq 0$ . Obecně lze s jistotou říci, že rovnost (20) platí pro  $x > 0$  (a libovolné  $r \in \mathbb{R}$ ).

Navíc, pro některé exponenty může rovnost (20) platit i pro  $x \leq 0$ . Např. pro  $r \geq 1$  platí i pro  $x = 0$ , či pro  $r$  celé záporné (tj. pro  $r = -1, -2, -3, \dots$ ) rovnost (20) platí pro všechna  $x < 0$  (kromě již uvedených  $x > 0$ ).  $\square$

### Příklad 53.

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\text{viz Příklad 40}),$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad (\text{viz Příklad 38}),$$

$$(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}.$$

$\square$

**Tvrzení 2 (Derivace trigonometrických funkcí).** Pro trigonometrické funkce platí

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (21)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (22)$$

*Důkaz.* Derivace funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  vypočteme z definice (Definice 7 a vzorec (18)) za použití součtových vzorců:

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x)(\cos h) + (\cos x)(\sin h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (-\sin x) \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos h}{h}}_{\rightarrow 0} + (\cos x) \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \right\} = (-\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x, \\ (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x)(\cos h) - (\sin x)(\sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (-\sin x) \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} - (\cos x) \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos h}{h}}_{\rightarrow 0} \right\} = (-\sin x) \cdot 1 - (\cos x) \cdot 0 = -\sin x.\end{aligned}$$

Derivace funkcí  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$  odvodíme z pravidla pro derivaci podílu (Věta 10(iv)):

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\cos x) \cdot (\cos x) - (\sin x) \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ (\operatorname{cotg} x)' &= \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(-\sin x) \cdot (\sin x) - (\cos x) \cdot (\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Všimněte si také, že derivaci  $\operatorname{cotg} x$  lze spočítat z pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11), protože platí

$$(\operatorname{cotg} x)' = [(\operatorname{tg} x)^{-1}]' = (-1)(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = (-1) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

□

Dále uvedeme derivace exponenciálních a logaritmických funkcí. O číslu  $e$  více v Příkladu 17.

**Tvrzení 3 (Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí).** *Pro exponenciální a logaritmické funkce platí*

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (23)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (24)$$

*Důkaz.* Derivace funkcí  $e^x$  a  $a^x$  vypočteme z definice (Definice 7) za použití základních limit (13) a (15):

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x \cdot 1 = e^x, \\ (a^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{=\ln a} = a^x \cdot \ln a.\end{aligned}$$

Všimněte si, že derivaci funkce  $a^x$  je také možné vypočítat z derivace složené funkce pomocí

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Derivace funkcí  $\ln x$  a  $\log_a x$  vypočteme z definice (Definice 7) za použití základní limity (14):

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}}_{=1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Všimněte si, že derivaci funkce  $\ln x$  lze také spočítat z derivace funkce inverzní (Věta 12), neboť pro  $y = f^{-1}(x) = \ln x$  a pro  $x = f(y) = e^y$  máme  $f'(y) = e^y$ , takže podle Věty 12 je

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

□

**Důsledek 2 (Derivace mocniny).** Pro libovolné  $r \in \mathbb{R}$  platí

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad x > 0.$$

*Důkaz.* Z pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11) a z derivace logaritmu plyne, že

$$(x^r)' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} \cdot (r \ln x)' = x^r \cdot r \frac{1}{x} = rx^r \cdot x^{-1} = rx^{r-1}.$$

□

**Poznámka 8.** V Příkladech 24, 25, 26, 27, 28 a 29 jsme ukázali, že

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} &= 1, & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= 1, & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} &= 1, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \ln a, & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+h)}{h} &= \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

Tyto limity ale nevyjadřují nic jiného, než derivace funkcí  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $a^x$  v bodě 0 a derivace funkcí  $\ln x$ ,  $\log_a x$  v bodě 1, neboť

$$\begin{aligned} (\sin x)'|_{x=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, & (\cos x)'|_{x=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \\ (e^x)'|_{x=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1, & (\ln x)'|_{x=1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1, \\ (a^x)'|_{x=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a, & (\log_a x)'|_{x=1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+h)}{h} = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

□

**Tvrzení 4 (Derivace cyklometrických funkcí).** Pro cyklometrické funkce platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (25)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (26)$$

*Důkaz.* Derivace všech těchto cyklometrických funkcí vypočteme z pravidla pro derivování inverzní funkce (Věta 12).

• Pro  $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$  a pro  $x = f(y) = \sin y$  máme  $f'(y) = \cos y$ , a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Protože ale pro libovolné  $y \in \mathbb{R}$  je  $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$  (zejména tedy pro  $y = \arcsin x$ ), je

$$1 = [\cos(\arcsin x)]^2 + [\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}]^2 = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

• Pro  $y = f^{-1}(x) = \arccos x$  a pro  $x = f(y) = \cos y$  máme  $f'(y) = -\sin y$ , a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\arccos x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Protože ale pro libovolné  $y \in \mathbb{R}$  je  $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$  (zejména tedy pro  $y = \arccos x$ ), je

$$1 = [\underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x}]^2 + [\sin(\arccos x)]^2 = x^2 + \sin^2(\arccos x),$$

$$\Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

• Pro  $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$  a pro  $x = f(y) = \operatorname{tg} y$  máme  $f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$ , a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Protože ale pro libovolné  $y \in \mathbb{R}$  je  $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$  (zejména tedy pro  $y = \operatorname{arctg} x$ ), je

$$1 = [\cos(\operatorname{arctg} x)]^2 + [\sin(\operatorname{arctg} x)]^2.$$

Vydělením obou stran této rovnosti výrazem  $[\cos(\operatorname{arctg} x)]^2$  dostaneme

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + \left( \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)} \right)^2 = 1 + [\underbrace{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}_{=x}]^2 = 1 + x^2,$$

$$\Rightarrow \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

• Pro  $y = f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$  a pro  $x = f(y) = \text{cotg } y$  máme  $f'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y}$ , a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\text{arccotg } x)' = \frac{1}{f'(y)} = -\sin^2 y = -\sin^2(\text{arccotg } x).$$

Protože ale pro libovolné  $y \in \mathbb{R}$  je  $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$  (zejména tedy pro  $y = \text{arccotg } x$ ), je

$$1 = [\cos(\text{arccotg } x)]^2 + [\sin(\text{arccotg } x)]^2.$$

Vydělením obou stran této rovnosti výrazem  $[\sin(\text{arccotg } x)]^2$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(\text{arccotg } x)} &= \left( \frac{\cos(\text{arccotg } x)}{\sin(\text{arccotg } x)} \right)^2 + 1 = \underbrace{[\text{cotg}(\text{arccotg } x)]^2}_{=x} + 1 = x^2 + 1, \\ \Rightarrow \sin^2(\text{arccotg } x) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

A tedy platí, že

$$(\text{arccotg } x)' = -\sin^2(\text{arccotg } x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

**Příklad 54.** Zkuste si promyslet, jak by se vypočítaly derivace funkcí typu  $[f(x)]^{g(x)}$ , jako např.

$$x^x, \quad x^{\ln x}, \quad x^{\sin x}, \quad (\sin x)^x, \quad \text{atd.}$$

□

## 2.10. Věty o střední hodnotě.

**Věta 13 (Rolleova).** *Nechť  $f(x)$  je spojitá na  $[a, b]$ ,  $f(x)$  je diferencovatelná na  $(a, b)$  a nechť  $f(a) = f(b)$ . Potom existuje (alespoň jeden) bod  $c \in (a, b)$  s vlastností*

$$f'(c) = 0 \quad (\text{tj. tečna v bodě } x = c \text{ je vodorovná}).$$

*Důkaz.* Viz obr.

□

**Věta 14 (Lagrangeova).** *Nechť  $f(x)$  je spojitá na  $[a, b]$  a  $f(x)$  je diferencovatelná na  $(a, b)$ . Potom existuje (alespoň jeden) bod  $c \in (a, b)$  s vlastností*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{tj. tečna v bodě } x = c \text{ je rovnoběžná s přímkou procházející body } [a, f(a)] \text{ a } [b, f(b)]).$$

*Důkaz.* Viz obr.

□

Věty o střední hodnotě mají celou řadu důsledků týkajících se vlastnosti funkcí. Např.:

- Které funkce mají nulovou derivaci? – Pouze konstantní funkce.
- Které funkce mají stejnou derivaci? – Právě ty funkce, které se navzájem liší o konstantu.

**Důsledek 3.** Je-li  $f(x)$  diferencovatelná na  $(a, b)$  a je-li  $f'(x) = 0$  na  $(a, b)$ , potom

$$f(x) \equiv c \quad \text{na } (a, b).$$

*Důkaz.* Pro libovolné dva body  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 < x_2$ , platí, že  $f(x)$  je spojitá na  $[x_1, x_2]$  (podle Věty 9, neboť existuje vlastní  $f'(x)$ ) a diferencovatelná na  $(x_1, x_2)$ . Podle Lagrangeovy věty (Věta 14) je pak pro nějaký bod  $c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

A protože byly body  $x_1$  a  $x_2$  vybrány libovolně v intervalu  $(a, b)$ , musí být nutně  $f(x)$  konstantní na intervalu  $(a, b)$ .  $\square$

**Důsledek 4.** Jsou-li  $f(x)$  a  $g(x)$  diferencovatelné na  $(a, b)$  a je-li  $f'(x) = g'(x)$  na  $(a, b)$ , potom

$$f(x) = g(x) + c \quad \text{na } (a, b) \quad (f(x) \text{ a } g(x) \text{ se liší o konstantu}).$$

*Důkaz.* Funkce  $(f - g)(x)$  je diferencovatelná na  $(a, b)$  a  $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$  na  $(a, b)$ . Podle Důsledku 3 je pak

$$f(x) - g(x) \equiv c \quad \text{na } (a, b), \quad \text{tj.} \quad f(x) = g(x) + c \quad \text{na } (a, b).$$

$\square$

**2.11. L'Hospitalovo pravidlo.** Některé limity typu  $\frac{0}{0}$  nebo  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  lze řešit pomocí tzv. l'Hospitalova pravidla. (Případně i typu  $\frac{k}{\pm\infty}$ , tyto limity jsou ale automaticky rovny 0.)

**Věta 15 (L'Hospitalovo pravidlo).** Bud'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  a necht' je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{typu } \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \quad (27)$$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

potom existuje také limita (27) a tyto dvě limity jsou si rovny, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (\in \mathbb{R}^*). \quad (28)$$

**Příklad 55.**

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \quad \left| \text{typ } 0 \cdot (-\infty) \right| &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left| \text{typ } \frac{-\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad \left| \text{typ } 0^0 \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} \stackrel{\text{spojitost } e^x}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} \stackrel{\text{(a)}}{=} e^0 = 1.$$

□

**Poznámka 9.** L'Hospitalovo pravidlo říká, že jestliže existuje limita podílu derivací, potom existuje také limita podílu funkcí (a tyto dvě limity jsou si rovny)! Nic víc.

(i) L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, pokud limita podílu derivací neexistuje. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \right| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \quad (\text{neexistuje}).$$

(ii) L'Hospitalovo pravidlo nelze použít na typ limity  $\frac{\text{cokoliv}}{0}$ ! Pokud je ve jmenovateli typ 0, musí pak být i v čitateli typ 0 (aby bylo možné l'Hospitalovo pravidlo použít). Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} \quad \left| \text{typ } \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \right| = \infty,$$

ale limita podílu derivací je jiná, protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{(\operatorname{arccotg} x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1.$$

□

**Poznámka 10.**

(i) Limity typu  $\infty - \infty$  lze převést na typ  $\frac{0}{0}$  následovně:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] \quad \left| \text{typ } \infty - \infty \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \quad \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right|.$$

(ii) Limity typu  $0 \cdot \infty$  lze převést na typ  $\frac{0}{0}$  (viz Příklad 55(a)) nebo na typ  $\frac{\infty}{\infty}$  následovně:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] \quad \left| \text{typ } 0 \cdot \infty \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right|,$$

$$\stackrel{\text{nebo}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

(iii) Limity typu  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  lze pomocí exponenciální funkce (viz např. Příklad 55(b)) převést na typ  $0 \cdot \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)} \quad \left| \text{typ } 0 \cdot \infty \text{ nebo } \infty \cdot 0 \right|.$$

□

**2.12. Derivace implicitně zadaných funkcí.** Pokud máme zadánu funkci  $f(x)$  vzorcem  $y = f(x)$ , hovoříme o jejím explicitním zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice  $F(x, y) = 0$ , kde závislá proměnná  $y$  představuje „neznámou“ funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k  $y$ , pak hovoříme o funkci zadané implicitně. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat  $y'(x)$  (aniž bychom znali explicitní vzorec pro  $y(x)$ ), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11).

**Příklad 56.** Rovnice  $y^2 = x$  definuje dvě diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \quad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí  $y_1$  a  $y_2$  lze derivováním rovnice  $y^2 = x$  spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro  $y'$  obsahující jak  $y_1$  tak  $y_2$ .

□

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuje výsledná derivace  $y'$  jak proměnnou  $x$  tak proměnnou  $y$  (na rozdíl od „normálního“ derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná  $x$ ).

Při derivování implicitně zadaných funkcí musíme brát závislou proměnnou (obvykle)  $y$  jako funkci proměnné  $x$ , tedy jakýkoliv složitější výraz s  $y$  musíme derivovat pomocí pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11), viz Příklad 56.

**Příklad 57.** Určete směrnici tečny ke kružnici  $x^2 + y^2 = 25$  v bodě  $P = [-3, 4]$ .

*Řešení.* Derivováním zadané rovnice podle proměnné  $x$  dostaneme

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A proto je směrnice tečny v bodě  $P$  (=derivace v bodě  $P$ ) rovna

$$y' = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

□

V Příkladech 56 a 57 bylo možné neznámou funkci  $y$  explicitně vypočítat (i když jsme to nepotřebovali) a najít tak  $y'$  původním způsobem. V následujícím příkladu ale  $y$  již vyjádřit nelze, a tudíž je implicitní derivování jediným možným způsobem, jak  $y'$  najít.

**Příklad 58.** Určete derivaci funkce  $y = f(x)$ , která je zadaná rovnicí  $4y = x^3 + \cos y$ .

*Řešení.* Derivováním zadané rovnice podle proměnné  $x$  dostaneme

$$(4y)' = (x^3 + \cos y)' \Rightarrow 4y' = 3x^2 - (\sin y) y' \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{4 + \sin y}.$$

□

Tímto způsobem lze počítat i derivace vyšších řádů.

**Příklad 59.** Určete první a druhou derivaci funkce  $y = f(x)$ , která je zadaná rovnicí  $3x^4 - 4y^3 = 1$ .

*Řešení.* Derivováním zadané rovnice podle proměnné  $x$  dostaneme

$$(3x^4 - 4y^3)' = (1)' \Rightarrow 12x^3 - 12y^2 y' = 0 \Rightarrow x^3 - y^2 y' = 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{x^3}{y^2}}.$$

Opětovným derivováním předposlední uvedené rovnice podle proměnné  $x$  dostaneme

$$(x^3 - y^2 y')' = (0)' \Rightarrow 3x^2 - (2y y' \cdot y' + y^2 \cdot y'') = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2y (y')^2 - y^2 y'' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' = \frac{3x^2 - 2y (y')^2}{y^2}}.$$

Všimněte si, že pro derivaci výrazu  $y^2 y'$  musíme použít pravidlo součinu, protože obě funkce  $y^2$  a  $y'$  jsou funkce proměnné  $x$ . Ve výsledku samozřejmě ještě můžeme dosadit za  $y'$  z předchozího výpočtu, tj.

$$y'' = \frac{3x^2 - 2y \left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2}{y^2} = \frac{3x^2 y^3 - 2x^6}{y^5}.$$

□

**2.13. Jednoduché slovní úlohy s derivacemi.** Následující slovní úlohy jsou převzaty z [9].

**Příklad 60.** Jak rychle klesá voda ve válcové nádrži, jestliže vytéká rychlostí 3000 l/min (viz obr.)?

*Řešení.* Označme  $r$  poloměr nádrže [m],  $h(t)$  výšku vody v nádrži [m],  $t$  čas [min],  $V(t)$  objem vody v nádrži [m<sup>3</sup>]. Víme, že  $V'(t) = -3000$  l/min, tj.  $V'(t) = -3$  m<sup>3</sup>/min (objem se zmenšuje, jeho derivace je tedy záporná). Hledáme  $h'(t)$ . Z rovnice pro objem válce

$$V(t) = \pi r^2 h(t)$$

určíme derivováním podle  $t$

$$V'(t) = \pi r^2 h'(t), \quad \text{tj.} \quad h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi r^2} = \frac{-3}{\pi r^2}.$$

Voda tedy klesá (protože je derivace objemu záporná) rychlostí  $3/(\pi r^2)$  m/min. Pro malé  $r$  bude voda klesat rychle, pro velké  $r$  bude voda klesat pomalu. Např. pro  $r = 10$  cm, tj.  $r = 0.1$  m, je  $h'(t) = -300/\pi = -95$  m/min, naproti tomu pro  $r = 10$  m je  $h'(t) = -3/(100\pi) = -0.0095$  m/min, tj.  $h'(t) = -9.5$  mm/min.  $\square$

**Příklad 61.** Horkovzdušný balón stoupá kolmo vzhůru. Je zachycen radarem, který je 500 metrů od místa vzletu a který v té chvíli udává elevační úhel  $\frac{\pi}{4}$ , přičemž úhel roste rychlostí 0.14 rad/min. Jak rychle v tomto okamžiku balón stoupá (viz obr.)?

*Řešení.* Označme  $t$  čas [min],  $h(t)$  výška balonu nad zemí [m],  $\varphi(t)$  vertikální elevační úhel radaru [rad]. Potom víme, že  $\varphi'(t) = 0.14$  rad/min, když je  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Hledáme  $h'(t)$  pro  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Z pravoúhlého trojúhelníka vidíme, že

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{h(t)}{500}, \quad \text{tj.} \quad h(t) = 500 \operatorname{tg} \varphi(t).$$

Derivováním podle  $t$  určíme

$$h'(t) = 500 \frac{1}{\cos^2 \varphi(t)} \varphi'(t),$$

tj. v uvedeném okamžiku je

$$h'(t) = 500 \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} (0.14) = 140 \text{ m/min.}$$

V daném okamžiku stoupá balón rychlostí 140 m/min.  $\square$

**Příklad 62.** Policejní auto sleduje auto lupičů. Přijíždí k pravoúhlé křižovatce ze severu, přičemž auto lupičů již ujíždí od křižovatky na východ. Když je policejní auto 0.6 km od křižovatky a auto lupičů 0.8 km od křižovatky, udává radar v policejním autě, že se auto lupičů vzdaluje od jejich auta rychlostí 40 km/h. Policejní auto jede v té chvíli rychlostí 120 km/h. Určete rychlost auta lupičů v tomto okamžiku.

*Řešení.* Označme (viz obr.)  $x(t)$  pozici auta lupičů (vodorovně) [km],  $y(t)$  pozici policejního auta (svisle) [km],  $t$  čas [h],  $s(t)$  vzdušnou vzdálenost mezi auty [km]. Potom víme, že  $s'(t) = 40$  km/h pro  $x = 0.8$  km a  $y = 0.6$  km a  $y'(t) = -120$  km/h (policejní auto se ke křižovatce přibližuje, proto je derivace jejich pozice  $y(t)$  záporná). Hledáme  $x'(t)$  v témže okamžiku. Z rovnice

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

obdržíme derivováním podle  $t$

$$2s(t)s'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t), \quad \text{tj.} \quad x'(t) = \frac{s(t)s'(t) - y(t)y'(t)}{x(t)}.$$

Dosazením údajů pro daný okamžik dostaneme

$$x'(t) = \frac{\sqrt{(0.6)^2 + (0.8)^2} \cdot 40 - (0.6)(-120)}{0.8} = 140 \text{ km/h.}$$

Auto lupičů ujíždí v daném okamžiku od křižovatky rychlostí 140 km/h.  $\square$

**Příklad 63.** Policejní vrtulník letí 3 km nad rovnou cestou v obci rychlostí 120 km/h. Pilot vidí protijedoucí auto a radarem zjistí, že když je auto od něj 5 km daleko, jejich vzdálenost klesá rychlostí 160 km/h. Určete rychlost auta v tomto okamžiku.

*Řešení.* Označme (viz obr.)  $x(t)$  pozici auta (vodorovná) [km],  $y(t)$  pozici vrtulníku (vodorovná) [km],  $t$  čas [h],  $s(t)$  vzdušnou vzdálenost vrtulníku a auta [km]. Potom víme, že  $y'(t) = 120$  km/h a  $s'(t) = -160$  km/h pro  $s = 5$  km (jejich vzdušná vzdálenost se zmenšuje, proto je derivace záporná). Hledáme  $x'(t)$  v tomto okamžiku. Z rovnice

$$[x(t) - y(t)]^2 + 3^2 = s^2(t)$$

dostaneme derivováním podle  $t$

$$2[x(t) - y(t)][x'(t) - y'(t)] = 2s(t)s'(t), \quad \text{tj.} \quad x'(t) = y'(t) + \frac{s(t)s'(t)}{x(t) - y(t)}.$$

Pro  $s = 5$  km je  $x - y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$  km, tedy dosazením do výše uvedeného vztahu dostaneme pro daný okamžik, že

$$x'(t) = 120 + \frac{5 \cdot (-160)}{4} = -80 \text{ km/h.}$$

Auto jede (přibližuje se z pohledu pilota vrtulníku) v obci rychlostí 80 km/h. □

**Příklad 64.** Žebřík délky 13 metrů je opřený o stěnu domu. Dolní část žebříku začne klouzat směrem od domu. Když je dolní část žebříku 12 metrů od domu, pohybuje se tato dolní část rychlostí 5 m/s. (a) Jak rychle se pohybuje horní část žebříku v tomto okamžiku? (b) Jak rychle se mění plocha vymezená žebříkem, zemí a stěnou domu v tomto okamžiku? (c) Jak rychle se mění úhel mezi žebříkem a zemí v tomto okamžiku?

*Řešení.* Označme (viz obr.)  $x(t)$  pozici dolní části žebříku (vodorovná) [m],  $y(t)$  pozici horní části žebříku (svislá) [m],  $t$  čas [s],  $A(t)$  plochu mezi žebříkem, zemí a stěnou domu,  $\varphi(t)$  úhel mezi žebříkem a zemí. Potom víme, že  $x'(t) = 5$  m/s pro  $x = 12$  m. Hledáme (a)  $y'(t)$  pro  $x = 12$  m, (b)  $A'(t)$  pro  $x = 12$  m, (c)  $\varphi'(t)$  pro  $x = 12$  m. Z pravoúhlého trojúhelníka vidíme, že platí rovnice

$$x^2(t) + y^2(t) = 13^2 = 169.$$

Derivováním podle  $t$  obdržíme

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0, \quad \text{tj.} \quad y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}x'(t).$$

Pro  $x = 12$  m je  $y = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$  m, tedy po dosazení

$$y'(t) = -\frac{12}{5} \cdot 5 = -12 \text{ m/s.}$$

Horní část žebříku klesá v daném okamžiku rychlostí 12 m/s. Pro druhou otázku máme rovnici

$$A(t) = \frac{1}{2}x(t)y(t),$$

jejíž derivací podle  $t$  (pozor, jde o derivaci součinu) a dosazením dostaneme

$$A'(t) = \frac{1}{2}[x'(t)y(t) + x(t)y'(t)] = \frac{1}{2}[5 \cdot 5 + 12 \cdot (-12)] = -\frac{119}{2} = -59.5 \text{ m}^2/\text{s.}$$

Velikost plochy klesá v daném okamžiku rychlostí  $59.5 \text{ m}^2/\text{s}$ . Pro třetí otázku máme rovnici

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Derivací této rovnice podle  $t$  dostaneme (pozor, na pravé straně jde o derivaci podílu)

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi(t)} \varphi'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}.$$

Pro  $x = 12$  (a tedy  $y = 5$ ) je  $\cos \varphi(t) = \frac{12}{13}$  a dosazením do předchozí rovnice plyne, že

$$\varphi'(t) = \cos^2 \varphi(t) \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} = \frac{144}{169} \cdot \frac{(-12) \cdot 12 - 5 \cdot 5}{144} = -1 \text{ rad/s}.$$

Úhel v daném okamžiku klesá rychlostí  $1 \text{ rad/s}$ . □

**Příklad 65.** Člověk výšky  $180 \text{ cm}$  jde rychlostí  $1.5 \text{ m/s}$  k pouliční lampě, která je  $4.8 \text{ metrů}$  nad zemí. (a) Jakou rychlostí se pohybuje špička jeho stínu? (b) Jakou rychlostí se mění délka jeho stínu, když je ten člověk  $3 \text{ metry}$  od stojanu lampy?

*Řešení.* Označme (viz obr.)  $x(t)$  pozici člověka [m],  $y(t)$  pozici špičky jeho stínu [m],  $t$  čas [s]. Potom víme, že  $x'(t) = -1.5 \text{ m/s}$  (vzdálenost od lampy se zmenšuje, proto je tato derivace záporná). Hledáme (a)  $y'(t)$ , (b)  $[y(t) - x(t)]'$  pro  $x = 3 \text{ m}$ . Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků vyplývá, že

$$\frac{4.8}{y(t)} = \frac{1.8}{y(t) - x(t)}, \quad \text{tj.} \quad (4.8)[y(t) - x(t)] = (1.8)y(t), \quad \text{tj.} \quad y(t) = (1.6)x(t).$$

Derivováním podle  $t$  obdržíme

$$y'(t) = (1.6)x'(t), \quad \text{tj. po dosazení} \quad y'(t) = (1.6) \cdot (-1.5) = -2.4 \text{ m/s}.$$

Špička stínu se pohybuje rychlostí  $2.4 \text{ m/s}$  (přibližuje se k lampě). Pro druhou otázku máme

$$y(t) - x(t) = \frac{1.8}{4.8} y(t) = (0.375)y(t),$$

tj. po derivování a dosazení

$$[y(t) - x(t)]' = (0.375)y'(t) = (0.375) \cdot (-2.4) = -0.9 \text{ m/s}.$$

Délka stínu klesá rychlostí  $0.9 \text{ m/s}$  (a tato rychlost nezávisí na vzdálenosti člověka od lampy). □

## 2.14. Monotonie funkce a extrémy.

**Definice 8 (Monotonie funkce).** Funkce  $f(x)$  je

- rostoucí na intervalu  $I$ , pokud  $f(x_1) < f(x_2)$  pro každé  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ,
- klesající na intervalu  $I$ , pokud  $f(x_1) > f(x_2)$  pro každé  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ,
- neklesající na intervalu  $I$ , pokud  $f(x_1) \leq f(x_2)$  pro každé  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ,
- nerostoucí na intervalu  $I$ , pokud  $f(x_1) \geq f(x_2)$  pro každé  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ .

□

**Věta 16 (Monotonie funkce).** *Nechť  $f(x)$  má vlastní derivaci na otevřeném intervalu  $I$ . Potom platí následující.*

- (i) *Funkce  $f(x)$  je neklesající na intervalu  $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in I$ .*
- (ii) *Funkce  $f(x)$  je rostoucí na intervalu  $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in I$ , přičemž rovnost  $f'(x) = 0$  neplatí na žádném podintervalu intervalu  $I$ .*
- (iii) *Funkce  $f(x)$  je nerostoucí na intervalu  $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in I$ .*
- (iv) *Funkce  $f(x)$  je klesající na intervalu  $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in I$ , přičemž rovnost  $f'(x) = 0$  neplatí na žádném podintervalu intervalu  $I$ .*

*Důkaz.* Všechna tvrzení plynou z (Lagrangeovy) věty o střední hodnotě (Věta 14), neboť

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c),$$

a tedy výraz  $f(x_2) - f(x_1)$  má stejné znaménko jako  $f'$ . □

**Příklad 66.** Funkce  $f(x) = x + \cos x$  má derivaci  $f'(x) = 1 - \sin x$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Protože je hodnota  $\sin x \in [-1, 1]$ , je  $f'(x) \in [0, 2]$  a tedy je  $f'(x) \geq 0$  na celém  $\mathbb{R}$ . Tedy podle Věty 16(i) je funkce  $f(x)$  neklesající na  $\mathbb{R}$ . Navíc, protože rovnost  $f'(x) = 0$  znamená, že  $\sin x = 1$  a tato rovnost evidentně neplatí na žádném podintervalu  $\mathbb{R}$ , je podle Věty 16(ii) funkce  $f(x)$  rostoucí na  $\mathbb{R}$ . □

**Důsledek 5.** *Nechť  $f(x)$  má vlastní derivaci na otevřeném intervalu  $I$ . Potom platí následující.*

- (i) *Jestliže  $f'(x) > 0 \forall x \in I$ , potom je funkce  $f(x)$  je rostoucí na intervalu  $I$ .*
- (ii) *Jestliže  $f'(x) < 0 \forall x \in I$ , potom je funkce  $f(x)$  je klesající na intervalu  $I$ .*

Tedy pro určení intervalů monotonie funkce  $f(x)$  stačí určit body, kdy  $f'(x)$  mění znaménko. Zejména to jsou body, ve kterých je  $f'(x) = 0$  nebo ve kterých  $f'(x)$  neexistuje.

**Příklad 67.** Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16} = \frac{x}{(x - 8)(x + 2)}.$$

*Řešení.* Vypočteme derivaci:

$$f'(x) = \left( \frac{x}{x^2 - 6x - 16} \right)' = \dots = \frac{-x^2 - 16}{(x - 8)^2 (x + 2)^2} < 0, \quad \text{pro } x \neq -2, 8.$$

(Viz tabulka.) Tedy je tato funkce klesající na intervalu  $(-\infty, -2)$ , na intervalu  $(-2, 8)$  a na intervalu  $(8, \infty)$ . □

**Příklad 68.** Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = e^{x^3-6x}.$$

*Řešení.* Vypočteme derivaci:

$$f'(x) = e^{x^3-6x} \cdot (3x^2 - 6) = 3e^{x^3-6x} \cdot (x^2 - 2), \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že  $f'(x) = 0$  pouze pro  $x = \pm\sqrt{2}$ . Na každém z intervalů  $(-\infty, -\sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(\sqrt{2}, \infty)$  určíme znaménko derivace např. výběrem nějakého bodu z tohoto intervalu, protože víme, že se znaménko  $f'(x)$  v těchto intervalech již nemění (viz tabulka). Tedy

$$\begin{aligned} f(x) \text{ je rostoucí na intervalu } (-\infty, -\sqrt{2}] \text{ a na intervalu } [\sqrt{2}, \infty), \\ f(x) \text{ je klesající na intervalu } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

□

**Definice 9 (Lokální extrémy).** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- lokální maximum, pokud  $f(x) \leq f(x_0)$  pro všechna  $x$  z nějakého okolí bodu  $x_0$ ,
- lokální minimum, pokud  $f(x) \geq f(x_0)$  pro všechna  $x$  z nějakého okolí bodu  $x_0$ ,
- ostré lokální maximum, pokud  $f(x) < f(x_0)$  pro všechna  $x$  z nějakého ryzího okolí bodu  $x_0$ ,
- ostré lokální minimum, pokud  $f(x) > f(x_0)$  pro všechna  $x$  z nějakého ryzího okolí bodu  $x_0$ .

□

Následující věta říká, že tečna v bodech lokálních extrémů (pokud tedy existuje vlastní derivace v takových bodech) musí nutně být vodorovná.

**Věta 17.** *Existuje-li vlastní derivace  $f'(x_0)$  v bodě  $x_0$ , kde má funkce  $f(x)$  lokální extrém, potom je nutně  $f'(x_0) = 0$ .*

Body, kde  $f'(x) = 0$ , se nazývají stacionární body funkce  $f(x)$ .

Opačné tvrzení k Větě 17 neplatí, tj. z  $f'(x_0) = 0$  neplyne extrém v bodě  $x_0$ . Nejjednodušším příkladem je funkce  $f(x) = x^3$ , která v počátku nemá extrém, ale je  $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$  (tj. tečna v bodě  $x_0 = 0$  je vodorovná).

**Důsledek 6.** *Funkce  $f(x)$  může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde  $f'(x)$  neexistuje.*

Zda v daném stacionárním bodě  $x_0$  nebo v bodě, kde  $f'(x_0)$  neexistuje, je nebo není lokální extrém, můžeme určit z chování znaménka  $f'(x)$  v okolí bodu  $x_0$ .

**Věta 18 (Lokální extrémy a derivace).** *Nechť  $f(x)$  je spojitá v bodě  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$  a existuje vlastní derivace  $f'(x)$  na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$ .*

(i) Má-li  $f'(x)$  v levém a pravém okolí bodu  $x_0$  opačná znaménka, potom je v bodě  $x_0$  lokální extrém. Přitom

- je-li změna  $f'(x)$   $z \ominus$  do  $\oplus$ , potom je v bodě  $x_0$  lokální minimum,
- je-li změna  $f'(x)$   $z \oplus$  do  $\ominus$ , potom je v bodě  $x_0$  lokální maximum.

(ii) Má-li  $f'(x)$  v levém a pravém okolí bodu  $x_0$  stejná znaménka, potom není v bodě  $x_0$  lokální extrém. Přitom

- má-li  $f'(x)$  v okolí bodu  $x_0$  kladné znaménko, potom je  $f(x)$  v bodě  $x_0$  rostoucí,
- má-li  $f'(x)$  v okolí bodu  $x_0$  záporné znaménko, potom je  $f(x)$  v bodě  $x_0$  klesající.

**Příklad 69.** Určete lokální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}.$$

*Řešení.* Protože

$$x \geq 0: \quad f(x) = x - 1 - \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4},$$

$$x < 0: \quad f(x) = x - 1 - \sqrt{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = 0 \quad \text{žádné řešení pro } x < 0.$$

Tedy kandidáti na lokální extrémy jsou: stacionární bod  $x = \frac{1}{4}$  a bod, kde neexistuje  $f'(x)$ , tj.  $x = 0$ .

Volbou např.  $x = -1$ ,  $x = \frac{1}{9}$  a  $x = 1$  určíme znaménko  $f'(x)$  v každém z intervalů  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{4})$  a  $(\frac{1}{4}, \infty)$  (viz tabulka). Tedy je

ostré lok. max. v $x = 0$ , ostré lok. min. v $x = \frac{1}{4}$ .
--

□

**Věta 19 (Lokální extrémy a druhá derivace).** *Nechť  $x_0$  je stacionární bod funkce  $f(x)$ , tj.  $f'(x_0) = 0$ , a nechť existuje  $f''(x_0)$ .*

(i) *Je-li  $f''(x_0) > 0$ , potom je v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum.*

(ii) *Je-li  $f''(x_0) < 0$ , potom je v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum.*

*Důkaz.* (i)  $f''(x_0) > 0$  a  $f'(x_0) = 0$  znamená, že  $f'(x)$  roste v bodě  $x_0$  z  $\ominus$  do  $\oplus$  hodnot, tedy funkce  $f(x)$  samotná klesá a pak roste. Tedy je v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum.

(ii)  $f''(x_0) < 0$  a  $f'(x_0) = 0$  znamená, že  $f'(x)$  klesá v bodě  $x_0$  z  $\oplus$  do  $\ominus$  hodnot, tedy funkce  $f(x)$  samotná roste a pak klesá. Tedy je v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum. □

**Příklad 70.** Stejně jako v Příkladu 69 je

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \Big|_{x=\frac{1}{4}} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ostré lok. min. v } x_0 = \frac{1}{4}.$$

□

**Poznámka 11.** Obecněji, je-li

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

potom

- pro  $k$  sudé je ostrý lokální extrém v bodě  $x_0$ , přičemž
  - pro  $f^{(k)}(x_0) > 0$  je v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum,
  - pro  $f^{(k)}(x_0) < 0$  je v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum,
- pro  $k$  liché není lokální extrém v bodě  $x_0$ , přičemž
  - pro  $f^{(k)}(x_0) > 0$  funkce  $f(x)$  roste v bodě  $x_0$ ,
  - pro  $f^{(k)}(x_0) < 0$  funkce  $f(x)$  klesá v bodě  $x_0$ .

Všechny tyto případy si můžete lehce ilustrovat na mocninných funkcích  $x^2, x^3, x^4, x^5$ , atd. v bodě  $x_0 = 0$ . □

**Definice 10 (Globální extrémy).** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- globální maximum na množině  $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ , pokud  $f(x) \leq f(x_0)$  pro všechna  $x \in M$ ,
- globální minimum na množině  $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ , pokud  $f(x) \geq f(x_0)$  pro všechna  $x \in M$ .

□

**Poznámka 12.**

- (i) Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.
- (ii) Globální max/min nemusí být jediný. Např. funkce  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[-1, 1]$  má globální max 1 v bodech  $x = -1$  a  $x = 1$ , kdežto globální min 0 v bodě  $x = 0$ .
- (iii) Globální max/min nemusí ani existovat (viz Poznámka 3).
- (iv) Weierstrassova věta (Věta 6) zaručuje existenci globálního max/min – za předpokladu spojitosti funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ .
- (v) Pokud víme, že globální extrémy existují, potom musí tyto globální extrémy být

ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde neexistuje  $f'(x)$ , nebo v krajních bodech

daného intervalu. Nemusíme již pak určovat, jestli jsou ve stacionárních bodech lokální extrémy či nikoliv.

□

**Poznámka 13.** Z Poznámky 12(v) plyne postup pro nalezení globálních extrémů spojitě funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  (z Weierstrassovy věty víme, že globální max/min existuje):

- Najdeme stacionární body funkce  $f(x)$  a body, kde neexistuje  $f'(x)$ .
- V těchto bodech a v krajních bodech intervalu určíme funkční hodnoty.
- Vybereme z nich max a min hodnotu.

□

**Příklad 71.** Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \quad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

*Řešení.* Protože je  $f(x)$  spojitá na intervalu  $[-1, 1]$ , globální extrémy v tomto intervalu existují. Z Příkladu 69 víme, že  $x = \frac{1}{4}$  je jediný stacionární bod a  $x = 0$  je bod, kde neexistuje  $f'(x)$ , v intervalu  $[-1, 1]$ . Máme tedy

stacionární body:	$x = \frac{1}{4},$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4},$	
$\nexists f'(x)$	$x = 0,$	$f(0) = -1,$	$\leftarrow \text{max}$
krajní body:	$x = -1,$	$f(-1) = -1 - 1 - 1 = -3,$	$\leftarrow \text{min}$
	$x = 1,$	$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1.$	$\leftarrow \text{max}$

Tedy je

globální min  $-3$  v bodě  $x = -1$ ,  
globální max  $-1$  v bodech  $x = 0, x = 1$ .

□

2.15. **Konvexnost, konkávnost, inflexe.** Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí“. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

**Definice 11 (Konvexnost, konkávnost).** Necht' má funkce  $f(x)$  vlastní derivaci na intervalu  $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ . Funkce  $f(x)$  se nazývá

- konvexní na intervalu  $I$ , pokud je  $f'(x)$  neklesající na  $I$ ,
- konkávní na intervalu  $I$ , pokud je  $f'(x)$  nerostoucí na  $I$ .

□

**Poznámka 14.** To, že funkce  $f'(x)$  je neklesající na intervalu  $I$  (tj.  $f(x)$  je konvexní), znamená, že tečny mají „neklesající směrnici“, tj. (viz obr.)

graf funkce  $f(x)$  „zatáčí doleva“ a tečny leží pod grafem.

To, že funkce  $f'(x)$  je nerostoucí na intervalu  $I$  (tj.  $f(x)$  je konkávní), znamená, že tečny mají „nerostoucí směrnici“, tj. (viz obr.)

graf funkce  $f(x)$  „zatáčí doprava“ a tečny leží nad grafem.

□

**Příklad 72.**

- (a) Funkce  $f(x) = x^2$  má derivaci  $f'(x) = 2x$ , což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na  $\mathbb{R}$ . A proto je  $x^2$  konvexní na  $\mathbb{R}$  (viz obr.).
- (b) Funkce  $f(x) = x^3$  má derivaci  $f'(x) = 3x^2$ , což je na intervalu  $[0, \infty)$  funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je  $x^3$  konvexní na  $[0, \infty)$  (viz obr.).
- (c) Funkce  $f(x) = x^3$  má derivaci  $f'(x) = 3x^2$ , což je na intervalu  $(-\infty, 0]$  funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je  $x^3$  konkávní na  $(-\infty, 0]$  (viz obr.).
- (d) Funkce  $f(x) = ax + b$  má derivaci  $f'(x) = a$ , což je funkce konstantní (tudíž neklesající) na  $\mathbb{R}$ . A proto je  $ax + b$  konvexní na  $\mathbb{R}$ . Současně je konstantní funkce  $f'(x) = a$  nerostoucí na  $\mathbb{R}$ , a proto je  $ax + b$  také konkávní na  $\mathbb{R}$ .

□

**Věta 20 (Konvexnost a konkávnost a druhá derivace).** *Nechť  $I \subseteq \mathcal{D}(f)$  je otevřený interval a nechť má funkce  $f(x)$  druhou derivaci  $f''(x)$  na  $I$ .*

- (i) *Je-li  $f''(x) > 0$  na  $I$ , potom je  $f(x)$  konvexní na intervalu  $I$ .*
- (ii) *Je-li  $f''(x) < 0$  na  $I$ , potom je  $f(x)$  konkávní na intervalu  $I$ .*

*Důkaz.* (i) Je-li  $f''(x) > 0$  na intervalu  $I$ , potom je podle Důsledku 5(i) (který aplikujeme na funkci  $f'(x)$ ) funkce  $f'(x)$  rostoucí na intervalu  $I$ . Tedy je podle Definice 11 funkce  $f(x)$  konvexní na intervalu  $I$ .

(ii) Je-li  $f''(x) < 0$  na intervalu  $I$ , potom je podle Důsledku 5(ii) (který aplikujeme na funkci  $f'(x)$ ) funkce  $f'(x)$  klesající na intervalu  $I$ . Tedy je podle Definice 11 funkce  $f(x)$  konkávní na  $I$ . □

Tam, kde se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, se nacházejí tzv. inflexní body funkce.

**Definice 12 (Inflexní bod).** *Nechť má funkce  $f(x)$  vlastní nebo nevlastní derivaci  $f'(x_0)$ . Je-li  $f'(x_0)$  nevlastní, potom navíc předpokládejme, že je  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ . Bod  $x_0$  je inflexní bod funkce  $f(x)$ , pokud v nějakém levém okolí bodu  $x_0$  je funkce  $f(x)$  konvexní a v nějakém pravém okolí bodu  $x_0$  je funkce  $f(x)$  konkávní, nebo naopak (viz obr.)* □

**Věta 21 (Vlastnosti inflexních bodů).**

- (i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace  $f''(x_0)$  v inflexním bodě  $x_0$ , potom je  $f''(x_0) = 0$ .*
- (ii) *Je-li  $f''(x_0) = 0$  a  $f''(x)$  mění znaménko v bodě  $x_0$ , potom je  $x_0$  inflexní bod.*
- (iii) *Je-li  $f''(x_0) = 0$  a  $f'''(x_0) \neq 0$ , potom je  $x_0$  inflexní bod.*

Zejména část (ii) v předchozí větě ukazuje, jak inflexní body najít. Současně ze změny znaménka  $f''(x)$  (tedy jestli se jedná o změnu z  $\ominus$  do  $\oplus$  nebo o změnu z  $\oplus$  do  $\ominus$ ) poznáme, kterým směrem graf funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  „zatáčí“.

**Příklad 73.** Určete monotonii, lokální extrémů, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \quad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

*Řešení.*

- $f'(x) = 1 + \cos x = 0$  implikuje, že  $\cos x = -1$ , tedy  $x = \pi, 3\pi$  jsou stacionární body (v intervalu  $[0, 4\pi]$ ). Body, kde neexistuje  $f'(x)$  nejsou. V každém z intervalů  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 3\pi)$  a  $(3\pi, 4\pi)$  vybereme jeden bod pro určení znaménka  $f'(x)$  v těchto intervalech (viz tabulka). Tedy

$$\begin{aligned} f(x) \text{ je rostoucí na } [0, 4\pi], \\ f(x) \text{ nemá lokální extrémů.} \end{aligned}$$

- $f''(x) = -\sin x = 0$  implikuje, že  $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$  jsou kandidáti na inflexní body. V každém z intervalů  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 3\pi)$  a  $(3\pi, 4\pi)$  vybereme jeden bod pro určení znaménka  $f''(x)$  v těchto intervalech (viz tabulka). Tedy

$$\begin{aligned} f(x) \text{ je konvexní na } [\pi, 2\pi] \text{ a na } [3\pi, 4\pi], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [0, \pi] \text{ a na } [2\pi, 3\pi], \\ f(x) \text{ má inflexi v bodech } x = \pi, 2\pi, 3\pi. \end{aligned}$$

- A protože můžeme jednoduše vypočítat funkční hodnoty a hodnoty derivace (pro sklon tečny) ve zmiňovaných stacionárních, inflexních a krajních bodech,

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f(\pi) = \pi, \quad f(2\pi) = 2\pi, \quad f(3\pi) = 3\pi, \quad f(4\pi) = 4\pi, \\ f'_+(0) = 2, \quad f'(\pi) = 0, \quad f'(2\pi) = 2, \quad f'(3\pi) = 0, \quad f'_-(4\pi) = 2, \end{aligned}$$

můžeme také načrtnout graf této funkce na intervalu  $[0, 4\pi]$  (viz obr.).

□

2.16. **Asymptoty.** Funkce  $f(x)$  může mít jako asymptotu vodorovnou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v  $\infty$  a v  $-\infty$ .

**Definice 13 (Asymptoty funkce).**

- Přímka  $x = x_0$  (svislá přímka) je asymptotou bez směrnice funkce  $f(x)$ , pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě  $x_0$  nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

- Přímka  $y = ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) je asymptotou se směrnicí v  $\infty$ , pokud

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

případně je asymptotou se směrnicí v  $-\infty$ , pokud

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

□

**Příklad 74.**

(a) Funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  má asymptotu bez směrnice  $x = 0$  a asymptotu se směrnicí  $y = 0$  (v  $\pm\infty$ ).

(b) Funkce  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  má asymptotu se směrnicí  $y = 0$  (v  $\pm\infty$ ), protože

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{\sin x}{x} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty} \right| = 0.$$

(c) Funkce  $f(x) = ax + b$  je svou vlastní asymptotou (v  $\pm\infty$ ).

□

**Poznámka 15.** Je zřejmé, že asymptoty bez směrnice mohou být pouze v bodech nespojitosti funkce  $f(x)$ . Viz např. Příklad 74(a). Samozřejmě ne každý bod nespojitosti zadává asymptotu, viz např. Příklad 74(b) a bod  $x = 0$ .

□

**Věta 22 (Asymptoty se směrnicí).** *Přímka  $y = ax + b$  je asymptotou funkce  $f(x)$  v  $\infty \Leftrightarrow$*

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]. \quad (29)$$

*Podobně, přímka  $y = ax + b$  je asymptotou funkce  $f(x)$  v  $-\infty \Leftrightarrow$*

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]. \quad (30)$$

*Důkaz.* Býti asymptotou v  $\infty$  znamená, že

$$f(x) \approx ax + b \quad \text{pro } x \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Tedy pokud obě strany podělíme výrazem  $x$ , dostaneme, že

$$\frac{f(x)}{x} \approx a + \frac{b}{x} \quad \text{pro } x \rightarrow \infty.$$

A protože výraz  $\frac{b}{x} \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow \infty$ , dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu  $a$ .

Dále, známe-li koeficient  $a$ , potom z vzorce (31) plyne, že

$$f(x) - ax \approx b \quad \text{pro } x \rightarrow \infty,$$

tj. dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu  $b$ .

Podobně to platí pro  $x \rightarrow -\infty$ .

□

**Poznámka 16.** Protože se může snadno stát, že limity v (29) a (30) se např. pro koeficient  $a$  nebo pro koeficient  $b$  liší, používáme ve výpočtu těchto koeficientů značení

$$\boxed{a_+, b_+} \text{ pro limity v } \infty \quad \text{a} \quad \boxed{a_-, b_-} \text{ pro limity v } -\infty.$$

Tedy

$$a_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a_+ \cdot x], \quad (32)$$

$$a_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_- \cdot x]. \quad (33)$$

□

Samozřejmě, pokud alespoň jedna z limit definujících koeficienty  $a$ ,  $b$  je nevlastní nebo neexistuje, tak potom daná funkce asymptotu v příslušném  $\infty$  nebo  $-\infty$  nemá.

**Příklad 75.** Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

*Řešení.*

- Asymptoty bez směrnice: Protože je funkce  $f(x)$  spojitá na intervalech  $(-\infty, -2)$  a  $(-2, \infty)$ , asymptota bez směrnice může být teoreticky pouze v bodě  $x = -2$  (viz Poznámka 15). Spočteme proto jednostranné limity v tomto bodě:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \quad \left| \text{typ } \frac{-64}{0^+} \right| = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \quad \left| \text{typ } \frac{-64}{0^+} \right| = -\infty.$$

Tedy

$$\boxed{x = -2 \text{ je asymptota bez směrnice.}}$$

- Asymptoty se směrnicí:

$$\begin{aligned} a_+ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^3}{x(x+2)^2} = \dots = 1, \\ b_+ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a_+ \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - \frac{x \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 + 8x - 8}{(x+2)^2} = -10. \end{aligned}$$

Tedy

$$\boxed{y = x - 10 \text{ je asymptota v } \infty.}$$

Výpočty pro  $a_-$  a  $b_-$  jsou naprosto stejné:

$$\begin{aligned} a_- &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)^3}{x(x+2)^2} = \dots = 1, \\ b_- &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_- \cdot x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - \frac{x \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-10x^2 + 8x - 8}{(x+2)^2} = -10. \end{aligned}$$

Tedy

$$\boxed{y = x - 10 \text{ je asymptota v } -\infty.}$$

(Viz obr.)

□

## 2.17. Celkový průběh funkce.

**Příklad 76.** Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

*Řešení.* Určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci  $f'(x)$  a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje  $f'(x)$ , intervaly monotonie (rostoucí a klesající  $f(x)$ ), lokální extrémy (pokud použijeme Větu 18 či Důsledek 5),
- druhou derivaci  $f''(x)$  a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy (pokud použijeme Větu 19),
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce  $f(x)$  a derivace  $f'(x)$  ve všech „význačných“ bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje  $f'(x)$  nebo  $f''(x)$ , v krajních bodech, atd.),
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce  $f(x)$ .

□

**Příklad 77.** Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

*Řešení.*

- Definiční obor je  $\boxed{\mathcal{D}(f) = (0, \infty)}$ .
- První derivace

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0,$$

tedy  $x = 1$  je jediný stacionární bod. Protože  $f'(x) < 0$  na intervalu  $(0, 1)$  a  $f'(x) > 0$  na intervalu  $(1, \infty)$  (viz tabulka),

$f(x)$ je klesající na $(0, 1]$ , $f(x)$ je rostoucí na $[1, \infty)$ , $f(x)$ má lokální min v bodě $x = 1$ .
--

[Vzhledem k okolnostem je zřejmé v bodě  $x = 1$  globální minimum funkce  $f(x)$  na intervalu  $(0, \infty)$ .]

- Druhá derivace

$$f''(x) = \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)' = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} = 0,$$

tedy  $x = 2$  je jediný kandidát na inflexní bod. Protože  $f''(x) > 0$  na intervalu  $(0, 2)$  a  $f''(x) < 0$  na intervalu  $(2, \infty)$  (viz tabulka),

$f(x)$  je konvexní na  $(0, 2]$ ,  
 $f(x)$  je konkávní na  $[2, \infty)$ ,  
 $f(x)$  má inflexi v bodě  $x = 2$ .

- Asymptoty bez směrnice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) \quad | \text{typ } \infty - \infty | = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty,$$

protože podle Příkladu 55(a) je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ . Tedy

$x = 0$  je asymptota bez směrnice.

Asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln x}{x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}_{=0} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right|$$

$$\stackrel{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) \quad | \text{typ } 0 + \infty | = \infty.$$

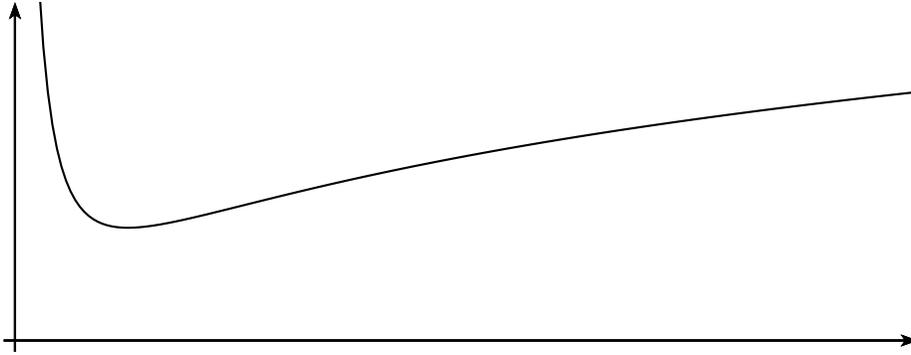
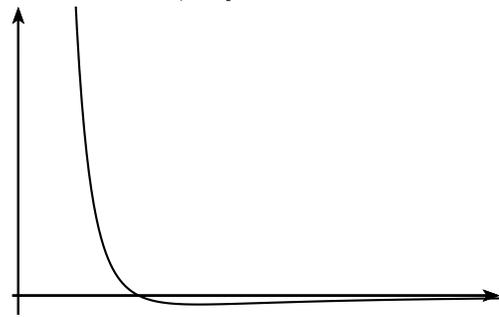
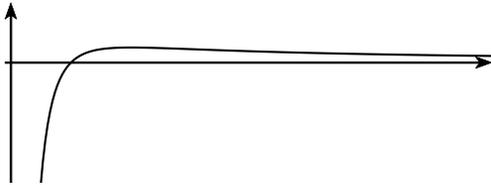
Tedy

Funkce  $f(x)$  nemá asymptotu v  $\infty$ .

- Hodnoty funkce  $f(x)$  a derivace  $f'(x)$  ve všech „význačných“ bodech:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1.19, \quad f'(2) = \frac{1}{4}.$$

- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce  $f(x)$ :

(D) Graf funkce  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  na intervalu  $(0, 8]$ .(E) Graf funkce  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  na intervalu  $(0, 8]$ . (F) Graf funkce  $f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$  na intervalu  $(0, 8]$ .

□

**2.18. Optimalizace.** V tomto odstavci uvidíme, jak využít znalostí o průběhu funkce či globálních extrémů funkce pro aplikace v „běžném životě“.

**Příklad 78 (Papírová krabice).** Z kartonu tvaru čtverce o straně délky 54 cm vyříznete v každém rohu stejný čtverec tak, abyste mohli sestrojít krabici (bez víka) s co největším objemem (viz obr.).

*Řešení.* Označme jako  $x$  (v cm) délku strany čtverců, které musíme vyříznout. Potom má zbývající podstava rozměry  $54 - 2x$  cm  $\times$   $54 - 2x$  cm, přičemž výška krabice bude právě  $x$  cm.

Pro objem krabice dostaneme proto vztah

$$V = V(x) = (54 - 2x)^2 x = (2916 - 216x + 4x^2) x = \boxed{4(729x - 54x^2 + x^3)}.$$

Délka strany vyřízlých čtverců může být nejvýše  $54/2 = 27$  cm, a proto musíme najít maximum funkce  $V(x)$  na intervalu  $[0, 27]$ .

Protože je funkce  $V(x)$  spojitá na intervalu  $[0, 27]$ , její maximum existuje (Weierstrassova věta – Věta 6). Podle Poznámky 13 musíme najít stacionární body:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4(729 - 108x + 3x^2) = 12(243 - 36x + x^2) = 12(27 - x)(9 - x) = 0, \\ &\Rightarrow x_1 = 27, \quad x_2 = 9. \end{aligned}$$

Body, kde  $V'(x)$  neexistuje, nejsou.

Body  $x_1 = 27$  a  $x_2 = 9$  jsou tedy stacionárními body funkce  $V(x)$  v intervalu  $[0, 27]$ , přičemž bod  $x_1 = 27$  je současně krajním bodem tohoto intervalu. Hodnoty funkce  $V(x)$  v těchto bodech jsou

$$\begin{array}{ll} \text{stacionární body:} & x = 27, \quad V(27) = (54 - 54)^2 27 = 0, \\ & x = 9, \quad V(9) = (54 - 18)^2 9 = 11664, \quad \leftarrow \text{max} \\ \text{krajní body:} & x = 0, \quad V(0) = 0, \\ & x = 27, \quad V(27) = 0. \end{array}$$

Tedy maximální objem je  $11664 \text{ cm}^3$  (téměř 12 litrů) pro krabici o rozměrech  $36 \text{ cm} \times 36 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$ , tj. v každém rohu musíme vyříznout čtverec o straně 9 cm.

Všimněte si, že maximum můžeme také ověřit testem s první derivací (např. Důsledek 5): pro  $x \in [0, 9)$  je  $V'(x) > 0$ , tedy  $V(x)$  je rostoucí na intervalu  $[0, 9]$ , zatímco pro  $x \in (9, 27)$  je  $V'(x) < 0$  a tedy  $V(x)$  je klesající na intervalu  $[9, 27]$ .

Všimněte si také, že funkce  $V(x)$  je konkávní na intervalu  $[0, 18]$ , konvexní na intervalu  $[18, 27]$  a v bodě  $x = 18$  má inflexní bod. □

**Příklad 79 (Výroba plechovky).** Určete rozměry litrové plechovky válcového tvaru tak, aby spotřeba materiálu na její výrobu byla co nejmenší.

*Řešení.* Označme si jako  $h$  (v cm) výšku plechovky a jako  $r$  (v cm) poloměr jejího dna (či víčka). Potom je na výrobu takové plechovky potřeba

$$S = S(h, r) = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{dno + víčko}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{stěna}} \quad \text{cm}^2 \text{ materiálu.}$$

Protože ale musí mít plechovka objem 1 litr =  $1000 \text{ cm}^3$ , musí platit

$$V = \pi r^2 h = 1000 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1000}{\pi r^2},$$

a tedy je

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = \boxed{2\pi r^2 + \frac{2000}{r}}, \quad \text{pro } r > 0.$$

Hledáme tedy minimum funkce  $S(r)$  pro  $r \in (0, \infty)$ . Všimněte si, že daný interval není uzavřený ani ohraničený, a proto pro existenci extrému nelze použít Weierstrassovu větu (Věta 6).

Určeme nejdříve stacionární body:

$$\begin{aligned} S'(r) &= (2\pi r^2 + 2000 r^{-1})' = 4\pi r - 2000 r^{-2} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0, \\ \Rightarrow \quad \pi r^3 &= 500, \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = r_0 := \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}} \approx 5.42. \end{aligned}$$

Dále, protože je

$$S''(x) = (4\pi r - 2000 r^{-2})' = 4\pi + 4000 r^{-3} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \quad \text{pro } r > 0,$$

je funkce  $S(r)$  konvexní na celém intervalu  $(0, \infty)$ . A proto je bod  $r_0$  globální minimum.

Odpovídající výška plechovky je pak

$$h_0 = \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2 \frac{\frac{500}{\pi}}{\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2 \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = \boxed{2r_0} \approx 10.84.$$

Spotřeba materiálu je tedy minimální, pokud

$$\boxed{\text{výška plechovky je rovna průměru podstavy}}.$$

□

**2.19. Diferenciál funkce.** Diferenciál funkce je pojem, který se pro funkce jedné proměnné využívá pouze pro potřeby integrování (viz následující kapitola) nebo pro přibližné výpočty. Pro funkce více proměnných má mnohem větší význam (viz MB103).

**Definice 14 (Diferenciál).** Necht'  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$  je bod, ve kterém existuje vlastní derivace  $f'(x_0)$  funkce  $y = f(x)$ . Potom definujeme

- diferenciál  $dx$  (diferenciál nezávislé proměnné) jako  $\boxed{dx = x - x_0}$  (pro  $x$  blízko  $x_0$ ),
- diferenciál  $dy$  (diferenciál závislé proměnné) jako  $\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$ .

Alternativní značení pro  $dy$  je  $df$ , případně  $df(x_0)$  pokud chceme zdůraznit, že se jedná o diferenciál v bodě  $x_0$ . □

Uvědomte si, že pokud je  $x$  napravo od  $x_0$ , je  $dx = x - x_0 > 0$ , pokud je ale  $x$  nalevo od  $x_0$ , je  $dx = x - x_0 < 0$ .

**Příklad 80.**

$$\begin{aligned} y = \sin x, & & dy = (\sin x)' \cdot dx = (\cos x) dx, \\ y = -x + x \ln x, & & dy = (-x + x \ln x)' \cdot dx = (\ln x) dx. \end{aligned}$$

□

Co to vlastně ten diferenciál je (nepletěte si s diferenciálem v automobilu)?

Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě  $x_0$  (viz Poznámka 5), potom máme

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), & \text{kde } y_0 &= f(x_0), \\ y - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0) dx}_{dy} = df(x_0). \end{aligned} \quad (34)$$

Vidíme tedy, že diferenciál  $dy$  je změna funkčních hodnot na tečně (viz obr.). A protože hodnoty na tečně aproximují funkční hodnoty  $f(x)$  pro  $x$  blízko bodu  $x_0$ , plyne z (34) vzoreček pro přibližné výpočty:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)}, \quad \text{tj.} \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (35)$$

(Jedná se vlastně o rovnici tečny zapsanou trošku jiným způsobem). Tedy hodnoty funkce  $f(x)$  pro  $x$  „blízko“ bodu  $x_0$  se přibližně rovnají hodnotám na tečně v bodě  $x_0$ , přičemž pro tento výpočet musíme znát hodnotu funkce  $f(x_0)$  a derivace  $f'(x_0)$  v bodě  $x_0$ .

Diferenciál je tedy přibližná změna funkčních hodnot pro  $x$  blízko  $x_0$ .

**Příklad 81.** Pomocí diferenciálu přibližně vypočtete  $\sqrt{85}$ .

*Řešení.* Protože známe  $\sqrt{81} = 9$ , položíme  $x_0 = 81$  a  $x = 85$ , tj.  $dx = x - x_0 = 4$ . Tedy pro  $f(x) = \sqrt{x}$  potom je  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , a tedy  $f(81) = 9$  a  $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$ . Ze vzorce (35) potom plyne, že

$$f(85) \approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81) dx, \quad \text{tj.}$$

$$\sqrt{85} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222 \dots$$

(Pro srovnání je přesná hodnota  $\sqrt{85} = 9.2195 \dots$ ) □

**Příklad 82.** Poloměr kruhu se mění z 20 m na 20,1 m. Odhadněte nárůst jeho plochy.

*Řešení.* Obsah kruhu je  $P = P(r) = \pi r^2$ . Položíme  $r_0 = 20$ ,  $r = 20.1$ , a pak  $dr = r - r_0 = 20.1 - 20 = 0.1$ . Protože je  $P(r_0) = P(20) = 400\pi$  a  $P'(r_0) = P'(20) = 2\pi r|_{r=20} = 40\pi$ , je podle vzorce (35)

$$P(r) \approx P(r_0) + P'(r_0) dr = 400\pi + 40\pi \cdot (0.1) = 404\pi. \quad \Rightarrow \quad \boxed{dP(r_0) = 4\pi} \approx P(r) - P(r_0).$$

Odhad nárůstu plochy je asi  $4\pi \text{ m}^2$ .

Přibližný procentuální nárůst plochy (vzhledem k původní ploše) je pak

$$\frac{dP(r_0)}{P(r_0)} = \frac{4\pi}{400\pi} = \frac{1}{100} = 1\%.$$

Tedy plocha vzroste přibližně o 1%. □

**2.20. Taylorův polynom.** Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.

**Definice 15 (Taylorův polynom).** Nechť  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$  je bod, ve kterém existují vlastní derivace  $f'(x_0)$ ,  $f''(x_0)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(x_0)$  funkce  $f(x)$  až do řádu  $n$ . Taylorův polynom stupně  $n$  funkce  $f(x)$  se středem v bodě  $x_0$  je polynom

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

přičemž pro  $k = 0$  klademe  $0! := 1$  a  $f^{(0)}(x) := f(x)$ . □

**Poznámka 17.**

(i) Taylorův polynom stupně  $n = 0$  se středem v bodě  $x_0$  je tedy polynom

$$T_0(x) = f(x_0),$$

tedy jedná se o konstantní funkci.

(ii) Taylorův polynom stupně  $n = 1$  se středem v bodě  $x_0$  je tedy polynom

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vidíme tedy, že tento polynom je přesně rovnice tečny (viz Poznámka 5) nebo také vyjadřuje aproximaci funkce  $f(x)$  pomocí diferenciálu (viz vzorec (35)).

□

**Příklad 83.** Určete Taylorův polynom stupně  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci

$$\boxed{f(x) = \sin x}.$$

*Řešení.* Pro funkci  $f(x) = \sin x$  máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, & f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x), & f^{(5)}(x) &= \cos x = f'(x), & f^{(6)}(x) &= -\sin x = f''(x). \end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě  $x_0 = 0$  tedy jsou

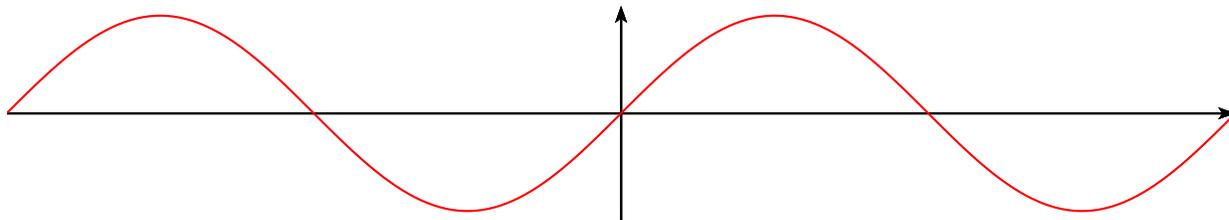
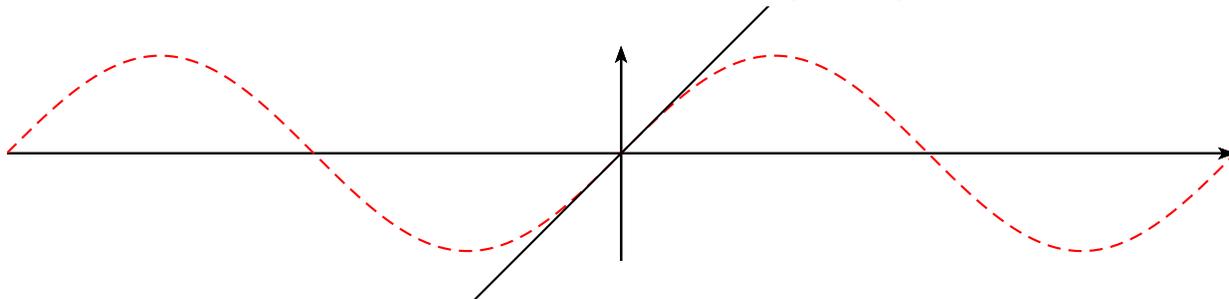
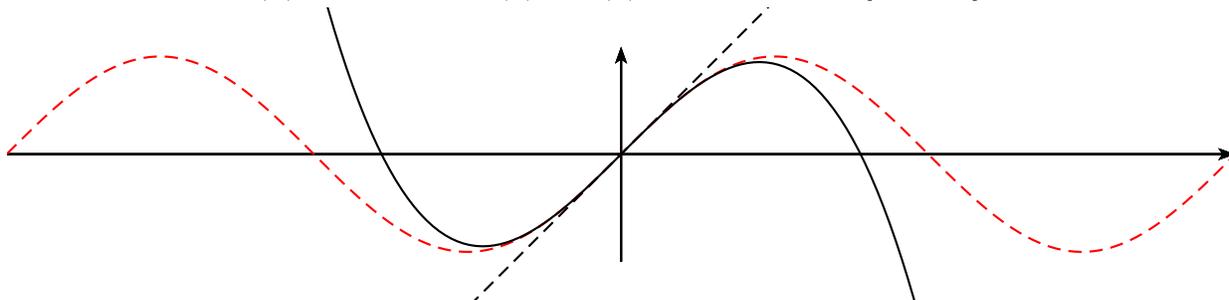
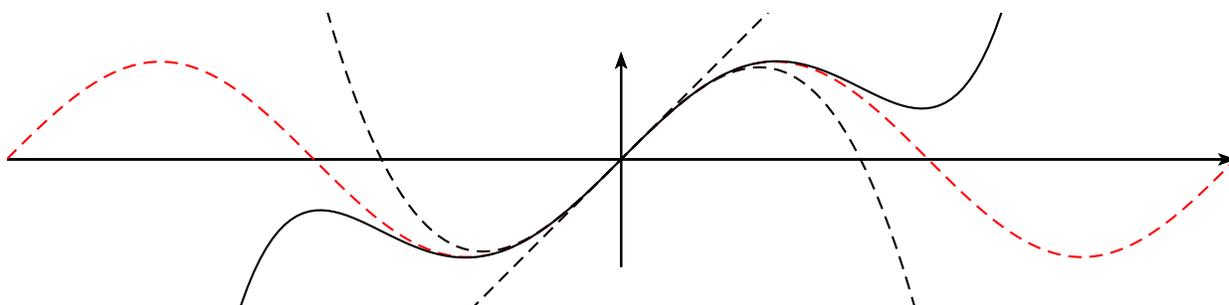
$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(0) &= 0 = f(0), & f^{(5)}(0) &= 1 = f'(0), & f^{(6)}(0) &= 0 = f''(0). \end{aligned}$$

Všimněte si, že všechny derivace sudého řádu jsou v bodě  $x_0 = 0$  rovny 0, a tedy sudé mocniny  $x$  se ve výsledných polynomech nebudou vyskytovat.

Příslušné Taylorovy polynomy  $T_n(x)$  stupňů  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  jsou tedy

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(0) = 0, \\ T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)x = x, \\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x, \\ T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3, \\ T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x - \frac{1}{6}x^3, \\ T_5(x) &= T_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \\ T_6(x) &= T_5(x) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5. \end{aligned}$$

Aproximace funkce  $\sin x$  pomocí těchto polynomů:

(G) Graf funkce  $\sin(x)$  na intervalu  $[-2\pi, 2\pi]$ .(H) Graf funkcí  $\sin(x)$  a  $T_1(x) = x$  na intervalu  $[-2\pi, 2\pi]$ .(I) Graf funkcí  $\sin(x)$ ,  $T_1(x) = x$  a  $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$  na intervalu  $[-2\pi, 2\pi]$ .(A) Graf funkcí  $\sin(x)$ ,  $T_1(x) = x$ ,  $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$  a  $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$  na intervalu  $[-2\pi, 2\pi]$ .OBRÁZEK 1. Ilustrace aproximace funkce  $\sin x$  pomocí Taylorových polynomů.

□

**Příklad 84.** Určete Taylorův polynom stupně  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci

$$\boxed{f(x) = \cos x}.$$

*Řešení.* Pro funkci  $f(x) = \cos x$  máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x, & f''(x) &= -\cos x, & f'''(x) &= \sin x, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x = f(x), & f^{(5)}(x) &= -\sin x = f'(x), & f^{(6)}(x) &= -\cos x = f''(x). \end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě  $x_0 = 0$  tedy jsou

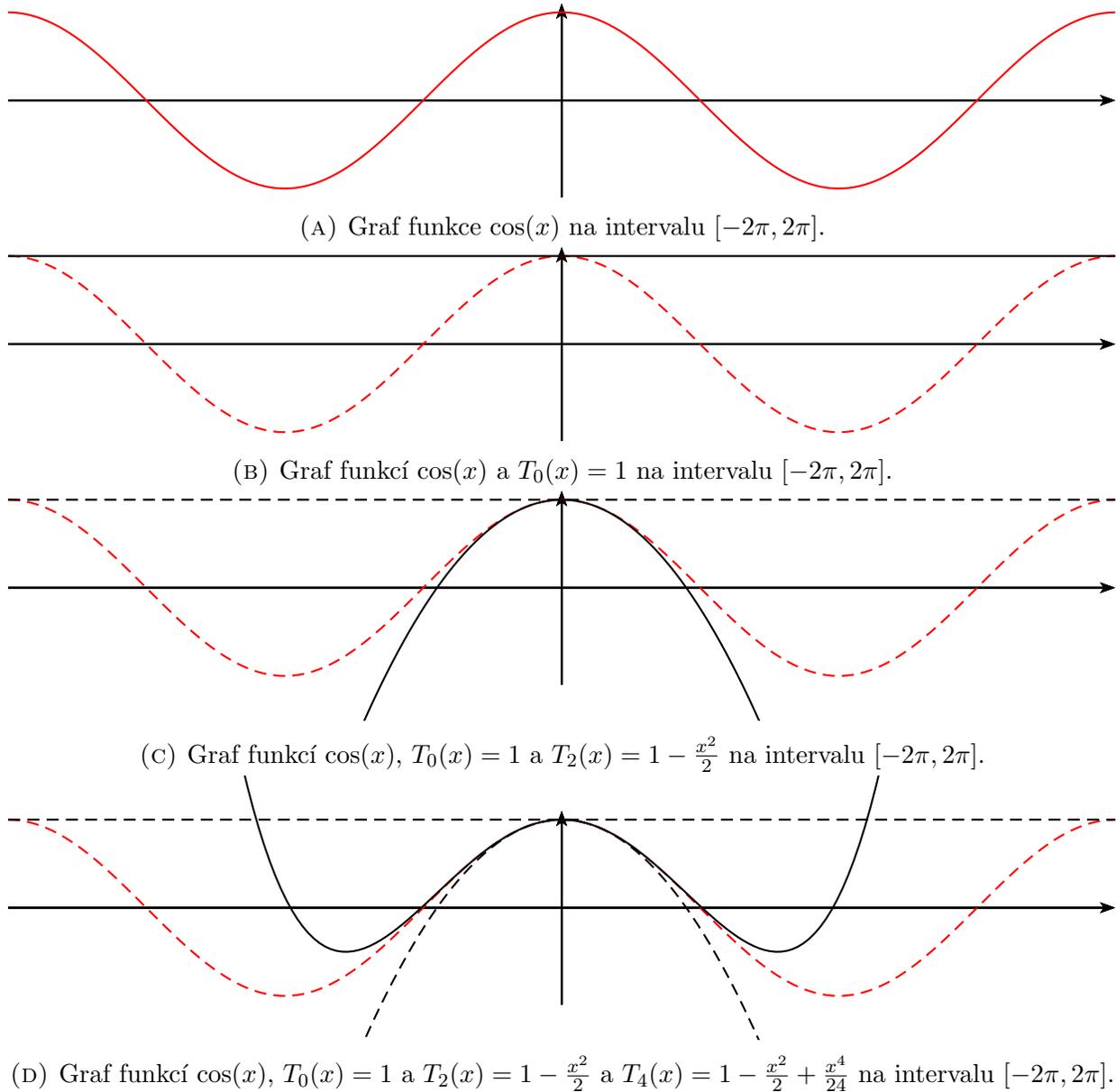
$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & f'(0) &= 0, & f''(0) &= -1, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(0) &= 1 = f(0), & f^{(5)}(0) &= 0 = f'(0), & f^{(6)}(0) &= -1 = f''(0). \end{aligned}$$

Všimněte si, že všechny derivace lichého řádu jsou v bodě  $x_0 = 0$  rovny 0, a tedy liché mocniny  $x$  se ve výsledných polynomech nebudou vyskytovat.

Příslušné Taylorovy polynomy  $T_n(x)$  stupňů  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  jsou tedy

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(0) = 1, \\ T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)x = 1, \\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2, \\ T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - \frac{1}{2}x^2, \\ T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \\ T_5(x) &= T_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \\ T_6(x) &= T_5(x) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6. \end{aligned}$$

Aproximace funkce  $\cos x$  pomocí těchto polynomů:



OBRÁZEK 2. Ilustrace aproximace funkce  $\cos x$  pomocí Taylorových polynomů.

□

**Příklad 85.** Určete Taylorův polynom stupně  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci

$$f(x) = e^x.$$

*Řešení.* Pro funkci  $f(x) = e^x$  máme

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = e^x.$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě  $x_0 = 0$  tedy jsou všechny rovny  $e^0 = 1$ .

Příslušné Taylorovy polynomy  $T_n(x)$  stupňů  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  jsou tedy

$$T_0(x) = f(0) = 1,$$

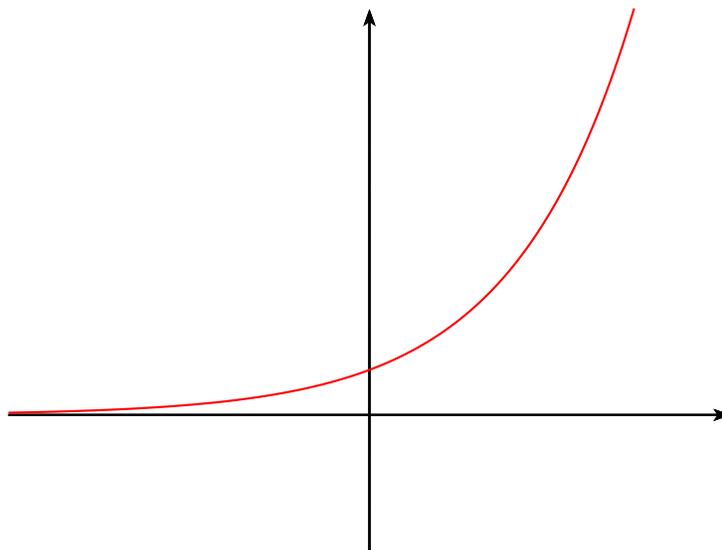
$$T_1(x) = T_0(x) + f'(0)x = 1 + x,$$

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

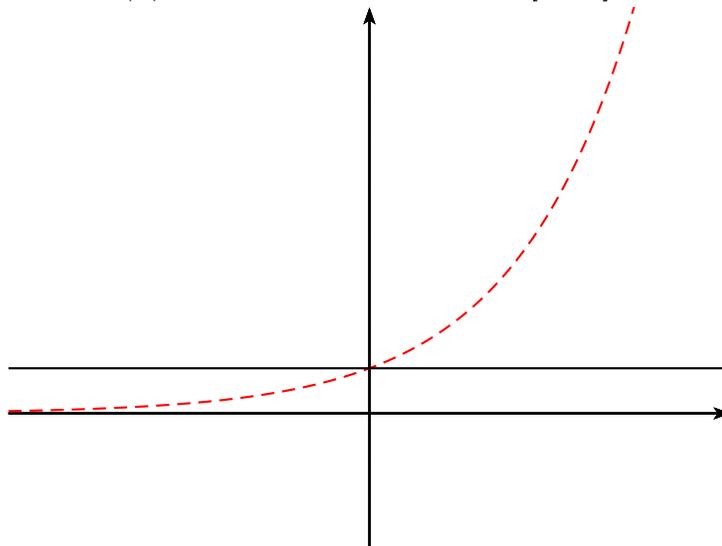
$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3,$$

$$T_4(x) = T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

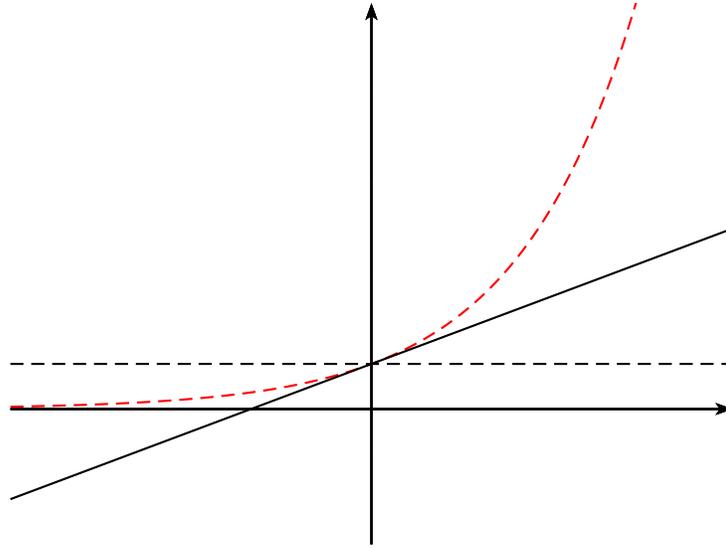
Aproximace funkce  $e^x$  pomocí těchto polynomů:



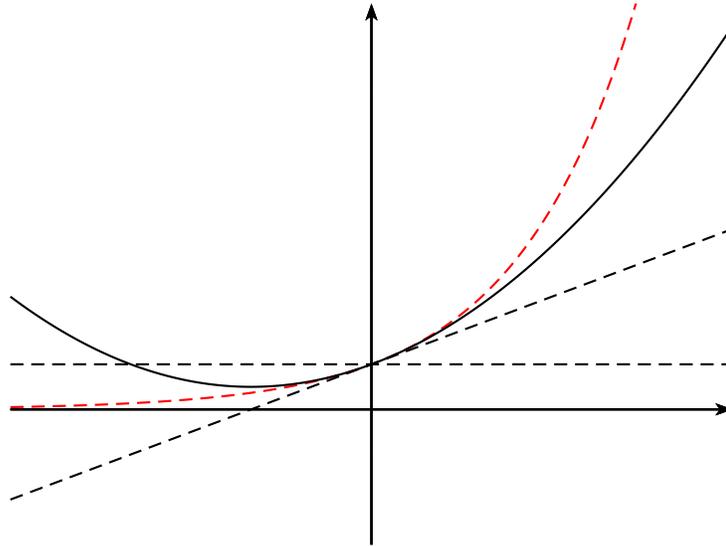
(A) Graf funkce  $e^x$  na intervalu  $[-3, 3]$ .



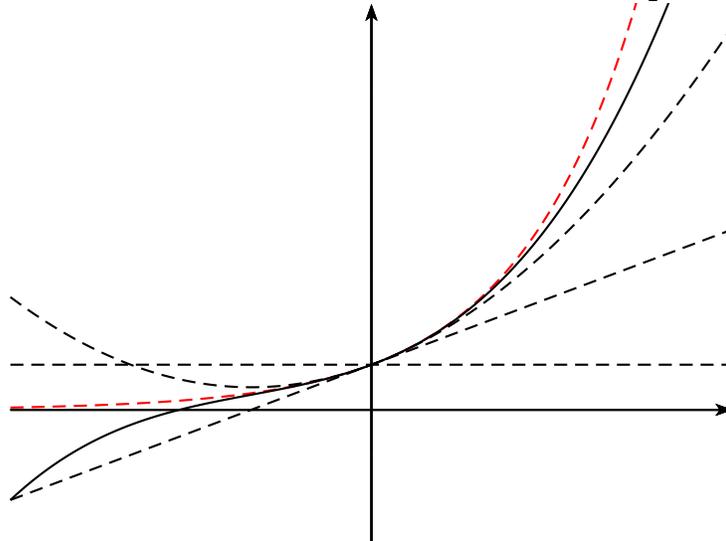
(B) Graf funkcí  $e^x$  a  $T_0(x) = 1$  na intervalu  $[-3, 3]$ .



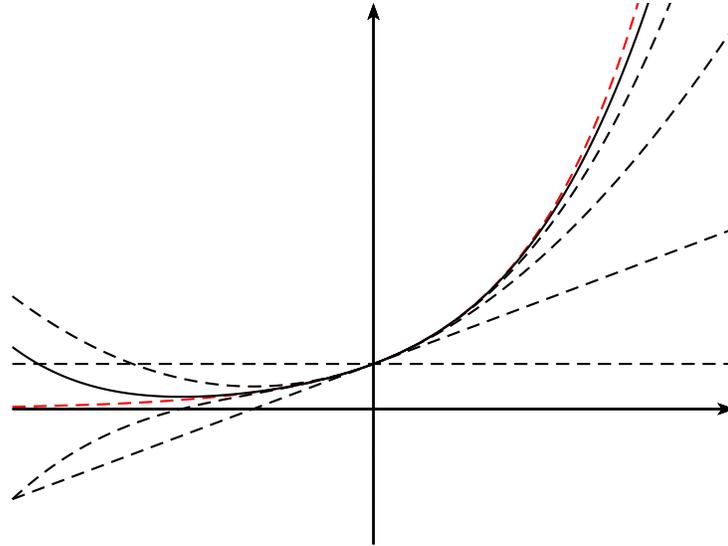
(A) Graf funkcí  $e^x$ ,  $T_0(x) = 1$  a  $T_1(x) = 1 + x$  na intervalu  $[-3, 3]$ .



(B) Graf funkcí  $e^x$ ,  $T_0(x) = 1$  a  $T_1(x) = 1 + x$  a  $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$  na intervalu  $[-3, 3]$ .



(C) Graf funkcí  $e^x$ ,  $T_0(x) = 1$  a  $T_1(x) = 1 + x$ ,  $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$  a  $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  na intervalu  $[-3, 3]$ .



(A) Graf funkcí  $e^x$ ,  $T_0(x) = 1$  a  $T_1(x) = 1 + x$ ,  $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ,  $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  a  $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$  na intervalu  $[-3, 3]$ .

OBRÁZEK 1. Ilustrace aproximace funkce  $e^x$  pomocí Taylorových polynomů.

□

**Příklad 86.** Určete Taylorův polynom stupně  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

*Řešení.* Pro funkci  $f(x) = \ln(1 + x)$  máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + x)^{-1} = \frac{1}{1 + x}, & f''(x) &= (-1)(1 + x)^{-2} = \frac{-1}{(1 + x)^2}, \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(1 + x)^{-3} = \frac{2}{(1 + x)^3}, & f^{(4)}(x) &= 2(-3)(1 + x)^{-4} = \frac{-6}{(1 + x)^4}. \end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě  $x_0 = 0$  tedy jsou

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

Príslušné Taylorovy polynomy  $T_n(x)$  stupňů  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  jsou tedy

$$T_0(x) = f(0) = 0,$$

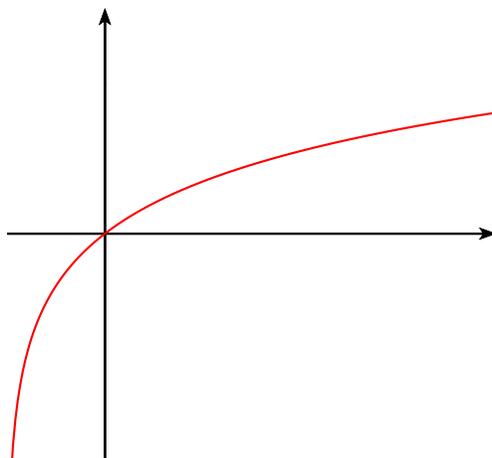
$$T_1(x) = T_0(x) + f'(0)x = x,$$

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x - \frac{1}{2}x^2,$$

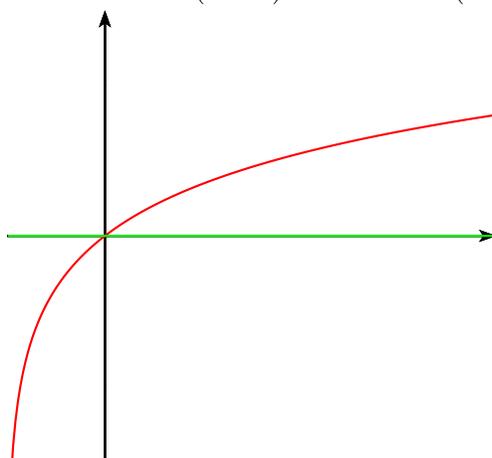
$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

$$T_4(x) = T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

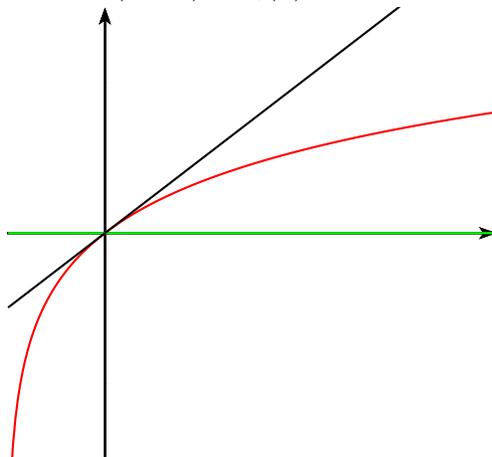
Aproximace funkce  $\ln(1 + x)$  pomocí těchto polynomů:



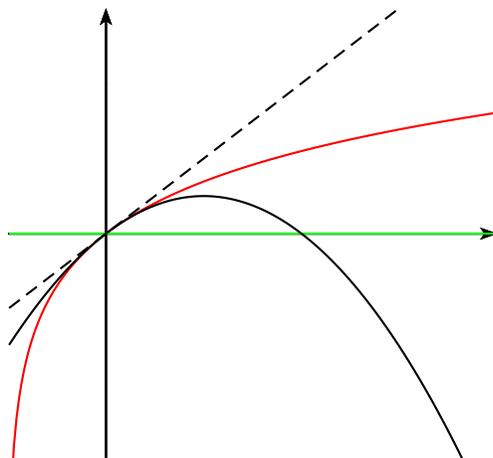
(A) Graf funkce  $\ln(x+1)$  na intervalu  $(-1, 4]$ .



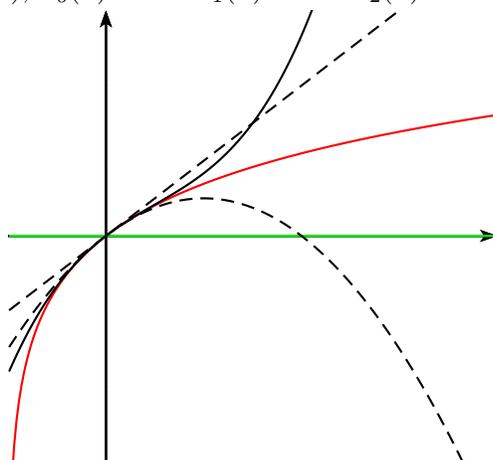
(B) Graf funkcí  $\ln(1+x)$  a  $T_0(x) = 0$  na intervalu  $(-1, 4]$ .



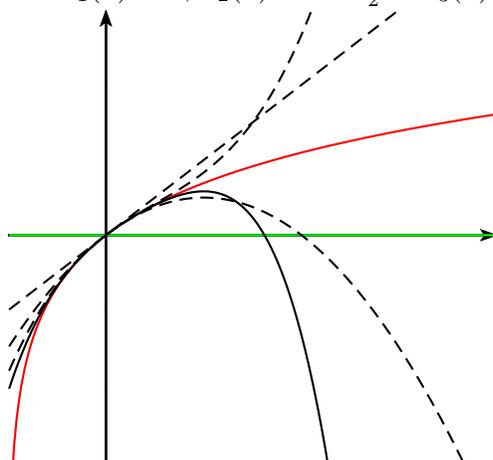
(C) Graf funkcí  $\ln(1+x)$ ,  $T_0(x) = 0$  a  $T_1(x) = x$  na intervalu  $(-1, 4]$ .



(A) Graf funkcí  $\ln(1+x)$ ,  $T_0(x) = 0$  a  $T_1(x) = x$  a  $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$  na intervalu  $(-1, 4]$ .



(B) Graf funkcí  $\ln(1+x)$ ,  $T_0(x) = 0$  a  $T_1(x) = x$ ,  $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$  a  $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  na intervalu  $(-1, 4]$ .



(C) Graf funkcí  $\ln(1+x)$ ,  $T_0(x) = 0$  a  $T_1(x) = x$ ,  $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ ,  $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  a  $T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$  na intervalu  $(-1, 4]$ .

OBRÁZEK 1. Ilustrace aproximace funkce  $\ln(x+1)$  pomocí Taylorových polynomů.

□

Vidíme tedy, že funkce  $f(x)$  je aproximována Taylorovým polynomem. Můžeme se ovšem ptát, jak vypadá přesné vyjádření funkce  $f(x)$  pomocí Taylorova polynomu. Potom nutně musíme zahrnout do výpočtu výraz pro chybu aproximace – a dostaneme tzv. Taylorův rozvoj se zbytkem.

**Věta 23 (Taylorův rozvoj se zbytkem).** *Nechť  $f(x)$  má spojité derivace  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$  a nechť existuje vlastní derivace  $f^{(n+1)}(x)$  na otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Potom pro každý bod  $x \in (a, b)$  existuje bod  $c \in (a, x)$  tak, že platí rovnost*

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)}, \quad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (36)$$

kde  $T_n(x)$  je Taylorův polynom stupně  $n$  funkce  $f(x)$  se středem v bodě  $a$ .

*Důkaz.* Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě (Věta 13). Podrobnosti jsou ve skriptech [8, str. 330-331].  $\square$

Výraz  $R_n(x)$  ve vzorci (36) se nazývá Taylorův zbytek (se středem v bodě  $x_0$ ) a vyjadřuje chybu aproximace Taylorovým polynomem  $T_n(x)$ . O odhadu velikosti  $R_n(x)$  (a tudíž velikosti chyby aproximace Taylorovým polynomem) je celá matematická teorie.

**Příklad 87.** Pro funkci  $f(x) = e^x$  a Taylorův polynom  $T_n(x)$  se středem v bodě 0 (viz Příklad 85) je zřejmě pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{kde } c \text{ leží mezi } 0 \text{ a } x.$$

Všimněte si, že pro  $x > 0$  je vždy  $e^c < e^x$  (neboť  $c \in (0, x)$  a exponenciální funkce je rostoucí), a tedy platí odhad

$$R_n(x) \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x > 0,$$

zatímco pro  $x < 0$  je vždy  $e^c < 1$  (neboť v tomto případě je  $c \in (x, 0)$ ), a tedy platí odhad

$$R_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad x < 0.$$

V obou dvou případech (jak pro  $x > 0$  tak pro  $x < 0$ ) ale vidíme, že pro pevně zvolené  $x$  se bude s rostoucím  $n$  výraz  $R_n(x)$  blížit k nule, protože lze ukázat, že pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

$\square$

**Poznámka 18.** S rostoucím  $n$  se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro  $n \rightarrow \infty$  dostáváme v polynomu  $T_n(x)$  k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. nekonečné řadě. Více o tomto tématu probereme v Odstavci 4.5.  $\square$

**Příklad 88.** Odhadněte chybu v bodě  $x = \frac{\pi}{4}$  Taylorova polynomu stupně  $n = 6$  funkce  $f(x) = \cos x$  se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení.* Z Příkladu 84 víme, že příslušný Taylorův polynom je

$$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6,$$

přičemž  $f^{(6)}(x) = -\cos x$ .

Pro zbytek  $R_6(x)$  pak podle vzorce (36) platí, že

$$R_6(x) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}x^7 = \frac{\sin c}{7!}x^7,$$

kde číslo  $c$  leží mezi 0 a  $x$ . A protože pro libovolné  $c \in \mathbb{R}$  platí  $|\sin c| \leq 1$ , potom pro  $x = \frac{\pi}{4}$  máme

$$\left| R_6\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \approx 0.0000366.$$

□

## 3. INTEGRÁLNÍ POČET

Integrální počet se zabývá studiem funkcí a jejich aplikací, pokud známe hodnotu derivace.

**3.1. Primitivní funkce.** Základní otázkou tohoto odstavce je následující: Známe-li funkci  $f(x)$ , jak lze najít (pokud vůbec existuje) funkci  $F(x)$  tak, že  $F'(x) = f(x)$ ?

**Příklad 89.** Pro jakou funkci  $F(x)$  platí, že  $F'(x) = f(x)$ , kde

$$(a) \quad f(x) = x^2, \quad (b) \quad f(x) = \cos x.$$

*Řešení.*

(a)

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \frac{x^3}{3} + 1, \quad \frac{x^3}{3} - \pi, \quad \text{neboť} \quad F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x),$$

či nejobecněji

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

(b)

$$F(x) = \sin x, \quad \sin x + 1, \quad \sin x - \pi, \quad \text{neboť} \quad F'(x) = \cos x + 0 = \cos x = f(x),$$

či nejobecněji

$$F(x) = \sin x + C, \quad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

□

**Definice 16 (Primitivní funkce).** Necht  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I. \quad (37)$$

□

**Příklad 90.** Z pravidel pro derivování elementárních funkcí (viz Odstavec 2.9) snadno dostáváme následující „tvrzení“.

(a) Funkce  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  je primitivní k funkci  $x^n$  na  $\mathbb{R}$ .

(b) Funkce  $\ln x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(0, \infty)$ . Funkce  $\ln(-x)$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(-\infty, 0)$ . Dohromady zapsáno: Funkce  $\ln|x|$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$ .

(c) Funkce  $\operatorname{arctg} x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{1+x^2}$  na  $\mathbb{R}$ .

(d) Funkce  $\arcsin x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  na  $(-1, 1)$ .

(e) Funkce  $C$  (konstantní funkce) je primitivní k funkci  $0$  na  $\mathbb{R}$ .

□

Kdy k dané funkci  $f(x)$  existuje primitivní funkce  $F(x)$ ? Ne vždy!

**Věta 24 (O existenci primitivní funkce).** *Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $I$ , potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

*Důkaz.* Uvedeme později, viz Poznámka 28(ii) v Odstavci 3.4. □

**Poznámka 19.**

- (i) Věta 24 udává postačující podmínku pro existenci primitivní funkce. Spojitost není nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce. Např. funkce

$$f(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

není spojitá v bodě  $x = 0$ , protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}} \right) \quad \text{neexistuje.}$$

Na druhé straně, funkce

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases} \quad (38)$$

je primitivní k  $f(x)$  na celém  $\mathbb{R}$ , neboť pro  $x \neq 0$  je

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x),$$

a pro  $x = 0$  je

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

- (ii) Je-li  $F(x)$  primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , potom je  $F(x) + C$  také primitivní k  $f(x)$  na intervalu  $I$  pro libovolnou konstantu  $C \in \mathbb{R}$ .
- (iii) Jsou-li  $F(x)$  a  $G(x)$  primitivní k funkci  $f(x)$  na  $I$ , potom existuje konstanta  $C \in \mathbb{R}$  tak, že  $F(x) = G(x) + C$  pro všechna  $x \in I$  (tedy funkce  $F(x)$  a  $G(x)$  se liší o konstantu na celém intervalu  $I$ ).
- (iv) Důsledkem částí (ii) a (iii) je, že je-li  $F(x)$  primitivní k  $f(x)$  na intervalu  $I$ , potom

$$\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech primitivních funkcí k  $f(x)$  na intervalu  $I$ . Tuto množinu budeme nazývat neurčitý integrál. □

**Příklad 91.** Protože mají funkce  $F(x) = \operatorname{arctg} x$  a  $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$  stejnou derivaci  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  (viz Tvzení 4), musí se tyto funkce lišit o konstantu, tj.

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Konstantu  $C$  můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě  $x = 0$ ,

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2},$$

neboli platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

**Definice 17 (Neurčitý integrál).** Množina všech primitivních funkcí k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$  se nazývá neurčitý integrál z funkce  $f(x)$  na intervalu  $I$ . Tuto množinu budeme značit (zkráceně) jako

$$\int f(x) dx := \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\} = F(x) + C,$$

tedy symbol množiny  $\{ \}$  budeme (kvůli stručnosti) vynechávat. □

**Příklad 92.** Z pravidel pro derivování elementárních funkcí (Odstavec 2.9, viz také Příklad 90) snadno dostáváme následující.

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C, \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)| + C. \end{aligned} \tag{39}$$

Ve vzorci (39) si všimněte, že na pravé straně je v logaritmu absolutní hodnota, neboť pro  $x > 0$  je  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  a pro  $x < 0$  je  $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ . □

### 3.2. Základní integrační metody.

#### Věta 25 (Pravidla pro neurčitý integrál).

(i) Pravidlo konstantního násobku:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Neboli, je-li  $F(x)$  primitivní k  $f(x)$ , potom je  $c \cdot F(x)$  primitivní k  $c \cdot f(x)$ .

(ii) Pravidlo součtu a rozdílu:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Neboli, je-li  $F(x)$  primitivní k  $f(x)$  a je-li  $G(x)$  primitivní k  $g(x)$ , potom je  $F(x) \pm G(x)$  primitivní k  $f(x) \pm g(x)$ .

Důkaz. Obě pravidla jsou jednoduchým důsledkem příslušného pravidla pro derivace (viz Věta 10):

$$[c \cdot F(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$$

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

□

#### Příklad 93.

(a)

$$\int (x^3 - 3x^2 + 5) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C,$$

(b)

$$\int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^6 \right) dx = \int \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + 2x^6 \right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 2 \frac{x^7}{7} + C,$$

(c)

$$\int \left( 2^x - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 2 \ln |x| + C,$$

(d)

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{x^2+1} \right) dx &= 2 \arcsin x + 5 \operatorname{arctg} x + C, \\ &= -2 \arccos x - 5 \operatorname{arccotg} x + C. \end{aligned}$$

□

Další integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z „jednoduššího“ součinu (viz příklady dále).

**Věta 26 (Metoda per-partes pro neurčitý integrál).** *Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají derivaci na intervalu  $I$ . Potom platí*

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx.$$

*Důkaz.* Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu (viz Věta 10(iii)) a pravidla pro integrál součtu (viz Věta 25(ii)):

$$[uv]' = u'v + uv', \quad \Rightarrow \quad \int [uv]' = \int (u'v + uv') \quad \Rightarrow \quad uv + C = \int u'v + \int uv'.$$

□

Príslušné výpočty pro metodu per partes budeme stejně jako u typu limity psát ve výpočtu mezi dvě svislé čáry, viz následující příklad.

#### Příklad 94.

(a)

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx & \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ & = x \sin x - (-\cos x) + C = \boxed{x \sin x + \cos x + C}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx & \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ & = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx & = \int 1 \cdot \ln x \, dx \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| \\ & = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = \boxed{x \ln x - x + C}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{\text{označme jako } I} & \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| \\ & = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right| \\ & = e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right\} \\ & = e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{=I} \end{aligned}$$

Tedy pro neznámý integrál  $I$  dostáváme rovnici

$$I = e^x (\sin x - \cos x) - I \quad \Rightarrow \quad 2I = e^x (\sin x - \cos x) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x),$$

a proto je

$$\int e^x \sin x \, dx = \boxed{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C}.$$

Ve všech příkladech ověřte, že zpětným derivováním výsledku dostanete příslušnou funkci v integrálu.  $\square$

**Poznámka 20.**

(i) Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax} \, dx, \quad \int x^n \cos(ax) \, dx, \quad \int x^n \sin(ax) \, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax) \, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax) \, dx, \quad \int x^a \ln^n x \, dx.$$

(ii) Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál (viz Příklad 94(d)), např.

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx) \, dx.$$

(iii) Metoda per-partes vede někdy na rekurentní formuli pro neznámý integrál (viz následující Příklad 95).  $\square$

**Příklad 95.** Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx.$$

*Řešení.* Zřejmě je

$$K_0(x) = \int 1 \, dx = \boxed{x + C},$$

$$K_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \boxed{\operatorname{arctg} x + C}.$$

Neznámý integrál  $K_n$  (pro  $n \geq 2$ ) vypočítáme metodou per-partes:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \int 1 \cdot (x^2 + 1)^{-n} \, dx \quad \left| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = (x^2 + 1)^{-n} \\ u = x \\ v' = -n(x^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2x \end{array} \right| \\ &= x(x^2 + 1)^{-n} - \int x \cdot (-n)(x^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2x \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \left( \frac{1}{(x^2 + 1)^n} - \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \right) \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n [K_n(x) - K_{n+1}(x)] = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n K_n(x) - 2n K_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Tedy platí vztah

$$2n K_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n - 1) K_n(x) \Rightarrow \boxed{K_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n - 1}{2n} \cdot K_n(x)}.$$

Např. volbou  $n = 1$  vypočítáme integrál  $K_2(x)$ :

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = K_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot K_1(x) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctg x + C}.$$

□

Další dvě integrační metody (Věta 27 a Věta 28) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce (Věta 11).

**Věta 27 (Substituce pro neurčitý integrál).** *Nechť je funkce  $f(t)$  definovaná na intervalu  $I$  a nechť  $\varphi(x)$  je definovaná na intervalu  $J$  a  $\varphi(J) \subseteq I$ . Je-li funkce  $F(t)$  primitivní k funkci  $f(t)$  na intervalu  $I$ , potom je funkce  $(F \circ \varphi)(x)$  primitivní k funkci  $[(f \circ \varphi)(x)] \cdot \varphi'(x)$  na intervalu  $J$ , tj.*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad \left[ = F(t) = F(\varphi(x)) \right].$$

Neboli v daném integrálu volíme substituci  $\boxed{t = \varphi(x)}$ .

*Důkaz.* Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci složené funkce (viz Věta 11):

$$[F(\varphi(x))] = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \Rightarrow \underbrace{\int [F(\varphi(x))] dx}_{= F(\varphi(x))} = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

□

Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

### Příklad 96.

(a)

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C = \boxed{-\frac{1}{x^2 + 1} + C}$$

(b)

$$\int x^2 \cos x^3 dx \quad \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \boxed{\frac{1}{3} \sin x^3 + C}.$$

□

### Poznámka 21.

(i) Ve výpočtu pomocí substituční metody se používá vzoreček pro diferenciál (viz Definice 14), neboli

$$t = \varphi(x) \Rightarrow \boxed{dt = \varphi'(x) dx}.$$

(ii) Substituce uvedená ve Větě 27 je tedy tvaru

„nová proměnná“  $t =$  funkce „staré proměnné“  $x$ .

Integrál po substituci již nesmí obsahovat „starou proměnnou“  $x$  a musí již být zapsán pouze pomocí „nové proměnné“  $t$ .

(iii) Pokud bychom jako „novou proměnnou“ zvolili jiné písmenko, např.  $s = \varphi(x)$ , potom je samozřejmě  $ds = \varphi'(x) dx$  a nový integrál bude v proměnné  $s$ .

□

Druhá substituční metoda je opět důsledkem pravidla o derivaci součinu.

**Věta 28 (Substituce pro neurčitý integrál).** *Nechť je funkce  $f(x)$  definovaná na intervalu  $I$  a nechť  $\psi(t)$  má nenulovou derivaci na intervalu  $J$  a  $\psi(J) = I$ . Je-li funkce  $F(t)$  primitivní k funkci  $[(f \circ \psi)(t)] \cdot \psi'(t)$  na intervalu  $J$ , potom je funkce  $(F \circ \psi^{-1})(x)$  primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , tj.*

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left[ = F(t) = F(\psi^{-1}(x)) \right].$$

Neboli v daném integrálu volíme substituci  $x = \psi(t)$ , tj.  $t = \psi^{-1}(x)$  (inverzní funkce).

### Poznámka 22.

(i) Taktéž ve výpočtu pomocí druhé substituční metody se používá vzoreček pro diferenciál (viz Definice 14), neboli

$$x = \psi(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \psi'(t) dt.$$

(ii) Substituce uvedená ve Větě 28 je tedy tvaru

„stará proměnná“  $x =$  funkce „nové proměnné“  $t$ .

Integrál po substituci již nesmí obsahovat „starou proměnnou“  $x$  a musí již být zapsán pouze pomocí „nové proměnné“  $t$ .

(iii) Pokud bychom jako „novou proměnnou“ zvolili jiné písmenko, např.  $x = \psi(u)$ , potom je samozřejmě  $dx = \psi'(u) du$  a nový integrál bude v proměnné  $u$ .

(iv) U druhé substituční metody (tj. ve Větě 28) je nutné dávat pozor na interval, kde  $\psi'(t) \neq 0$ . Tato podmínka zaručuje monotonii funkce  $\psi(t)$  a tedy existenci inverzní funkce  $\psi^{-1}(x)$ .

□

**Příklad 97.**

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} dx & \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\cos t) dt \end{array} \right| = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t}_{dx} dt \\
 & = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\
 & = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} (\sin t) (\cos t) + C \\
 & = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} (\sin t) \sqrt{1-\sin^2 t} + C \quad | \quad t = \arcsin x \quad | \\
 & = \boxed{\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C}.
 \end{aligned}$$

Ověřte si derivováním výsledku, že je tento výpočet skutečně správně. □

**3.3. Integrovaní racionálních lomených funkcí.** Je-li  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$  racionální lomená funkce (viz Odstavec 1.6), provedeme nejprve dělení, abychom dostali ryze racionální lomenou funkci.

**Příklad 98.**

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \underbrace{x + 1}_{\substack{\text{umíme} \\ \text{integrovat}}} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

□

Dále ryze racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky, přičemž v Odstavci 1.6 jsme viděli, že tyto parciální zlomky mají jeden z následujících tvarů.

- Pro reálný jednoduchý kořen  $x_0$ :

$$\frac{A}{x - x_0}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{A}{x - x_0} dx = \boxed{A \ln |x - x_0|}.$$

- Pro reálný vícenásobný kořen  $x_0$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}, \quad \frac{B}{(x - x_0)^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{C}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad \text{pro } k = 2, \dots, n:$$

$$\int \frac{A}{(x - x_0)^k} dx = A \int (x - x_0)^{-k} dx = A \frac{(x - x_0)^{-k+1}}{-k+1} = \boxed{\frac{A}{(1-k)(x - x_0)^{k-1}}}.$$

- Pro dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů  $\alpha \pm \beta i$ :

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar  $t^2 + 1$ , kde  $t = \frac{x - \alpha}{\beta}$ . Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Dt + E}{t^2 + 1} dt = D \int \frac{t}{t^2 + 1} dt + E \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \boxed{\frac{D}{2} \ln(t^2 + 1)} + \boxed{E \operatorname{arctg} t}.$$

- Pro dvojici vícenásobných komplexně sdružených kořenů  $\alpha \pm \beta i$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{Bx + C}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n}, \quad \frac{Dx + E}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{Fx + G}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \Rightarrow \quad \text{pro } k = 2, \dots, n:$$

$$\int \frac{Bx + C}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k} dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar  $(t^2 + 1)^k$ , kde  $t = \frac{x - \alpha}{\beta}$ . Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Ht + J}{(t^2 + 1)^k} dt = H \int \frac{t}{(t^2 + 1)^k} dt + J \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt,$$

přičemž první z uvedených integrálů vypočteme substitucí  $s = t^2 + 1$  (potom  $ds = 2t dt$ ) a druhý z uvedených integrálů je integrál  $K_n(x)$  z Příkladu 95 (přesněji v tomto případě  $K_k(t)$ ), který vede na rekurentní formuli.

**Příklad 99.** Vypočtěte

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} dx.$$

*Řešení.* Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Odsud plyne, že  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$  a tedy je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} dx &= \int \left( \frac{2}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{-2}{x + 1} - \ln|x + 1| + \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \boxed{\frac{-2}{x + 1} - \ln|x + 1| + \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C}, \end{aligned}$$

přičemž předposlední integrál jsme spočítali pomocí substituce  $t = x^2 + 4$  (tj.  $dt = 2x dx$ ) a poslední integrál pomocí substituce  $t = \frac{x}{2}$  (tj.  $dt = \frac{1}{2} dx$ ).  $\square$

Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech [8, Odstavec 6.2].

**Poznámka 23.** Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{x}{\ln x} dx, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \int \cos(x^2) dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{x^2} dx.$$

Z věty o existenci primitivní funkce (Věta 24) ale víme, že k uvedeným funkcím existuje primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají vyšší funkce (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).

Pozn.: Pozor ale na

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C, \quad (\text{není to vyšší funkce})!$$

□

**3.4. Riemannův integrál.** V tomto odstavci budou uvažované funkce vždy ohraňované.

Základní otázka tohoto odstavce zní: Jaká je plocha mezi  $f(x)$  a osou  $x$  (na intervalu  $[a, b]$ )?

**Příklad 100.**

(a)  $f(x) = 2$  pro  $x \in [-1, 1]$  (viz obr.),  $P = 4$ .

(b)  $f(x) = k$  pro  $x \in [a, b]$  (viz obr.),  $P = k(b - a)$ .

(c)  $f(x) = x$  pro  $x \in [0, 4]$  (viz obr.),  $P = \frac{1}{2} 4^2 = 8$ .

(d)  $f(x) = x$  pro  $x \in [2, 4]$  (viz obr.),  $P = \frac{1}{2} 4^2 - \frac{1}{2} 2^2 = 8 - 2 = 6$ .

(e)  $f(x) = x$  pro  $x \in [a, b]$  (viz obr.),  $P = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2$ .

(f)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  pro  $x \in [-1, 1]$  (viz obr.),  $P = \frac{1}{2} \pi 1^2 = \frac{\pi}{2}$ .

(g)  $f(x) = -2x + 1$  pro  $x \in [1, 2]$  (viz obr.),  $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$ . Ale protože je plocha pod osou  $x$ , klademe  $P = -2$ .

(h)  $f(x) = x^3$  pro  $x \in [-1, 1]$  (viz obr.), plocha je stejná nad i pod osou  $x$ , a proto klademe  $P = 0$ .

□

Tato „orientovaná plocha“ se nazývá určitý integrál (též Riemannův integrál) z funkce  $f(x)$  přes interval  $[a, b]$  a značíme ji

$$P = \int_a^b f(x) dx = \begin{array}{l} \text{orientovaná plocha mezi grafem} \\ \text{funkce } f(x) \text{ a osou } x \end{array}.$$

**Příklad 101.** Tedy výpočty uvedené v Příkladu 100 můžeme alternativně zapsat následovně:

$$(a) \int_{-1}^1 2 \, dx = 4,$$

$$(b) \int_a^b k \, dx = k(b - a),$$

$$(c) \int_0^4 x \, dx = 8,$$

$$(d) \int_2^4 x \, dx = 6,$$

$$(e) \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2,$$

$$(f) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$(g) \int_{-1}^1 (-2x + 1) \, dx = -2,$$

$$(h) \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0.$$

□

Skutečnou plochu mezi  $f(x)$  a osou  $x$  odhadneme pomocí „vepsaných“ a „opsaných“ obdélníků (viz obr.), čímž dostaneme dolní odhad  $s(D, f)$  pro skutečnou plochu a horní odhad  $S(D, f)$  pro skutečnou plochu.

**Definice 18 (Dělení intervalu).** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Dělením intervalu  $[a, b]$  je konečná množina bodů  $D \subseteq [a, b]$  s vlastností  $a, b \in D$ . Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{kde} \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  se nazývají dělicí body a interval  $[x_{k-1}, x_k]$  se nazývá dělicí (pod)interval.

Délka největšího dělicího podintervalu je pak norma dělení  $D$ , tj. je to číslo

$$n(D) := \max_{k=1, \dots, n} \{x_k - x_{k-1}\}. \quad (40)$$

Množinu všech dělení intervalu  $[a, b]$  označujeme jako  $\mathbb{D}[a, b]$  či jenom jako  $\mathbb{D}$ . □

Pro ohraničenou funkci  $f(x)$  na  $[a, b]$  a dělení  $D$  intervalu  $[a, b]$  zaved' me označení

$$m_k := \inf \{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad (\text{viz obr.})$$

$$M_k := \sup \{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad (\text{viz obr.})$$

$$s(D, f) := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}), \quad \text{dolní součet funkce } f(x) \text{ při dělení } D,$$

$$S(D, f) := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}), \quad \text{horní součet funkce } f(x) \text{ při dělení } D.$$

**Tvrzení 5.** Necht'  $c \leq f(x) \leq d$  pro každé  $x \in [a, b]$ . Potom pro každá dvě dělení  $D_1, D_2 \in \mathbb{D}[a, b]$  platí

$$c(b-a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq d(b-a),$$

tj. dolní součet libovolného dělení je nejvýše roven hornímu součtu libovolného dělení, přičemž všechny dolní součty jsou zdola ohraničeny číslem  $c(b-a)$  a všechny horní součty jsou shora ohraničeny číslem  $d(b-a)$  (viz obr.).

Při vzrůstajícím počtu dělicích bodů  $x_k$  v dělení  $D_1, D_2$  se bude dolní součet  $s(D_1, f)$  zvětšovat a zároveň horní součet  $S(D_2, f)$  zmenšovat.

**Definice 19 (Dolní a horní integrál).** Číslo

$$\int_a^b f := \sup \{s(D, f), D \in \mathbb{D}\}$$

nazýváme dolním (Riemannovým) integrálem z funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ .

Číslo

$$\overline{\int}_a^b f := \inf \{S(D, f), D \in \mathbb{D}\}$$

nazýváme horním (Riemannovým) integrálem z funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ . □

Současně víme, že vždy je

$$\int_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f.$$

Navíc, pokud je  $c \leq f(x) \leq d$  na intervalu  $[a, b]$ , potom podle Tvrzení 5 je

$$c(b-a) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f \leq d(b-a). \quad (41)$$

**Definice 20 (Určitý (Riemannův) integrál).** Je-li

$$\int_a^b f = \overline{\int}_a^b f,$$

potom říkáme, že funkce  $f(x)$  je integrovatelná (v Riemannově smyslu) na  $[a, b]$  a toto společné číslo značíme

$$\boxed{\int_a^b f} := \int_a^b f = \overline{\int}_a^b f.$$

Množinu všech (riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu  $[a, b]$  značíme jako  $\mathcal{R}[a, b]$ .

Je-li

$$\int_a^b f < \overline{\int}_a^b f,$$

potom říkáme, že funkce  $f(x)$  není integrovatelná na  $[a, b]$ . □

Riemannův integrál přes interval  $[a, b]$  je tedy číslo. Zápisy pro Riemannův integrál budeme používat také ve tvaru s integrační proměnnou, např.

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(t) dt, \quad \text{a podobně.}$$

### Příklad 102.

(a) Pro konstantní funkci  $f(x) = c$  máme  $m_k = M_k = c$  pro všechny  $k$  a tedy je

$$\begin{aligned} s(D, f) &= c(b-a), \quad S(D, f) = c(b-a) \quad (\text{viz obr.}), \quad \forall D \in \mathbb{D}, \quad \Rightarrow \\ \int_a^b f &= \sup\{c(b-a)\} = c(b-a), \quad \overline{\int}_a^b f = \inf\{c(b-a)\} = c(b-a) \quad \Rightarrow \\ \boxed{c \in \mathcal{R}[a, b]} \quad \text{a platí} \quad \int_a^b f &= \int_a^b f = \overline{\int}_a^b f = \boxed{c(b-a)}. \end{aligned}$$

Viz Příklad 101(b).

(b) Dirichletova funkce  $\chi$  [chí]

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 0, & \text{pro } x \in \mathbb{I} \cap [a, b], \end{cases}$$

Potom  $m_k = 0$  a  $M_k = 1$  pro všechna  $k$  a tedy je

$$\begin{aligned} s(D, \chi) &= 0, \quad S(D, \chi) = b-a \quad (\text{viz obr.}), \quad \forall D \in \mathbb{D}, \quad \Rightarrow \\ \int_a^b \chi &= \sup\{s(D, \chi)\} = \sup\{0\} = 0, \quad \overline{\int}_a^b \chi = \inf\{S(D, \chi)\} = \inf\{b-a\} = b-a \quad \Rightarrow \\ \int_a^b \chi &< \overline{\int}_a^b \chi \quad \text{a tedy} \quad \boxed{\chi \notin \mathcal{R}[a, b]} \quad (\chi \text{ není integrovatelná}). \end{aligned}$$

□

Jak ale obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

Nulová posloupnost dělení  $D_k \in \mathbb{D}$  je taková posloupnost dělení, která splňuje  $\boxed{n(D_k) \rightarrow 0}$  pro  $k \rightarrow \infty$ , neboli norma dělení (viz vzorec (40)) jde k nule.

**Věta 29.** *Nechť je funkce  $f(x)$  ohraničená na intervalu  $[a, b]$ . Potom pro libovolnou nulovou posloupnost dělení  $D_k \in \mathbb{D}$  platí, že*

$$s(D_k, f) \rightarrow \int_a^b f, \quad S(D_k, f) \rightarrow \overline{\int}_a^b f, \quad \text{pro } k \rightarrow \infty.$$

*Je-li navíc  $f(x)$  integrovatelná na  $[a, b]$ , potom dolní součty  $s(D_k, f)$  i horní součty  $S(D_k, f)$  konvergují (ve smyslu existence vlastní limity) k číslu  $\int_a^b f$ .*

Z Věty 29 vyplývá, že pokud víme, že je  $f(x)$  integrovatelná na  $[a, b]$ , potom lze  $\int_a^b f$  určit limitním přechodem pomocí libovolné nulové posloupnosti dělení intervalu  $[a, b]$ .

**Příklad 103.** Víme-li, že je funkce  $f(x) = x^2$  integrovatelná na intervalu  $[0, 1]$  (viz např. Věta 30 uvedená níže), potom určete  $\int_0^1 x^2 dx$ .

*Řešení.* Připomeňme si vzorec

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (42)$$

Rozdělíme interval  $[0, 1]$  na  $n$  stejných dělicích intervalů délky  $\frac{1}{n}$ . Potom jsou dělicí body  $x_k = \frac{k}{n}$  pro  $k = 0, 1, \dots, n$  (viz obr.) a norma takového dělení je právě číslo  $\frac{1}{n}$ . Tedy jedná se o nulovou posloupnost dělení.

Navíc, protože je funkce  $x^2$  rostoucí, je její infimum na  $k$ -tém dělicím intervalu dosaženo v levém krajním bodě. Tedy platí, že pro libovolné  $k = 1, 2, \dots, n$  je  $m_k = x_{k-1}^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}$ , a proto

$$\begin{aligned} s(D_n, f) &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \stackrel{(42)}{=} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A proto je

$$\boxed{\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}}.$$

□

Zásadní otázku, které funkce jsou vlastně (riemannovsky) integrovatelné, zodpovídá následující tvrzení.

**Věta 30.**

(i) Každá spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$  je zde také integrovatelná, neboli

$$\boxed{C[a, b] \subseteq \mathcal{R}[a, b]}.$$

(ii) Každá monotónní funkce na intervalu  $[a, b]$  je zde také integrovatelná.

**Poznámka 24.** Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě nezmění, pokud je integrovatelná funkce  $f(x)$  nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině „míry nula“), viz obr. Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů  $(a, b)$ ,  $(a, b]$  i  $[a, b)$  je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu  $\int_a^b f$ , tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval  $[a, b]$ . □

**Příklad 104.** Pro nespojitou funkci  $\operatorname{sgn} x$  (viz Příklad 18(a)) platí (viz obr.)

$$\int_{-2}^3 \operatorname{sgn} x \, dx = 3 + (-2) = \boxed{1}.$$

Obdobně lze ukázat (rozvažte si to), že pro  $a < 0 < b$  je

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx = a + b.$$

□

**3.5. Vlastnosti Riemannova integrálu.** V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti Riemannova integrálu. Stále mějte na paměti, že se vlastně jedná o „orientovanou plochu“ mezi grafem funkce a osou  $x$ .

**Věta 31.** Je-li funkce  $f(x)$  integrovatelná a ohraničená na intervalu  $[a, b]$ , tj.  $c \leq f(x) \leq d$  pro všechna  $x \in [a, b]$ , potom

$$c(b-a) \leq \int_a^b f \leq d(b-a),$$

(viz obr.).

*Důkaz.* Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem nerovnosti (41), neboť nyní předpokládáme, že je funkce  $f(x)$  integrovatelná. □

**Důsledek 7.** Je-li  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , potom platí

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \quad \text{na } [a, b] &\Rightarrow \int_a^b f \geq 0, && \text{(tj. orientovaná plocha pod nezápornou} \\ &&& \text{funkcí je nezáporná),} \\ |f(x)| \leq c \quad \text{na } [a, b] &\Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq c(b-a). \end{aligned}$$

**Věta 32 (Pravidla pro určitý integrál).** Nechť  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  ( $f(x)$  a  $g(x)$  jsou integrovatelné) a  $c \in \mathbb{R}$  je konstanta.

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*  $c \cdot f \in \mathcal{R}[a, b]$  a platí

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*  $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$  a platí

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx.$$

(iii) *Pravidlo monotonie:* je-li  $f(x) \leq g(x)$  na  $[a, b]$ , potom

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(iv) *Pravidlo absolutní hodnoty:*  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$  a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

(v) *Pravidlo součinu:*  $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ .

(vi) *Pravidlo podílu:* je-li  $g(x) \geq c$  na intervalu  $[a, b]$  pro nějaké  $c > 0$ , potom je  $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$ .

(vii) *Pravidlo návaznosti:* je-li  $a < c < b$ , potom je  $f \in \mathcal{R}[a, c]$ ,  $f \in \mathcal{R}[c, b]$  a platí (viz obr.)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Poznámka 25.** Všimněte si, že pravidla (i) a (ii) vlastně říkají, že operace „určitý integrál“ je lineární. Tj. zobrazení

$$I : \mathcal{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) := \int_a^b f$$

je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory  $\mathcal{R}[a, b]$  a  $\mathbb{R}$  (viz MB101). □

**Poznámka 26.**

(i) V pravidle součinu (Věta 32(v)) pro určitý integrál je zřejmě (obecně)

$$\int_a^b f \cdot g \neq \left( \int_a^b f \right) \cdot \left( \int_a^b g \right).$$

(ii) V pravidle podílu (Věta 32(vi)) nestačí, aby  $g(x) > 0$  na intervalu  $[a, b]$ , tj. je nutné, aby byla funkce ve jmenovateli „odražena od 0“. Např. pro funkce

$$f(x) := 1 \quad \text{na } [0, 1], \quad g(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x = 0, \\ x, & \text{pro } x \in (0, 1], \end{cases}$$

platí, že  $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ ,  $g \in \mathcal{R}[0, 1]$ , protože  $\int_0^1 f = 1$  a  $\int_0^1 g = \frac{1}{2}$ . Dále je  $g(x) > 0$  na celém intervalu  $[0, 1]$ , ale funkce

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{pro } x \in (0, 1], \end{cases}$$

není integrovatelná na intervalu  $[0, 1]$ , protože

$$\int_0^1 \frac{f}{g} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty, \quad (\text{viz Odstavec 3.10}).$$

Funkci  $g(x)$  nelze „odrazit od 0“, protože se k nule blíží (a tedy je funkce  $\frac{1}{g(x)}$  neohraničená).

(iii) Pravidlo návaznosti (Věta 32(vii)) lze jednoduše rozšířit na libovolné hodnoty  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (dokonce mohou být některá tato čísla stejná), pokud definujeme

$$\int_a^a f := 0, \quad (\text{tj. „plocha“ pod jediným bodem je nulová}),$$

$$\int_b^a f := - \int_a^b f. \quad (\text{tj. záměna integračních mezí mění znaménko určitého integrálu}).$$

Potom podle pravidla návaznosti zřejmě platí

$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0.$$

□

### Příklad 105.

(a) Podle pravidla součtu a podle Příkladů 103 a 101(e) je

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

(b) Podle pravidla konstantního násobku a podle Příkladu 103 je

$$\int_0^1 2x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

(c) Podle pravidla rozdílu a podle Příkladu 103 je (viz obr.)

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 x^2 dx = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

□

**3.6. Věty o střední hodnotě.** Stejně tak jako má diferenciální počet své věty o střední hodnotě (viz Odstavec 2.10), jsou podobné věty důležité i v integračním počtu.

Začněme následujícím motivačním příkladem. Pokud máme konečně mnoho čísel  $a_1, \dots, a_n$ , potom jejich průměrná hodnota je

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Tedy průměrná hodnota čísel  $f(c_1), \dots, f(c_n)$  je pak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k).$$

Položme si otázku, co by se stalo, kdybychom nahradili konečně mnoho čísel  $f(c_1), \dots, f(c_n)$  nekonečně mnoha funkčními hodnotami  $f(x)$ , tj. analyzujeme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\substack{\text{délka dělicích} \\ \text{subintervalů}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \cdot (\text{Riemannův součet, ale místo } m_k \text{ či } M_k \text{ je zde } f(c_k)) \\ &\rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f. \end{aligned}$$

**Definice 21 (Průměr funkce).** Necht'  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Potom číslo

$$av(f) = av_{[a,b]}(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

nazýváme průměrnou hodnotou (též střední hodnotou) funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ . Označení je z angličtiny „average value“.  $\square$

**Příklad 106.**

(a) Pro funkci  $f(x) = c$  na intervalu  $[a, b]$  platí

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b c \, dx = \frac{1}{b-a} \cdot c(b-a) = \boxed{c},$$

tj. průměrná hodnota konstantní funkce je samozřejmě tatáž konstanta.

(b) Pro funkci  $f(x) = x$  na intervalu  $[a, b]$  platí (viz Příklad 101(e))

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \boxed{\frac{b+a}{2}}.$$

(c) Pro funkci  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[0, 1]$  platí

$$av(f) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 \, dx = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

$\square$

V dalším textu označme

$$m := \inf \{f(x), x \in [a, b]\}, \quad M := \sup \{f(x), x \in [a, b]\},$$

tj. platí pak  $m \leq f(x) \leq M$  na intervalu  $[a, b]$ .

Nyní uvedeme důležitou větu o střední hodnotě integrálního počtu. I když tato věta plyne až z následující věty, uvádíme ji jako první, protože bude pro nás velmi důležitá.

**Věta 33 (O střední hodnotě integrálního počtu).**

(i) Nechť  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Potom existuje číslo  $c \in \mathbb{R}$ ,  $m \leq c \leq M$ , takové, že

$$\int_a^b f(x) dx = c(b-a), \quad \text{tj.} \quad c = av(f),$$

tj. plocha mezi grafem funkce  $f(x)$  a osou  $x$  je rovna obsahu obdélníka se základnou  $[a, b]$  a výškou  $c$  (viz obr.).

(ii) Je-li navíc funkce  $f(x)$  spojitá na  $[a, b]$ , potom existuje bod  $x_0 \in [a, b]$  s vlastností, že

$$f(x_0) = c = av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

tj. spojitá funkce  $f(x)$  nabývá svou průměrnou hodnotu v intervalu  $[a, b]$ .

*Důkaz.* Plyne z následující Věty 34 volbou  $g(x) \equiv 1$  na  $[a, b]$ . □

**Příklad 107.** Funkce  $f(x) = 4 - x^2$  má na intervalu  $[0, 3]$  průměrnou hodnotu

$$av(f) = \frac{1}{3} \int_0^3 (4 - x^2) dx = \frac{1}{3} \left( \int_0^3 4 dx - \int_0^3 x^2 dx \right) = \frac{1}{3} \cdot (12 - 9) = 1,$$

(Integrál  $\int_0^3 x^2 dx = 9$  lze spočítat podobně jako Příklad 103.)

Podle Věty 33(i) tedy pro číslo  $c = av(f) = 1$  platí, že

$$\int_0^3 (4 - x^2) dx = c(b-a) = 1 \cdot 3 = 3.$$

Dále, protože je funkce  $4 - x^2$  spojitá na intervalu  $[0, 3]$ , existuje podle Věty 33(ii) bod  $x_0 \in [0, 3]$  s vlastností, že  $f(x_0) = 4 - x_0^2 = 1$ . Zřejmě se jedná o bod  $x_0 = \sqrt{3}$ , viz obr. □

**Poznámka 27.** To, že spojitá funkce nabývá svou průměrnou hodnotu, je vlastnost, která obecně neplatí pro konečně mnoho hodnot. Je to velmi důležitá vlastnost! □

**Příklad 108.** Pokud je funkce  $f(x)$  nespojitá na intervalu  $[a, b]$ , potom svou průměrnou hodnotu nabývat nemusí. Např. pro funkci  $f(x)$  na intervalu  $[-1, 1]$  definovanou jako

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{pro } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{pro } x \in [0, 1], \end{cases}$$

je (viz obr.)

$$av(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$

ale funkce  $f(x)$  nenabývá hodnotu 0 nikde v intervalu  $[-1, 1]$ . □

**Věta 34.** Necht'  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  a  $g(x) \geq 0$  na  $[a, b]$ .

(i) Existuje číslo  $c \in \mathbb{R}$ ,  $m \leq c \leq M$ , takové, že

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = c \int_a^b g.$$

(ii) Je-li navíc funkce  $f(x)$  spojitá na  $[a, b]$ , potom existuje bod  $x_0 \in [a, b]$  s vlastností, že  $f(x_0) = c$ , tj.

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(x_0) \int_a^b g.$$

*Důkaz.* (i) Protože je  $m \leq f(x) \leq M$  a současně  $g(x) \geq 0$  na intervalu  $[a, b]$ , platí nerovnosti

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Je-li  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , potom z pravidla monotonie určitého integrálu (Věta 32(iii)) je

$$0 = m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

a tudíž číslo  $c$  můžeme zvolit libovolně.

Je-li  $\int_a^b g(x) dx > 0$  (neboť  $g(x) \geq 0$  na  $[a, b]$ ), potom platí nerovnosti

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx, \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M,$$

a tudíž číslo

$$c := \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

splňuje tvrzení této věty.

(ii) Je-li  $f(x)$  spojitá na  $[a, b]$ , potom podle Weierstrassovy věty (Věta 6) nabývá  $f(x)$  svého maxima ( $=M$ ) a minima ( $=m$ ) v intervalu  $[a, b]$ . Dále, podle Bolzanovy věty (Věta 7) nabývá  $f(x)$  všech hodnot mezi  $m$  a  $M$ , a tedy nabývá i hodnotu  $c$ , tj.  $f(x_0) = c$  pro nějaký bod  $x_0 \in [a, b]$ .  $\square$

**3.7. Integrál jako funkce horní meze.** Je-li funkce  $f(x)$  integrovatelná na  $[a, b]$ , potom je podle Věty 32(vii) také integrovatelná na intervalu  $[a, x]$  pro každé  $x \in [a, b]$ . Tedy předpis

$$F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt$$

definuje funkci  $F(x)$ , která je řádně definovaná pro všechna  $x \in [a, b]$ .

Zřejmě je

$$F(a) = \int_a^a f = 0 \quad \text{a} \quad F(b) = \int_a^b f.$$

V tomto odstavci budeme studovat vlastnosti této funkce  $F(x)$ .

Zřejmě je hodnota  $F(x)$  obsah (orientované) plochy mezi grafem funkce  $f(t)$  na intervalu  $[a, x]$  (viz obr.).

**Příklad 109.** Pro (nespojitou) funkci

$$f(x) := \begin{cases} 5, & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 10, & \text{pro } x \in [1, 2], \end{cases}$$

je (viz obr.)

$$F(x) := \begin{cases} 5x, & \text{pro } x \in [0, 1], \\ 10x - 5, & \text{pro } x \in [1, 2], \end{cases}$$

□

V následujících dvou tvrzeních uvidíme, že funkce  $F(x)$  „vylepšuje“ vlastnosti funkce  $f$ . Viz např. předchozí Příklad 109, kdy z nespojité funkce  $f(x)$  dostaneme spojitou funkci  $F(x)$ .

**Věta 35.** *Nechť  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  (tedy funkce  $f(x)$  může být i nespojitá). Potom je funkce*

$$F(x) := \int_a^x f$$

*spojitá na intervalu  $[a, b]$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro ohraničenou funkci  $f(x)$ , tj.  $|f(x)| \leq c$  na intervalu  $[a, b]$  pro nějaké  $c > 0$ . Obecný případ (bez předpokladu ohraničenosti funkce  $f(x)$ ) lze najít v literatuře o integrálním počtu.

Nechť  $x_0 \in [a, b]$  je libovolný bod. Chceme ukázat, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ , neboli že

$$F(x) - F(x_0) \rightarrow 0 \quad \text{pro } x \rightarrow x_0.$$

Platí, že (viz obr.)

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \leq \left| \int_{x_0}^x c \right| = c \underbrace{|x - x_0|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Tedy je funkce  $F(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ . A protože byl tento bod vybrán v intervalu  $[a, b]$  libovolně, je  $F(x)$  spojitá na  $[a, b]$ . □

Další otázkou je, jak rychle se mění funkce  $F(x)$ ? Takto jednoduše položená otázka je ale jednou z nejdůležitějších v tomto předmětu. Odpověď zní: Tak rychle, jaké jsou hodnoty funkce  $f(x)$ .

**Věta 36.** *Je-li  $f(x)$  spojitá na nějakém okolí bodu  $x_0$ , potom má funkce  $F(x) := \int_a^x f$  derivaci v bodě  $x_0$  a platí*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

*Důkaz.* Podle Poznámky 4(v) je

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \begin{array}{l} \text{průměrná hodnota} \\ \text{funkce } f(t) \text{ na} \\ \text{intervalu } [x_0, x_0 + h] \end{array} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} av_{[x_0, x_0+h]}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_0), \end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o střední hodnotě integrálního počtu ( $f(x)$  je spojitá na intervalu  $[x_0, x_0 + h]$  pro  $h$  dostatečně malé, a tudíž nabývá v tomto intervalu svou střední hodnotu, viz Věta 33(ii)), kde bod  $t_0$  leží mezi body  $x_0$  a  $x_0 + h$ .

Všimněte si, že číslo  $h$  ve výše uvedené limitě nemusí být nutně kladné. Ale i pro  $h < 0$  či pro  $h = 0$  jsme příslušné integrály definovali v Poznámce 26(iii).

Tedy platí, že

$$\begin{aligned} x_0 \leq t_0 \leq x_0 + h & \quad \text{pro } h > 0, \\ x_0 + h \leq t_0 \leq x_0 & \quad \text{pro } h < 0. \end{aligned}$$

Odsud ale plyne, že jakmile  $h \rightarrow 0$ , pak  $t_0 \rightarrow x_0$ . A protože je funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ , platí  $f(t_0) \rightarrow f(x_0)$ , neboli

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow x_0} f(t_0) = f(x_0).$$

□

**Důsledek 8 (Fundamentální vztah integrálního počtu).** *Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $[a, b]$ , potom má funkce  $F(x) := \int_a^x f$  spojitou derivaci  $F'(x) = f(x)$  na  $[a, b]$ , tj. platí vztah*

$$\boxed{\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)}. \quad (43)$$

### Poznámka 28.

(i) Vztah (43) v sobě soustřeďuje poznatky o

- derivaci – protože tento vztah obsahuje derivaci,
- neurčitým integrálem – protože je funkce  $\int_a^x f(t) dt$  primitivní k funkci  $f(x)$ ,
- určitým integrálem – protože tento vztah obsahuje určitý integrál,
- spojitosti – protože je tento vztah založen na spojitosti funkce  $f(x)$ .

(ii) Důsledek 8 je vlastně důkaz věty o existenci primitivní funkce (Věta 24), protože říká nejen to, že primitivní funkce  $F(x)$  ke spojité funkci na  $[a, b]$  existuje, ale dokonce udává návod, jakým způsobem tuto primitivní funkci zkonstruovat (pomocí určitého integrálu s proměnnou horní mezí).

(iii) Místo  $\int_a^x f$  můžeme vzít také  $F(x) = \int_c^x f$  pro libovolné  $c \in [a, b]$ , protože podle pravidla návaznosti (Věta 32(vii)) je

$$\left( \int_c^x f(t) dt \right)' = \underbrace{\left( \int_c^a f(t) dt \right)}_{\text{konstanta}} + \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = 0 + \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

vzhledem k  $x$

- (iv) Vzorec (43) udává, že operace určitého integrování (= výpočet plochy) a derivování jsou v tomto pořadí inverzní, tj. když začneme se spojitou funkcí  $f(t)$  na  $[a, b]$ , kterou nejprve integrujeme přes interval  $[a, x]$  (tím vznikne funkce  $F(x)$  udávající orientovanou plochu pod  $f(t)$  na intervalu  $[a, x]$  a poté funkci  $F(x)$  zderivujeme, tak se vždy opět vrátíme k původní funkci  $f(x)$ ). Opačné pořadí operací, tj. diferencovatelnou funkci  $f(x)$  napřed zderivujeme, a pak její derivaci  $f'(t)$  integrujeme (Riemannovým integrálem) na  $[a, x]$ , pak výsledná funkce nemusí být rovna původní funkci  $f(x)$ , tj. obecně je

$$\int_a^x f'(t) dt \neq f(x) - f(a).$$

Toto je jedna z „vad“ Riemannova integrálu, která je odstraněna obecnějšími typy integrálů, např. integrálem Lebesgueovým. Takováto funkce  $f(t)$  musí mít ale dostatečně „škaradou“ derivaci  $f'(t)$ . Pro „pěkné“ funkce  $f(t)$ , např. pro funkce se spojitou derivací  $f'(t)$  na  $[a, b]$ , výše uvedený vztah platí jako rovnost.

□

**Poznámka 29.** Vztah (43) lze jednoduše použít pro rychlý zápis primitivní funkce, např. primitivní funkce k funkci

$$(a) \quad x^2 \quad \text{je} \quad F(x) = \int_0^x t^2 dt, \quad (b) \quad \frac{1}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Tyto primitivní funkce lze ovšem vypočítat (viz následující Odstavec 3.8), např.

$$(a) \quad \int_0^x t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{x^3}{3}, \quad \text{tedy} \quad \left( \int_0^x t^2 dt \right)' = \left( \frac{x^3}{3} \right)' = x^2,$$

$$(b) \quad \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x, \quad \text{tedy} \quad \left( \int_1^x \frac{1}{t} dt \right)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

a ověřit tak přímo platnost vztahu (43).

Na druhou stranu lze vztah (43) využít i pro konstrukci primitivních funkcí k vyšším funkcím (viz Poznámka 23), např. primitivní funkce k funkci

$$(a) \quad \frac{\sin x}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad (b) \quad \cos(x^2) \quad \text{je} \quad F(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt,$$

kde dané integrály vypočítat nelze.

(Výše uvedené integrály je možné ale vyjádřit pomocí nekonečné mocninné řady, viz dále Odstavec 4.5.) □

**Příklad 110.** Bez výpočtu, tedy pouze na základě znalosti vztahu (43), můžeme proto psát např.

$$\left( \int_0^x t^2 \sin t dt \right)' = x^2 \sin x, \quad \left( \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)' = \frac{e^x}{x}.$$

□

Protože je  $\int_c^x f = -\int_x^c f$ , pro integrál jako funkci dolní meze platí

$$G(x) := \int_x^c f, \quad G'(x) = \left( \int_x^c f \right)' = \left( -\int_c^x f \right)' = - \left( \int_c^x f \right)' = -f(x),$$

a tedy je

$$\left( \int_x^c f(t) dt \right)' = -f(x). \quad (44)$$

To znamená, že

při derivování integrálu podle horní meze dostaneme původní funkci  $f(x)$ , zatímco při derivování integrálu podle dolní meze dostaneme  $-f(x)$ .

**Příklad 111.** Pro pokročilejší: Zkuste si rozmyslet, jak by vypadala derivace funkcí

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt, \quad G(x) = \int_{\sin x}^1 \arcsin t dt, \quad H(x) = \int_x^{x^2} \ln t dt.$$

*Řešení.* Podle pravidla pro derivování složené funkce (Věta 11) je

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left( \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt \right)' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}, \\ G'(x) &= \left( \int_{\sin x}^1 \arcsin t dt \right)' = - \underbrace{(\arcsin \sin x)}_{=x} \cdot (\sin x)' = -x \cos x, \\ H'(x) &= \left( \int_x^{x^2} \ln t dt \right)' = \left( \int_x^1 \ln t dt + \int_1^{x^2} \ln t dt \right)' \\ &= \left( \int_x^1 \ln t dt \right)' + \left( \int_1^{x^2} \ln t dt \right)' = -\ln x + (\ln x^2) \cdot (x^2)' \\ &= -\ln x + 2(\ln x) \cdot 2x = (4x - 1) \ln x. \end{aligned}$$

□

**3.8. Metody výpočtu určitého integrálu.** To, že jsme schopni najít primitivní funkci pomocí určitého integrálu, vede k jednoduché metodě výpočtu určitého integrálu pomocí libovolné primitivní funkce k funkci  $f(x)$ .

**Věta 37 (Newton–Leibnizův vzorec).** Je-li  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  a je-li  $F(x)$  libovolná primitivní funkce k  $f(x)$  na  $(a, b)$ , přičemž  $F(x)$  je spojitá na  $[a, b]$ , potom je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Důkaz.* Všimněte si, že ve větě stačí  $f(x)$  integrovatelná, nemusí být spojitá. Důkaz ale provedeme pouze pro spojitou funkci  $f(x)$ , obecnější důkaz lze najít v literatuře.

Je-li  $f(x)$  spojitá na  $[a, b]$ , potom má  $f(x)$  podle Věty 24 na  $[a, b]$  primitivní funkci, označme ji  $F(x)$ . Dále, protože je podle Důsledku 8 funkce  $\int_a^x f$  také primitivní k  $f(x)$  na  $[a, b]$ , musí se tyto dvě primitivní funkce navzájem lišit o konstantu, viz Poznámka 19(iii). Tedy platí, že  $F(x) = \int_a^x f + C$  pro každé  $x \in [a, b]$ , a proto je

$$F(b) - F(a) = \left( \int_a^b f + C \right) - \left( \int_a^a f + C \right) = \int_a^b f.$$

□

Výpočet určitého integrálu podle Newton–Leibnizova vzorce značíme jako

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (45)$$

**Příklad 112.** Protože je funkce  $\frac{x^3}{3}$  primitivní k funkci  $x^2$  na  $[0, 1]$ , platí

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}},$$

viz také Příklad 103.

□

**Věta 38 (Metoda per-partes pro určitý integrál).** *Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají derivaci na intervalu  $[a, b]$  a  $u', v' \in \mathcal{R}[a, b]$ . Potom platí*

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx.$$

*Důkaz.* Podle Věty 26 je funkce

$$F(x) := u(x) \cdot v(x) - \int_a^x u \cdot v'$$

primitivní k funkci  $f(x) = u'(x) \cdot v(x) dx$  na intervalu  $[a, b]$ . A proto podle Newton–Leibnizova vzorce (45) je

$$\begin{aligned} \int_a^b u' \cdot v &= F(b) - F(a) = \left( u(b) \cdot v(b) - \int_a^b u \cdot v' \right) - \left( u(a) \cdot v(a) - \int_a^a u \cdot v' \right) \\ &= [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'. \end{aligned}$$

□

Pomocí Věty 38 lze tedy počítat daný integrál metodou per-partes přímo. Druhá možnost je pak vypočítat nejprve primitivní funkci pomocí metody per-partes pro neurčitý integrál (Věta 26) a potom aplikovat Newton–Leibnizův vzorec (45).

**Příklad 113.** (Srovnejte s Příkladem 94.)

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x \, dx \quad \left| \begin{array}{l} u' = \cos x \\ v = x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} u = \sin x \\ v' = 1 \end{array} \right| &= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx \\ &= \underbrace{\pi \sin \pi}_{=0} - \underbrace{0 \sin 0}_{=0} - [-\cos x]_0^\pi = [\cos x]_0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = \boxed{-2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x \, dx \quad \left| \begin{array}{l} u' = x \\ v = \ln x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| &= \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{e^2}{2} \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}}. \end{aligned}$$

□

**Věta 39 (Substituce pro určitý integrál).** *Nechť je funkce  $f(t)$  spojitá na intervalu  $[c, d]$  a nechť má funkce  $\varphi(x)$  integrovatelnou derivaci na intervalu  $[a, b]$  a  $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$ . Potom platí*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt.$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci  $t = \varphi(x)$  a transformujeme nejen integrál, ale i meze (v tomtéž pořadí mezí).*

**Příklad 114.** Vypočtete

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

*Řešení.* Tento příklad můžeme vyřešit dvěma způsoby. Bud' přímo z Newton–Leibnizova vzorce (45) (výpočtem primitivní funkce se substitucí v neurčitým integrálu) nebo pomocí substituce v určitým integrálu.

1. způsob: Z Příkladu 97 víme, že

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

Potom je

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \left( \frac{1}{2} \underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1 \sqrt{1-1^2} \right) - \left( \frac{1}{2} \arcsin 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \sqrt{1-0^2} \right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2. způsob: Při substituci v určitém integrálu transformujeme i meze (a již se pak ke „staré“ proměnné  $x$  nevracíme), tj.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx & \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\cos t) dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t dt}_{dx} \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ & = \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left( \frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin \pi}{4}}_{=0} \right) - \left( \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4} \right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Protože je jedná o obsah čtvrtkruhu s poloměrem  $r = 1$ , je výsledná hodnota  $\frac{\pi}{4}$  očekávaná.  $\square$

**Příklad 115.** Vypočítejte obsah kruhu s poloměrem  $r > 0$ .

*Řešení.* Obsah kruhu vypočítáme jako 2–krát obsah půlkruhu nebo jako 4–krát obsah čtvrtkruhu. Podle první možnosti je pak

$$\begin{aligned} P & = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx \left| \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = (r \cos t) dt \\ x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{r^2-r^2 \sin^2 t}}_{=r \cos t} \cdot \underbrace{r \cos t dt}_{dx} \\ & = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ & = 2r^2 \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2 \left\{ \left( \frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin \pi}{4}}_{=0} \right) - \left( -\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin(-\pi)}{4}}_{=0} \right) \right\} \\ & = 2r^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\pi r^2}. \end{aligned}$$

$\square$

**3.9. Aplikace určitého integrálu.** Víme, že určitý integrál  $\int_a^b f$  byl zkonstruován jako orientovaná plocha mezi grafem funkce  $f(x)$  a osou  $x$  na intervalu  $[a, b]$ . Tato orientovaná plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je  $f(x) \geq 0$  na  $[a, b]$ .

• Plocha mezi dvěma grafy. Pokud nás zajímá velikost plochy mezi grafy funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$ , viz obr., určíme ji pomocí vepsaných a opsaných obdélníků (stejně jako při konstrukci Riemannova integrálu v Odstavci 3.4), avšak nyní bude obsah každého takového obdélníka tvaru

$$[f(c_k) - g(c_k)](x_k - x_{k-1}), \quad \text{Riemannův součet je pak } \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)](x_k - x_{k-1}).$$

Tyto úvahy vedou k odvození následujícího vzorce.

**Tvrzení 6 (Plocha mezi grafy).** Necht'  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  a  $f(x) \geq g(x)$  na  $[a, b]$ . Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu  $[a, b]$  velikost

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b [ \text{horní funkce} - \text{dolní funkce} ] dx.$$

V tomto případě je zřejmě vždy  $P \geq 0$ !

**Příklad 116.** Určete plochu mezi grafy funkcí  $y = 1 - x^2$  a  $y = -3$ .

*Řešení.* Oba grafy se protínají v bodech  $x = -2$  a  $x = 2$ , přičemž funkce  $y = 1 - x^2$  je horní funkce na intervalu  $[-2, 2]$  (viz obr.). A proto je hledaná plocha

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^2 [(1 - x^2) - (-3)] dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( -8 - \frac{-8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}. \end{aligned}$$

□

**Příklad 117.** Určete plochu mezi grafy funkcí  $y = \sin x$  a  $y = 2 \sin x$  na intervalu  $[\pi, 2\pi]$ .

*Řešení.* Oba grafy se protínají v bodech  $x = \pi$  a  $x = 2\pi$ , přičemž funkce  $y = \sin x$  je horní funkce na tomto intervalu (viz obr.). A proto je hledaná plocha

$$\begin{aligned} P &= \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - 2 \sin x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = [\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = \boxed{2}. \end{aligned}$$

□

• **Délka křivky.** Křivka  $C$  v rovině,  $C : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , je zadána parametricky jako zobrazení  $C : t \mapsto [x(t), y(t)]$ .

**Příklad 118.** Křivka  $C : t \mapsto [\cos t, \sin t]$  pro  $t \in [0, 2\pi]$  je kružnice o poloměru  $r = 1$  se středem v počátku (viz obr.). □

Zvolme libovolné dělení  $D = \{\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta\}$  intervalu  $[\alpha, \beta]$ . Na křivce  $C$  vyznačíme body odpovídající hodnotám parametru  $t = t_k$  (viz obr.).

Zvolme nyní nějaké dva dělicí body  $t_{k-1}$  a  $t_k$  a označme příslušné body na křivce  $C$  jako  $M = [x(t_{k-1}), y(t_{k-1})]$  a  $N = [x(t_k), y(t_k)]$ . Podle Pythagorovy věty má potom úsečka  $MN$  velikost

$$|MN| = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}.$$

Délka celé křivky je pak aproximována délkou lomené čáry při dělení  $D$ , tedy číslem

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left[ \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2 (t_k - t_{k-1})^2 + \left[ \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left[ \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2 + \left[ \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ &= \text{Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem} \\ & \quad \sqrt{\left[ \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2 + \left[ \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2} \end{aligned}$$

Tedy pro  $n \rightarrow \infty$  (zvyšující se počet dělicích bodů a normu dělení  $n(D) \rightarrow 0$ ) je

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \rightarrow x'(t), \quad \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \rightarrow y'(t), \quad t_k - t_{k-1} \rightarrow dt,$$

a proto dostáváme následující vzorec.

**Tvrzení 7 (Délka křivky v rovině).** *Nechť  $C$  je křivka v rovině a  $[x(t), y(t)]$  pro  $t \in [\alpha, \beta]$  její parametrizace. Mají-li souřadné funkce  $x(t)$  a  $y(t)$  spojitou derivaci na intervalu  $[\alpha, \beta]$ , potom má křivka  $C$  konečnou délku a platí*

$$d(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt .$$

**Příklad 119.** Určete délku jednotkové půlkružnice (tj.  $r = 1$ , viz obr.).

*Řešení.* Půlkružnice má parametrizaci  $[x(t), y(t)] = [\cos t, \sin t]$  pro  $t \in [0, \pi]$ . Tyto funkce mají spojitou derivaci  $[x'(t), y'(t)] = [-\sin t, \cos t]$  na  $[0, \pi]$ , a proto je délka půlkružnice rovna

$$d = \int_0^{\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{\pi} 1 dt = [t]_0^{\pi} = \boxed{\pi} .$$

(Obvod celé jednotkové kružnice je pak zřejmě  $2\pi$ .) □

**Příklad 120.** Určete obvod kružnice o poloměru  $r > 0$ .

*Řešení.* Kružnice má parametrizaci  $[x(t), y(t)] = [r \cos t, r \sin t]$  pro  $t \in [0, 2\pi]$ . Tyto funkce mají spojitou derivaci  $[x'(t), y'(t)] = [-r \sin t, r \cos t]$  na  $[0, 2\pi]$ , a proto je obvod kružnice roven

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = [rt]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi r} . \end{aligned}$$

□

Graf funkce  $f(x)$  můžeme chápat jako množinu bodů  $[x, f(x)]$ , tedy je to speciální případ křivky v rovině, která má parametrizaci  $[t, f(t)]$  pro  $t \in [a, b]$  (v tomto případě tuto parametrizaci ale píšeme s proměnnou  $x$ ). A protože má tato parametrizace derivaci  $[(t)', f'(t)] = [1, f'(t)]$ , dostáváme z Tvzení 7 následující vzorec.

**Důsledek 9 (Délka grafu).** *Má-li funkce  $f(x)$  spojitou derivaci na intervalu  $[a, b]$ , potom má její graf na intervalu  $[a, b]$  konečnou délku a platí*

$$d(\text{Gr } f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx .$$

**Příklad 121.** Určete délku grafu paraboly  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  na intervalu  $[0, 1]$ .

*Řešení.* Délka grafu bude zřejmě číslo mezi  $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$  a  $1 + \frac{1}{2} = 1.5$  (viz obr.). Protože je  $f'(x) = x$  spojitá funkce na intervalu  $[0, 1]$ , je délka tohoto grafu rovna

$$d(\text{Gr } f) = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} \, dx .$$

Ověřte si zpětným derivováním, že primitivní funkce k funkci  $\sqrt{1 + x^2}$  je

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) .$$

A proto je podle Newton–Leibnizova vzorce (45)

$$\begin{aligned} d(\text{Gr } f) &= \left[ \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{2}1\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2}) \right) - \left( \frac{1}{2}0\sqrt{1} + \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{=0} \right) \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 1.15. \end{aligned}$$

□

• **Objem rotačního tělesa.** Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce  $f(x)$  a osou  $x$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[a, b]$  (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci  $f(x)$  (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu  $[a, b]$ , tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Zvolíme-li nějaké dělení  $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  intervalu  $[a, b]$ , potom má jeden „objemový dílek“ šířku  $x_k - x_{k-1}$  a poloměr  $f(c_k)$  (viz obr.). Tedy objem takového dílu je

$$\pi [f(c_k)]^2 (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{obsah „podstavy“ krát šířka}).$$

Objem celého rotačního tělesa je pak aproximován číslem

$$\sum_{k=1}^n \pi [f(c_k)]^2 (x_k - x_{k-1}) = \text{Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem } \pi [f(c_k)]^2 .$$

Tedy pro  $n \rightarrow \infty$  (zvyšující se počet dělicích bodů a normu dělení  $n(D) \rightarrow 0$ ) dostáváme následující vzorec.

**Tvrzení 8 (Objem rotačního tělesa).** *Nechť  $f(x)$  je spojitá nezáporná funkce na intervalu  $[a, b]$ . Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi  $\text{Gr } f$  a osou  $x$  na intervalu  $[a, b]$  kolem osy  $x$ , je*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx .$$

**Příklad 122.** Určete objem jednotkové koule.

*Řešení.* Objem určíme jako dvojnásobek objemu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[0, 1]$ . Je tedy

$$V = 2\pi \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx = 2\pi \int_0^1 (1-x^2) \, dx = 2\pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi} .$$

□

**Příklad 123.** Určete objem koule o poloměru  $r$ .

*Řešení.* Objem určíme jako dvojnásobek objemu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce  $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[0, r]$ . Je tedy

$$V = 2\pi \int_0^r (\sqrt{r^2-x^2})^2 \, dx = 2\pi \int_0^r (r^2-x^2) \, dx = 2\pi \left[ r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3} .$$

□

**Příklad 124.** Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací řetězovky  $f(x) = \cosh x$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[-1, 1]$ .

*Řešení.* Funkce  $\cosh x$  je zadána pomocí exponenciální funkce jako aritmetický průměr  $e^x$  a  $e^{-x}$ , tj.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

Je tedy

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \cosh^2 x \, dx = \pi \int_{-1}^1 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \, dx = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 (e^{2x} + \underbrace{2e^x e^{-x}}_{=2} + e^{-2x}) \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} \left[ \left( \frac{e^2}{2} + 2 + \frac{e^{-2}}{-2} \right) - \left( \frac{e^{-2}}{2} - 2 + \frac{e^2}{-2} \right) \right] \\ &= \boxed{\frac{\pi}{4} (e^2 - e^{-2} + 4)} \approx 8.83865 . \end{aligned}$$

Uvedený integrál lze spočítat i pomocí hyperbolických funkcí. Objem je pak

$$V = \pi [(\cosh 1)(\sinh 1) + 1] \approx 8.83865 .$$

□

• **Povrch (obsah pláště) rotačního tělesa.** Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci  $f(x)$  (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu  $[a, b]$ , tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Zvolíme-li nějaké dělení  $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  intervalu  $[a, b]$ , potom má jeden dílek „šířku“ (délka grafu)

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} (x_k - x_{k-1}) \\ &\approx \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

a poloměr  $f(c_k)$  (viz obr.). Tedy obsah pláště takového dílu je

$$2\pi f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} (x_k - x_{k-1}).$$

Obsah pláště celého rotačního tělesa je pak aproximován číslem

$$\sum_{k=1}^n 2\pi f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} (x_k - x_{k-1})$$

= Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem

$$2\pi f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}.$$

Tedy pro  $n \rightarrow \infty$  (zvyšující se počet dělicích bodů a normu dělení  $n(D) \rightarrow 0$ ) dostáváme následující vzorec.

**Tvrzení 9 (Obsah pláště rotačního tělesa).** *Nechť  $f(x)$  je nezáporná funkce se spojitou derivací  $f'(x)$  na intervalu  $[a, b]$ . Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky  $\text{Gr } f$  na intervalu  $[a, b]$  kolem osy  $x$ , je*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Příklad 125.** Určete povrch jednotkové koule.

*Řešení.* Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[0, 1]$ . Protože platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{\frac{(1 - x^2) + x^2}{1 - x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_0^1 1 dx = 4\pi [x]_0^1 = \boxed{4\pi}. \end{aligned}$$

□

**Příklad 126.** Určete povrch koule o poloměru  $r$ .

*Řešení.* Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[0, r]$ . Protože platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{(r^2 - x^2) + x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_0^r r dx = 4\pi [rx]_0^r = \boxed{4\pi r^2}. \end{aligned}$$

□

**Příklad 127.** Určete obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací řetězovky  $f(x) = \cosh x$  kolem osy  $x$  na intervalu  $[-1, 1]$ .

*Řešení.* Funkce  $\cosh x$  je zadána v Příkladu 124. Hodnota v krajních bodech intervalu  $[-1, 1]$  je  $\cosh(\pm 1) = (e + 1/e)/2 \approx 1.54$ . Protože platí

$$f'(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{a} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \cosh x \underbrace{\sqrt{1 + (\sinh x)^2}}_{=\cosh x} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \cosh^2 x dx \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2} (e^2 - e^{-2} + 4)} \approx 17.6773, \end{aligned}$$

viz Příklad 124, kde jsme vypočítali integrál  $\int_{-1}^1 \cosh^2 x dx$ .

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že řetězovka vytváří těleso s nejmenším pláštěm mezi všemi rotačními tělesy, jejichž „generující graf“ začíná a končí ve stejných bodech, jako uvedená řetězovka (viz obr.). To se využívá např. při konstrukci visutých mostů (souvisí to s minimalizací potenciální energie použitého materiálu).



OBRÁZEK 2. Obrázek vpravo převzat z <http://goo.gl/M55vmh>.

Více např. na

<http://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>,  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Catenoid>,  
[http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves\\_dir/Catenary\\_dir/catenary.html](http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Catenary_dir/catenary.html).

□

• Další aplikace určitého integrálu. Kromě geometrických aplikací (obsah plochy, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělesa) se určitý integrál využívá v mnoha fyzikálních aplikacích, např.

- těžiště rovinného obrazce,
- těžiště tělesa,
- obsah plochy, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělesa v polárních či parametrických souřadnicích.

Podrobnosti jsou např. ve skriptech [8, Odstavec 6.2].

**3.10. Nevlastní integrály.** Stejně tak jako  $\int_a^b f$  je plocha mezi grafem (ohraňené) funkce  $f(x)$  a osou  $x$  na (konečném) intervalu  $[a, b]$ , můžeme chtít najít tuto plochu na neohraňeném intervalu  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, \infty)$ , případně i pro neohraňenou funkci  $f(x)$ . Dostáváme se tak k pojmu nevlastního integrálu

$$\int_a^\infty f, \quad \int_{-\infty}^b f, \quad \int_{-\infty}^\infty f.$$

Přitom, jak uvidíme, všechna pravidla pro výpočet integrálu zůstávají zachována, jen je potřeba dávat pozor na neurčité výrazy (obsahující symbol  $\infty$ ) a ty pak spočítat pomocí limity.

**Příklad 128.** Tyto příklady berte jako motivační.

(a) Plocha pod ohraničenou funkcí  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  na intervalu  $[1, \infty)$  je (viz obr.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = -\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\substack{\text{ve smyslu} \\ \text{limity}}} - (-1) = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

(b) Plocha pod neohraničenou funkcí  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  na intervalu  $(0, 1]$  je (viz obr.)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_0^1 = (-1) - \left( -\underbrace{\frac{1}{0^+}}_{\substack{\text{ve smyslu} \\ \text{limity}}} \right) = -1 + \infty = \boxed{\infty}.$$

(c) Plocha pod ohraničenou funkcí  $f(x) = \frac{1}{x}$  na intervalu  $[1, \infty)$  je (viz obr.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \underbrace{\ln \infty}_{\substack{\text{ve smyslu} \\ \text{limity}}} - \ln 1 = \infty - 0 = \boxed{\infty}.$$

□

### Definice 22 (Nevlastní integrál 1. druhu).

- Nechť je funkce  $f(x)$  definována na intervalu  $[a, \infty)$ . Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = L, \quad (46)$$

potom říkáme, že nevlastní integrál  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  konverguje a klademe

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = L.$$

Pokud existuje limita v (46) jako nevlastní (tj.  $L = \pm\infty$ ), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \pm\infty.$$

- Nechť je funkce  $f(x)$  definována na intervalu  $(-\infty, b]$ . Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = L, \quad (47)$$

potom říkáme, že nevlastní integrál  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  konverguje a klademe

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = L.$$

Pokud existuje limita v (47) jako nevlastní (tj.  $L = \pm\infty$ ), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \pm\infty.$$

□

Tedy příklady nevlastních integrálů v Příkladu 128 jsou spočítány matematicky správně, jen jsme pro zápis výpočtu měli zvolit symbol limity. Tento symbol limity budeme uvádět, jen až je to nezbytně nutné.

**Příklad 129.** Viz Příklad 128.

(a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \left( -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

(c)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \right) - \ln 1 = \boxed{\infty}.$$

□

**Příklad 130.** Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků (viz Odstavec 1.6)

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a \neq 0.$$

*Řešení.* Podle věty o substituci v určitém integrálu je

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx & \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(t + a^2)^2} dt = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{t + a^2} \right]_0^{\infty} \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\left( -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t + a^2} \right)}_{=0} - \left( -\frac{1}{a^2} \right) \right\} = \boxed{\frac{1}{2a^2}}. \end{aligned}$$

□

**Poznámka 30.** Někdy lze podobným způsobem vypočítat i nevlastní integrál přes (oboustranně) nekonečný interval  $(-\infty, \infty)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

i když definice takového integrálu zahrnuje limitu funkce dvou proměnných

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{[a,b] \rightarrow [-\infty, \infty]} \int_a^b f(x) dx,$$

kterou jsme v tomto semestru neprobírali (viz MB103).

Tomuto problému se lze ale vyhnout za použití pravidla návaznosti (Věta 32(vii)), neboť platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

kde  $a \in \mathbb{R}$  je pevně zvolené číslo (např.  $a = 0$ ) a kde jsou zmíněné integrály nevlastní a 1. druhu.  $\square$

**Příklad 131.** V pravděpodobnosti a statistice (viz asi MB104) se často používá nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

přičemž uvedená funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

se nazývá hustota pravděpodobnosti (standardního) normálního rozdělení (viz obr.). Protože je tato funkce  $f(x)$  sudá, zřejmě je pak

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \approx 1.2533.$$

Současně si uvědomte, že primitivní funkce k této funkci  $f(x)$  je vyšší funkce (tedy nelze ji vypočítat pomocí elementárních funkcí, viz Poznámka 23).  $\square$

Podobně jako v Definicí 22 můžeme postupovat i pro funkci  $f(x)$ , která je neohraničená v okolí bodu  $a$  nebo  $b$ .

**Definice 23 (Nevlastní integrál 2. druhu).**

- Nechť je neohraničená funkce  $f(x)$  definována na intervalu  $(a, b]$ . Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(x) dx = L, \quad (48)$$

potom říkáme, že nevlastní integrál  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x) dx = L.$$

Pokud existuje limita v (48) jako nevlastní (tj.  $L = \pm\infty$ ), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^b f(x) dx = \pm\infty.$$

- Nechť je neohraničená funkce  $f(x)$  definována na intervalu  $[a, b)$ . Existuje-li vlastní (levostranná) limita

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^{\beta} f(x) dx = L, \quad (49)$$

potom říkáme, že nevlastní integrál  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x) dx = L.$$

Pokud existuje limita v (49) jako nevlastní (tj.  $L = \pm\infty$ ), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^b f(x) dx = \pm\infty.$$

□

Opět budeme symbol limity budeme uvádět, jen až je to nezbytně nutné.

**Příklad 132.** Viz Příklad 128(b).

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_0^1 = (-1) - \underbrace{\left( -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \right)}_{=\infty} = \boxed{\infty}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x}_{=-\infty} = \boxed{\infty}.$$

□

**Příklad 133.** Určete plochu pod mezi grafem funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  na intervalu  $(-1, 1)$ .

*Řešení.* Funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  je na intervalu  $(-1, 1)$  neohraničená a sudá (viz obr.). Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu  $[0, 1)$  (nevlastní integrál 2. druhu):

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 [\arcsin x]_0^1 = 2 \left( \underbrace{\left( \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x \right)}_{=\arcsin 1} - \arcsin 0 \right) \\ &= 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v tomto případě vlastně limita ve výpočtu ani není potřeba, protože je primitivní funkce  $F(x) = \arcsin x$  k funkci  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  spojitá v bodě  $x = 1$  (viz Věta 37). Tedy tento konkrétní příklad lze spočítat i přímo jako

$$P = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \boxed{\pi}. \quad (50)$$

Všimněte si také, že

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 + [(\sqrt{1-x^2})']^2},$$

a tedy výpočet uvedený v (50) je shodný s výpočtem délky jednotkové půlkružnice (srovnejte s Příkladem 119).  $\square$

Pro výpočet nevlastních integrálů tedy budeme používat stejné metody jako pro výpočet (klasických) určitých integrálů (např. metodu per-partes, viz Věta 38).

**Příklad 134.** V teorii pravděpodobnosti a statistiky (viz MB103) se používá funkce

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{pro } x \in (0, \infty),$$

která udává hustotu tzv. exponenciálního rozdělení, kde  $\lambda > 0$  je pevně zvolený parametr. Potom můžeme spočítat

$$\int_0^\infty f(x) dx = [-e^{-\lambda x}]_0^\infty = \left( -\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \right) - (-e^0) = \left( -\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda x}}}_{=0} \right) - (-1) = \boxed{1},$$

a také

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x f(x) dx &= \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx \quad \left| \begin{array}{l} u' = \lambda e^{-\lambda x} \\ v = x \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u = -e^{-\lambda x} \\ v' = 1 \end{array} \right. \\ &= [-x e^{-\lambda x}]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x}) dx = \left( -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} \right) - (-0 e^0) + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &\stackrel{\Gamma_{\text{Hosp.}}}{=} \left( -\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}}_{=0} \right) + \left[ \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty = \left( -\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}}_{=0} \right) - \left( -\frac{1}{\lambda} \right) = \boxed{\frac{1}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Např. volbou parametru  $\lambda = 1$  dostáváme, že plocha pod funkcí  $x e^{-x}$  na intervalu  $(0, \infty)$  je rovna

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \boxed{1}.$$

□

## 4. NEKONEČNÉ ŘADY

V této kapitole se budeme věnovat součtům nekonečně mnoha sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit geometrická řada, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce  $f(x)$  pro libovolně velká  $n$  (viz Odstavec 2.20 a zejména Poznámka 18). To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů „nekonečného stupně“, tedy pomocí nekonečných mocninných řad.

4.1. **Nekonečné číselné řady.** V tomto odstavci budeme pracovat s posloupností reálných čísel

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{případně s } \{b_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

**Definice 24 (Nekonečná řada).** Součet tvaru

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

nazýváme nekonečnou (číselnou) řadou. Číslo  $a_n$  se nazývá  $n$ -tý člen.

Číslo

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

se nazývá  $n$ -tý částečný součet této nekonečné řady. □

**Poznámka 31.** Všimněte si, že v Definici 24 je  $n$ -tý člen  $a_n$  v podstatě  $(n+1)$ -ní v pořadí, protože posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  a řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  začínáme indexovat od  $n = 0$ . V literatuře je možné nalézt i indexování od  $n = 1$ , ale zde (a ve skriptech [8, str. 279]) budeme indexovat od  $n = 0$ . □

Nejprve si jako motivaci zopakujme úvahy o geometrické řadě.

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde  $a, q \in \mathbb{R}$  jsou pevně zvolená čísla. Tedy je to nekonečná řada, kde  $a_n := aq^n$  pro  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Číslo  $q$  se nazývá kvocient geometrické řady, přičemž  $q$  může být kladné či záporné (viz Příklad 135). Posloupnost částečných součtů pro geometrickou řadu odvodíme snadno:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n, \quad \Rightarrow \quad qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n + aq^{n+1}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$s_n - qs_n = a - aq^{n+1}, \quad \Rightarrow \quad s_n(1 - q) = a(1 - q^{n+1}).$$

Je-li  $q = 1$ , potom je zřejmě  $s_n = (n+1)a$ .

Je-li  $q \neq 1$ , potom je

$$s_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1. \quad (51)$$

**Příklad 135.** Určete posloupnost částečných součtů dané geometrické řady:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n} + \cdots$$

*Řešení.*

(a) Protože je  $a = 1$  a  $q = \frac{1}{2}$  je podle vzorce (51) (nebo odvozeno přímo pro tuto konkrétní řadu)

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \boxed{2 - \frac{1}{2^n}}.$$

(b) Protože je  $a = 1$  a  $q = -\frac{1}{3}$  je podle vzorce (51) (nebo odvozeno přímo pro tuto konkrétní řadu)

$$s_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^n} = \boxed{\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4 \cdot 3^n}}.$$

□

Chování posloupnosti částečných součtů, přesněji limita této posloupnosti, zřejmě určuje chování celé nekonečné řady.

**Definice 25 (Konvergence, divergence, oscilace nekonečné řady).** Existuje-li vlastní limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , potom říkáme, že nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje k číslu  $s$ , nebo také že má součet  $s$ , a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$ , potom říkáme, že nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverguje k  $\pm\infty$  a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Pokud limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  neexistuje, potom říkáme, že nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  osciluje. □

**Příklad 136.**

- Geometrická řada s  $a = 0$  (a  $q \in \mathbb{R}$  libovolným) zřejmě konverguje (k 0), protože v tomto případě je  $s_n = 0$ .
- Geometrická řada s  $a \neq 0$  a  $q = 1$  zřejmě diverguje (k  $\pm\infty$  podle znaménka čísla  $a$ ), protože v tomto případě je  $s_n = (n+1)a$ .
- Geometrická řada s  $a \neq 0$  a  $q = -1$  zřejmě osciluje, protože je v tomto případě  $s_n = \{a, 0, a, 0, a, 0, \dots\}$  a limita této posloupnosti neexistuje.

□

**Příklad 137.** Rozhodněte o konvergenci a případně určete součet dané geometrické řady

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

*Řešení.* (a) Protože je  $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$  (viz Příklad 135(a)), je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\rightarrow 0} \right) = \boxed{2},$$

tj. uvedená řada konverguje. Konvergenci této řady lze také ukázat názorně na obrázku.

(b) Protože je  $s_n = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4 \cdot 3^n}$  (viz Příklad 135(b)), je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{4 \cdot 3^n}}_{\rightarrow 0} \right) = \boxed{\frac{3}{4}},$$

tj. uvedená řada konverguje. □

V Příkladu 136 jsme vyšetřili geometrickou řadu s  $|q| = 1$ . Ve vzorci (51) pro  $n$ -tý částečný součet geometrické řady se vyskytuje posloupnost  $q^{n+1}$ , která zřejmě konverguje k 0 pro  $|q| < 1$ , konverguje k  $\infty$  pro  $q > 1$ , a nemá limitu pro  $q < -1$ . Odsud tedy plyne jednoduchá podmínka pro konvergenci geometrické řady.

**Tvrzení 10 (Konvergence a součet geometrické řady).** *Nechť  $a \neq 0$ . Potom geometrická řada  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  konverguje  $\Leftrightarrow |q| < 1$ . V tomto případě (a také v případě  $a = 0$ ) je pak její součet*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}}, \quad |q| < 1.$$

**Příklad 138.** V Příkladech 135 a 137 je

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

□

**Příklad 139.** Z výšky  $a = 2$  metry nad rovným povrchem pustíme kouli. Pokaždé, když koule dopadne na povrch z výšky  $h$ , odrazí se do výšky  $qh = \frac{h}{3}$  (tedy  $q = \frac{1}{3}$ ). Určete celkovou vzdálenost, kterou koule urazí při nekonečně mnoha takových doskocích.

*Řešení.* Celková vzdálenost je (viz obr.)

$$s = 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{27} + \dots = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Jedná se tedy o geometrickou řadu, kde  $a = \frac{4}{3}$  a  $q = \frac{1}{3}$ . Podle Tvzení 10 je tedy

$$s = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \boxed{4 \text{ metry}}.$$

Přepočítejte si tento příklad s obecnými parametry  $a > 0$  a  $q \in (0, 1)$ .

[Řešení je pak  $s = a \frac{1+q}{1-q}$ .]

□

Někdy se při výpočtu  $n$ -tého částečného součtu  $s_n$  mnoho výrazů „pokrátí“.

**Příklad 140.** Rozhodněte o konvergenci a případně určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

*Řešení.* Protože platí (viz rozklad na parciální zlomky v Odstavci 1.6)

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

je  $n$ -tý částečný součet roven

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

A proto uvedená nekonečná řada konverguje a její součet je

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}.$$

□

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně zmenšovat (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

**Věta 40 (Nutná podmínka konvergence řady).** *Jestliže nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje, potom nutně platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (52)$$

To znamená, že pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  je různá od nuly nebo pokud tato limita neexistuje, potom nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  nekonverguje.

**Příklad 141.**

(a) Nekonečná řada

$$1 + 2 + 3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

nekonverguje, protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$ . Zřejmě tato řada diverguje k  $\infty$ .

(b) Nekonečná řada

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

nekonverguje, protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$  neexistuje (a jedná se o neohrazenou posloupnost). Zřejmě tato řada osciluje.

(c) Nekonečná řada

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

nekonverguje, protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  neexistuje (a jedná se o ohraničenou posloupnost). Zřejmě tato řada osciluje. Tato řada je geometrická s  $q = -1$  a  $a = 1$ , viz Příklad 136.

(d) Nekonečná řada

$$-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} - \frac{4}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{2n+1}$$

nekonverguje, protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+1} = -\frac{1}{2} \neq 0$ . Zřejmě tato řada diverguje k  $-\infty$ . □

Podmínka (52) je obecně pouze podmínkou nutnou pro konvergenci nekonečné řady. Existují tedy nekonečné řady, které nekonvergují, ale podmínku (52) splňují.

**Příklad 142.**

(a) Nekonečná řada

$$\underbrace{1}_{1 \text{ člen}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ členy}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ členy}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ členů}} + \dots$$

nekonverguje, přestože  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Zřejmě tato řada diverguje k  $\infty$ .

(b) Jak ukážeme později (viz Příklad 146), tzv. harmonická řada

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

nekonverguje, přestože  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . V Příkladu 146 ukážeme, že tato řada diverguje k  $\infty$ . □

Pro konvergentní (a částečně i divergentní) nekonečné řady platí následující algebraická pravidla.

**Věta 41 (Pravidla pro nekonečné řady).** *Nechť nekonečné řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergují a nechť platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$$

(i) *Pravidlo konstantního násobku: pro libovolné  $c \in \mathbb{R}$  nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$  konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot A.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu: nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B.$$

**Příklad 143.** Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n}.$$

*Řešení.* Podle Věty 41(ii) je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n},$$

neboť obě uvedené nekonečné řady konvergují. Jsou to totiž geometrické řady s  $a = 1$  a s  $q = \frac{1}{2}$ , resp. s  $q = \frac{1}{6}$ , viz Tvzení 10. Je tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

□

**Poznámka 32.** Pokud některá z řad diverguje k  $\pm\infty$ , chová se součtová/rozdílová řada podle pravidel pro „počítání s nekonečny“, jako např.

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad \pm\infty \pm B = \pm\infty, \quad A \pm \infty = \pm\infty, \quad \dots$$

Např. tedy jestliže řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  divergují obě k  $\infty$  nebo obě k  $-\infty$ , potom nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$  také diverguje k  $\pm\infty$ .

Samozřejmě, výrazy typu  $\infty - \infty$  či  $-\infty + \infty$  jsou neurčité a tímto způsobem je vyčíslit nelze. □

Ve Větě 41 se nic neříká o součinu (a podílu) nekonečných řad. Tato problematika je mnohem složitější, než se na první pohled zdá, a kolem součinu řad existuje celá teorie (protože existují různé součiny nekonečných řad). Uvědomte si totiž, že při násobení mnohočlenů platí

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ = a_0b_0 + a_0b_1 + \dots + a_0b_n + a_1b_0 + a_1b_1 + \dots + a_1b_n + \dots + a_nb_n,$$

tedy dostáváme nejen „diagonální součiny“  $a_i b_i$ , ale také všechny „smíšené součiny“  $a_i b_j$ . A pro součin takovýchto nekonečných mnohočlenů (tedy pro součin nekonečných řad) bude situace ještě mnohem složitější, protože bude záležet na tom, jakým způsobem výsledný součet jednotlivých součinů uspořádáme (srovnejte s Příklady 159 a 160 uvedenými dále).

**4.2. Nekonečné řady s nezápornými členy.** Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s nezápornými členy je její posloupnost částečných součtů neklesající, tj.

$$s_n = a_0 + \dots + a_n, \quad s_{n+1} = a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_n \leq s_{n+1}}$$

(jednoduše proto, že do  $s_{n+1}$  přidáváme nezápornou hodnotu). A pokud je tedy neklesající posloupnost  $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$  shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k  $\infty$  (tj. nemůže divergovat k  $-\infty$  ani oscilovat).

**Věta 42 (Srovnávací kritérium).** *Nechť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  a  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  jsou posloupnosti nezáporných čísel, pro které platí*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{pro všechna } n = N, N+1, N+2, \dots \quad (53)$$

pro nějaké  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

- (i) *Jestliže  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konverguje, potom také konverguje řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .*
- (ii) *Jestliže  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverguje k  $\infty$ , potom také řada  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  diverguje k  $\infty$ .*

Nerovnost (53) nemusí nutně platit pro všechna  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Uvedený předpoklad říká, že musí být splněna od „jistého indexu počínaje“. Pro použití srovnávacího kritéria je zřejmě potřeba mít „v zásobě“ nějaký soubor nekonečných řad, o kterých víme, že jsou konvergentní/divergentní.

**Příklad 144.** Nekonečná řada

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konverguje podle Věty 42(i) (ve které můžeme vzít  $N = 0$ ), protože všechny její členy lze shora omezit příslušnými členy konvergentní řady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Pro součet uvedené řady pak zřejmě platí odhad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

□

**Příklad 145.** Nekonečná řada

$$\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

diverguje k  $\infty$  podle Věty 42(ii) (ve které můžeme vzít  $N = 3$ ), protože její členy lze zdola omezit příslušnými členy (divergentní) harmonické řady, tj. platí

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \text{pro všechna } n \geq 3.$$

□

Dále uvedeme tři nejznámější kritéria (Věty 43, 44 a 45) pro konvergenci/divergenci nekonečných řad s nezápornými či kladnými členy.

**Věta 43 (Integrální kritérium).** *Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť  $f(x)$  je funkce definovaná na intervalu  $[N, \infty)$  pro nějaké  $N \in [0, \infty)$ , která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí*

$$f(n) = a_n \quad \text{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje} &\Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x) \, dx \text{ konverguje,} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverguje k } \infty &\Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x) \, dx = \infty. \end{aligned}$$

V integrálním kritériu se používá nevlastní integrál 1. druhu, viz Definice 22.

**Příklad 146.** Harmonická řada (viz Příklad 142(b))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k  $\infty$  podle Věty 43, protože pro funkci  $f(x) := \frac{1}{x}$  je na intervalu  $[1, \infty)$  kladná, klesající a platí  $f(n) = \frac{1}{n}$  pro  $n \geq 1$ , přičemž je nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx = \infty,$$

viz Příklad 129(c), resp. Příklad 128(c).

□

**Příklad 147.** Určete, pro které mocniny  $p \in \mathbb{R}$  nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konverguje či diverguje.

*Řešení.*

- Pro  $p < 0$  je jedná o řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} n^q$ , kde  $q := -p > 0$ . Tato řada nespĺňuje nutnou podmínku konvergence (52), a proto nekonverguje. Protože se jedná o řadu s nezápornými členy, tak tato řada diverguje k  $\infty$ .
- Pro  $p = 0$  se jedná o řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ , která zřejmě diverguje k  $\infty$ .
- Pro  $p > 0$  je funkce  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  na intervalu  $[1, \infty)$  kladná, klesající a platí  $f(n) = \frac{1}{n^p}$  pro  $n \geq 1$ . Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

- Pro  $p = 1$  je jedná o harmonickou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , která diverguje k  $\infty$  (viz Příklad 146).
- Pro  $p \neq 1$  máme

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{\infty} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p}.$$

Uvedená limita závisí na tom, zda je exponent  $1 - p$  kladný nebo záporný, protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \infty, & \text{pro } 1 - p > 0, \\ 0, & \text{pro } 1 - p < 0. \end{cases}$$

A proto je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty, & \text{pro } p < 1, \text{ tj. tento nevlastní integrál diverguje k } \infty, \\ \frac{1}{p-1}, & \text{pro } p > 1, \text{ tj. tento nevlastní integrál konverguje.} \end{cases}$$

Podle integrálního kritéria (Věta 43 s  $N = 1$ ) tedy platí, že pro  $p > 1$  řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  konverguje a pro  $p \in (0, 1)$  tato řada diverguje k  $\infty$ .

Celkově jsme tedy ukázali, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \boxed{\text{diverguje k } \infty \text{ pro } p \leq 1 \text{ a konverguje pro } p > 1}.$$

□

**Příklad 148.** Zejména tedy konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

protože v Příkladu 147 vezmeme  $p = 2$ .

Součet této řady určíme v Příkladu 179.

Dále, protože je  $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 42(i)) také konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ , viz Příklad 140. □

**Věta 44 (Podílové kritérium).** *Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

*Potom*

- (i) tato řada konverguje, pokud je  $q < 1$ ,
- (ii) tato řada diverguje k  $\infty$ , pokud je  $q > 1$  nebo  $q = \infty$ ,
- (iii) tento test nelze rozhodnout, pokud je  $q = 1$ .

V podílovém kritériu se tedy vyskytuje podíl dvou po sobě jdoucích členů nekonečné řady. A je zřejmé jedno, jestli je řada indexována od  $n = 0$  nebo od  $n = 1$  (nebo případně od jiného indexu).

**Příklad 149.**

(a) Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$$

platí

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left( \frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \boxed{\frac{1}{e} < 1}, \end{aligned}$$

přičemž ve výpočtu jsme použili limitu definující Eulerovo číslo  $e$  (viz Příklad 17). Uvedená řada tedy konverguje podle podílového kritéria (Věta 44(i)).

(b) Pro geometrickou řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ , kde  $a > 0$  a  $q > 0$ , platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{aq^{n+1}}{aq^n} = q \rightarrow q,$$

a proto podle podílového kritéria (Věta 44) geometrická řada s kladnými členy konverguje pro  $q < 1$  a diverguje k  $\infty$  pro  $q > 1$ . Viz také Tvzení 10. □

**Příklad 150.** Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

platí (viz výpočet v Příkladu 149(a))

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow \boxed{e > 1},$$

a proto uvedená řada diverguje k  $\infty$  podle podílového kritéria (Věta 44(ii)). □

**Příklad 151.** Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots, \quad \text{tj.} \quad a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{2n}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud je vidět, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  neexistuje, a proto podílové kritérium vůbec nelze použít.

Všimněte si, že lze psát

$$a_n = \frac{[(n+1) \bmod 2] + (n \bmod 2) \cdot n}{2^n},$$

kde funkce  $x \bmod 2$  dává zbytek po dělení čísla  $x$  číslem 2 (tedy jedničku, pokud je  $x$  liché, a nulu, pokud je  $x$  sudé).  $\square$

**Věta 45 (Odmocninové kritérium).** *Nechť  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna  $n \geq N$  pro nějaké  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Potom

- (i) tato řada konverguje, pokud je  $q < 1$ ,
- (ii) tato řada diverguje k  $\infty$ , pokud je  $q > 1$  nebo  $q = \infty$ ,
- (iii) tento test nelze rozhodnout, pokud je  $q = 1$ .

**Příklad 152.** Pro nekonečnou řadu v Příkladu 151 platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy platí nerovnosti

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Limita na pravé straně se spočte přes exponenciální funkci a l'Hospitalovo pravidlo (Věta 15):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} \stackrel{\text{Věta 5(ii)}}{=} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} \quad \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{l'Hosp.}}{=} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1. \quad (54)$$

Z věty o třech limitách (Věta 4) potom plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \boxed{\frac{1}{2} < 1}.$$

Proto podle odmocninového kritéria (Věta 45(i)) uvedená řada konverguje.  $\square$

**Poznámka 33.** V Příkladech 151 a 152 jsme viděli, že někdy podílové kritérium k výsledku nevede zatímco odmocninové kritérium ano (pro nekonečnou řadu s kladnými členy). To platí i obecně, neboť pro libovolnou posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  kladných čísel platí nerovnosti

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

To znamená, že pokud existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ , potom také existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  a tyto dvě limity jsou si rovny.

Tedy pokud je podílové kritérium nerozhodnutelné (tj. platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ), potom je také odmocninové kritérium nerozhodnutelné (tj. platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ). Říkáme, že odmocninové kritérium je silnější, než podílové kritérium (každý příklad, který lze spočítat podílovým kritériem, lze spočítat i odmocninovým kritériem, ale ne naopak).  $\square$

**Příklad 153.** Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} = \frac{2}{1^2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4}{4^2} + \frac{2^5}{5^2} + \dots$$

platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \stackrel{(9)}{\rightarrow} \frac{2}{1^2} = \boxed{2 > 1},$$

a proto podle odmocninového kritéria (Věta 45(ii)) uvedená řada diverguje k  $\infty$ .

Všimněte si také, že uvedená řada nespĺňuje nutnou podmínku konvergence (52), neboť je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} \quad \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{r'Hosp.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{2n} \quad \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{r'Hosp.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot (\ln 2)^2}{2} = \infty \neq 0.$$

Tedy uvedená řada podle Věty 40 nekonverguje. Protože se ale jedná o řadu s kladnými členy, musí tato řada potom divergovat k  $\infty$ .  $\square$

**Příklad 154.** Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  (viz Příklad 147), protože pro podílové kritérium je

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p \stackrel{\text{Věta 5(ii)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right)^p = 1^p = 1,$$

a pro odmocninové kritérium je

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p \stackrel{\text{Věta 5(ii)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p = \frac{1}{1^p} = 1.$$

Zde jsme opět použili limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , viz (54).  $\square$

**4.3. Alternující řady.** Pro srovnání a úplnost uvedme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Nechť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  je posloupnost nezáporných čísel. Potom se nekonečná řada

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{případně} \quad -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

nazývá alternující řada.

**Příklad 155.**

(a) Nekonečná řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

je alternující a nazývá se alternující harmonická řada nebo též Leibnizova řada.

(b) Každá geometrická řada, ve které je  $a \neq 0$  a  $q < 0$ , je zřejmě alternující.

□

Z Věty 40 víme, že každá konvergentní řada, a tedy i každá alternující konvergentní řada, musí splňovat podmínku (52). Pro alternující řady můžeme ale říct mnohem více. Z podmínky (52) se nyní stává nutná a postačující podmínka pro konvergenci alternující řady.

**Věta 46 (Leibnizovo kritérium konvergence alternující řady).** *Jestliže je  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  nerostoucí posloupnost kladných čísel, potom nekonečná alternující řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \text{platí (52), tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = 0.$$

*Důkaz.* Vzhledem k Větě 40 stačí ukázat směr „ $\Leftarrow$ “. Protože je posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  nerostoucí, plyne odsud konvergence řady  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ , viz obr. □

**Příklad 156.** Alternující harmonická řada (viz Příklad 155(a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konverguje podle Věty 46, protože je její „generující“ posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  kladná a klesající (tudíž nerostoucí) a splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

V Příkladu 170 pak ukážeme, jaký je součet této nekonečné řady.

□

Pokud tedy posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  splňuje předpoklady Věty 46 a řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konverguje, tj.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = A$ , potom číslo  $A$  nutně leží vždy mezi dvěma po sobě následujícími částečnými součty  $s_n$  a  $s_{n+1}$ . A tedy se číslo  $A$  nemůže lišit od  $s_n$  o více, než kolik je člen  $a_{n+1}$ . Tj. musí platit odhad

$$|A - s_n| < a_{n+1}. \quad (55)$$

Ukázali jsme tedy následující užitečné tvrzení o odhadu chyby částečných součtů  $s_n$  pro alternující řadu.

**Tvrzení 11 (Odhad chyby alternující řady).** *Předpokládejme, že alternující řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  splňuje podmínky ve Větě 46 (a konverguje k číslu  $A$ ). Potom pro  $n$ -tý částečný součet*

$$s_n := a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$$

*platí odhad (55), tj.  $s_n$  aproximuje součet  $A$  této řady s chybou menší, než je absolutní hodnota prvního (do  $s_n$ ) nezahrnutého členu  $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ . Navíc, zbytek  $A - s_n$  má stejné znaménko jako tento první (do  $s_n$ ) nezahrnutý člen  $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ .*

**Příklad 157.** Pokusme se ilustrovat Tvrzení 11 na alternující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = \underbrace{1}_{a_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \underbrace{\frac{1}{128}}_{a_7} \quad \Bigg| \quad + \underbrace{\frac{1}{256}}_{a_8} - \dots,$$

jejíž součet známe. Protože se jedná o geometrickou řadu s  $a = 1$  a  $q = -\frac{1}{2}$ , je součet této řady roven číslu (viz Tvrzení 10)

$$A = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0.6666667.$$

Potom Tvrzení 11 říká, že pokud tuto řadu „ukončíme“ po osmém členu (tj.  $n = 7$ ), potom konečný součet

$$s_7 := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} = \frac{85}{128} = 0.6640625$$

aproximuje číslo  $A$  s chybou menší než je  $a_8 = \frac{1}{256} = 0.00390625$ . Skutečně,

$$|A - s_7| = \left| \frac{2}{3} - \frac{85}{128} \right| = \left| \frac{1}{384} \right| \approx 0.00260417 < 0.00390625 = a_8.$$

Přitom má rozdíl  $A - s_7 = \frac{1}{384}$  stejné znaménko jako člen  $(-1)^8 a_8 = \frac{1}{256}$ , tedy je kladný.  $\square$

**4.4. Absolutně a relativně konvergentní řady.** Nejprve si všimněme, že pokud konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

**Věta 47.** *Jestliže konverguje řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ , potom konverguje také řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .*

*Důkaz.* Zřejmě pro každé  $n$  platí nerovnosti

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Tedy pokud  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konverguje, konverguje také řada  $\sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n|$  (podle pravidla konstantního násobku, viz Věta 41(i)). A dále, podle srovnávacího kritéria (Věta 42(i)), konverguje také řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ . A protože platí rovnost

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|, \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|)}_{\text{konverguje}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}_{\text{konverguje}},$$

dostáváme řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  jako rozdíl dvou konvergentních řad. Tedy tato řada také konverguje podle pravidla rozdílu, viz Věta 41(ii).  $\square$

**Poznámka 34.** Opačná implikace ve Větě 47 zřejmě neplatí, protože např. alternující harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{konverguje (viz Příklad 156),}$$

ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{která diverguje k } \infty \text{ (viz Příklad 146).}$$

$\square$

Má tedy smysl zavést následující definici.

**Definice 26 (Absolutní a relativní konvergence).** Řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně (je absolutně konvergentní), pokud konverguje příslušná řada absolutních hodnot, tj. pokud konverguje řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ .

Jestliže nekonečná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje, ale nekonverguje absolutně, potom říkáme, že tato řada konverguje relativně (je relativně konvergentní).

(Pro termín relativní konvergence lze v literatuře najít i jiné názvy, např. konverguje neabsolutně či podmíněně).  $\square$

**Příklad 158.**

(a) Alternující harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{konverguje relativně (viz Poznámka 34).}$$

(b) Nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots \quad \text{konverguje absolutně,}$$

protože příslušná řada absolutních hodnot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \quad \text{konverguje (viz Příklad 147, kde } p = 2\text{).}$$

□

Rozdíl mezi absolutně a relativně konvergentní řadou je zejména v tom, že členy absolutně konvergentní řady můžeme libovolně přeskládávat a nejenže dostaneme opět konvergentní řadu, ale tato nová přeskládaná řada bude mít stejný součet jako řada původní.

V následující větě ukazujeme, že relativně konvergentní řada má dostatek kladných členů (tj. pokud se kladné členy sečtou, dostaneme  $+\infty$ ) i záporných členů (tj. pokud se záporné členy sečtou, dostaneme  $-\infty$ ), aby převážily libovolný konečný počet členů původní řady.

**Věta 48.** *Nechť je řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  relativně konvergentní, tj.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje, ale  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  diverguje. Označme*

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- := \min\{a_n, 0\}.$$

*Potom jsou obě nekonečné řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  divergentní, neboli*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = -\infty.$$

*Důkaz.* Z definice vyplývá, že  $a_n^+$  je rovno číslu  $a_n$ , pokud je  $a_n$  kladné, jinak je  $a_n^+ = 0$ . A naopak,  $a_n^-$  je rovno číslu  $a_n$ , pokud je  $a_n$  záporné, jinak je  $a_n^- = 0$ . Uvedené řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  jsou tedy řady kladných a záporných členů původní řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Nastává pro ně tedy právě jedna z následujících možností:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  konverguje nebo diverguje k  $+\infty$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  konverguje nebo diverguje k  $-\infty$ . Celkově je tedy možné zkombinovat tyto možnosti:

1. obě řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  konvergují,
2. řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  konverguje a řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  diverguje (k  $-\infty$ ),
3. řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  diverguje (k  $+\infty$ ) a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  konverguje,
4. obě řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  divergují.

V prvním případě, kdy obě řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$  konvergují, by konvergovaly i řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^+| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^-| = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-,$$

a proto by konvergovala i řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ . Tj. původní řada by konvergovala absolutně, což je spor s předpokladem, že řada absolutních hodnot diverguje. Ve druhém případě by byl součet původní řady roven  $-\infty$  (jakožto součet nezáporného čísla a  $-\infty$ ), což je spor s tím, že původní řada konverguje. Ve třetím případě by byl součet původní řady roven  $+\infty$  (jakožto součet nekladného čísla a  $+\infty$ ), což je spor s tím, že původní řada konverguje. Zbývá tedy poslední čtvrtá možnost, což je tvrzení věty. □

Naproti tomu členy relativně konvergentní řady nelze přeskládat vůbec. Lze totiž jednoduše ukázat, že různým přeskládáním téže relativně konvergentní řady lze vytvořit řadu divergující k  $\pm\infty$ , konvergující k libovolně předem zvolenému reálnému číslu, či řadu oscilující. To vyplývá z toho, že v relativně konvergentní řadě musí být součet všech kladných členů  $\infty$  a součet všech záporných členů  $-\infty$ , a při tom musí členy samotné konvergovat k nule (protože pro konvergentní řadu musí být splněna nutná podmínka konvergence, viz Věta 40).

**Příklad 159.** Ilustrujme tuto skutečnost například na relativně konvergentní alternující harmonické řadě (viz Příklad 158(a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (56)$$

Nejprve si všimněte, že součet všech kladných členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \infty,$$

která skutečně diverguje k  $\infty$  (např. podle integrálního kritéria, viz Věta 43).

A dále součet všech záporných členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2n} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots = -\infty,$$

která skutečně diverguje k  $-\infty$  (např. podle integrálního kritéria, viz Věta 43).

Potom vhodným přeskládáním členů alternující harmonické řady (56) lze získat nekonečnou řadu, která

(a) diverguje k  $\infty$ :

- Vezměme nejprve jeden kladný člen, tj. „součet“ je roven  $1 \boxed{\geq 1}$ .
- Přidejme nyní jeden záporný člen a tolik kladných členů, aby byl součet  $\boxed{\geq 2}$ , tj. součet je pak

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{41} \approx 2.004063454 \geq 2.$$

(K tomu je zapotřebí k té 1 přidat 20 kladných členů.)

- Potom přidejme další (druhý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet  $\boxed{\geq 3}$ .
- Potom přidejme další (třetí) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet  $\boxed{\geq 4}$ .
- Potom přidejme další (čtvrtý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet  $\boxed{\geq 5}$ .
- ...

Uvědomte si, že kladných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici, protože součet těchto kladných členů je roven  $\infty$ .

Tímto způsobem po nekonečně mnoha krocích vyčerpáme všechny kladné i všechny záporné členy, tedy původní řadu vlastně „přerovnáme“, přičemž výsledný součet evidentně roste nade všechny meze. Tedy tato přerovnaná řada diverguje k  $\infty$ .

(b) diverguje k  $-\infty$ :

- Podobně jako v části (a) vytváříme součty, které jsou postupně  $\leq -1$ ,  $\leq -2$ ,  $\leq -3$ , atd.

(c) konverguje k předem zvolenému reálnému číslu: Zvolme si nejprve nějaké číslo  $s \in \mathbb{R}$ , ke kterému má přerovnaná řada konvergovat (např.  $s = 7553$ ).

- Nejprve vezměme tolik kladných členů, až je jejich součet  $\boxed{\geq s}$ .
- Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet  $\boxed{\leq s}$ .
- Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet  $\boxed{\geq s}$ .
- Přidejme nyní tolik dalších záporných členů, až je výsledný součet  $\boxed{\leq s}$ .
- ...

Uvědomte si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici  $s$ , protože součet kladných členů je  $\infty$  a součet záporných členů je  $-\infty$ .

A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje“ zvolenou hodnotu  $s$  a současně se k číslu  $s$  nekonečně blíží. Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada konverguje právě k číslu  $s$ .

(d) osciluje: Můžeme si dokonce zvolit, mezi jakými mezemi bude přerovnaná řada oscilovat. Zvolme si proto libovolná dvě čísla  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  (např.  $a = -2$  a  $b = 3$ ).

- Nejprve vezměme tolik kladných členů, až je jejich součet  $\boxed{\geq b}$ .
- Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet  $\boxed{\leq a}$ .
- Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet  $\boxed{\geq b}$ .
- Přidejme nyní tolik dalších záporných členů, až je výsledný součet  $\boxed{\leq a}$ .
- ...

Uvědomte si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovené hranice  $b$  a  $a$ , protože součet kladných členů je  $\infty$  a součet záporných členů je  $-\infty$ .

A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje“ zvolené hodnoty  $b$  (shora) a  $a$  (zdola). Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada osciluje (mezi čísly  $a$  a  $b$ ).

Takže u relativně konvergentních řad nelze v žádném případě měnit pořadí jednotlivých členů, zatímco u absolutně konvergentních řad lze pořadí jednotlivých členů měnit libovolně.  $\square$

### Příklad 160.

- (a) V tomto příkladu si ukážeme, že i když obě řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergují, potom řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$  konvergovat nemusí.

Uvažujme nekonečné řady, kde  $a_n = b_n := (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Potom jsou příslušné nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergentní, což plyne Leibnizova kritéria (viz Věta 46), zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k  $\infty$ , viz Příklad 146.

- (b) Na druhou stranu může nastat i situace, že takováto řada součinů  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n)$  konverguje, přestože jedna z řad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nekongruje. Vezměme si např. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

která diverguje k  $\infty$  (viz Příklad 147, kde  $p = \frac{1}{2}$ ), zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konverguje podle Věty 46.  $\square$

**4.5. Mocinné řady.** V Odstavci 2.20 jsme ukázali, jak k dané funkci  $f(x)$  přiřadit Taylorův polynom stupně  $n$  (se středem v daném bodě  $x_0$ ), který aproximuje funkci  $f(x)$  v okolí bodu  $x_0$ . V Poznámce 18 jsme pak naznačili, že lze takto získat i polynom „nekonečného stupně“, neboli nekonečnou mocninou řadu.

**Definice 27 (Mocinná řada).** Nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

se nazývá mocinná řada se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

Podobně, nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

se nazývá mocinná řada se středem v bodě  $x_0$ .

Bod  $x_0$  se nazývá střed mocinné řady a čísla  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  její koefficienty.  $\square$

Jedná se vlastně o zobecnění pojmu polynom do té roviny, že nyní povolujeme i „polynomy stupně  $\infty$ “.

### Příklad 161.

(a) Pokud vezmeme všechny koeficienty  $a_n = 1$  a  $x_0 = 0$ , dostaneme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Tato řada je geometrická s počátečním členem  $a = 1$  a kvocientem  $q = x$  a tedy podle Tvzení 10 tato řada konverguje pro  $|x| < 1$ , přičemž její součet je  $\frac{1}{1-x}$ . Tuto skutečnost budeme vyjadřovat zápisem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \boxed{\frac{1}{1-x}} \quad \text{pro } x \in (-1, 1). \quad (57)$$

Všimněte si, že tato řada diverguje k  $\infty$  pro  $x = 1$  a osciluje pro  $x = -1$  a tedy otevřený interval uvedený v (57) je maximální možný interval konvergence pro tuto mocninnou řadu.

(b) Podobně, mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

je geometrická s počátečním členem  $a = 1$  a kvocientem  $q = -x$  a tedy podle Tvzení 10 tato řada konverguje pro  $|x| < 1$ , přičemž její součet je  $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ . Tedy platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \boxed{\frac{1}{1+x}} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Všimněte si, že tato řada osciluje pro  $x = 1$  a diverguje k  $\infty$  pro  $x = -1$  a tedy uvedený otevřený interval je maximální možný interval konvergence pro tuto mocninnou řadu.

(c) Mocninná řada s  $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$  a středem  $x_0 = 2$  je řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \dots,$$

která je také geometrická s počátečním členem  $a = 1$  a kvocientem  $q = -\frac{x-2}{2}$ . Tedy podle Tvzení 10 tato řada konverguje pro  $|\frac{x-2}{2}| < 1$ , tj. pro  $x \in (0, 4)$ , přičemž její součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2+x-2}{2}} = \boxed{\frac{2}{x}} \quad \text{pro } x \in (0, 4).$$

□

Z výše uvedených příkladů je vidět, že součet mocninné řady je funkce  $s(x)$  proměnné  $x$ , přičemž je potřeba určit jak součet řady  $s(x)$  tak i pro která  $x \in \mathbb{R}$  tato řada konverguje.

Při studiu konvergence mocninných řad budeme používat kritéria z Odstavce 4.2, která aplikujeme na příslušnou řadu absolutních hodnot (protože se jedná o kritéria pro nekonečné řady s nezápornými členy). Zřejmě takto získáme informaci o absolutní konvergenci dané mocninné řady.

**Příklad 162.** Určete, pro které hodnoty  $x$  konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

*Řešení.* Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \rightarrow |x| \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

A tedy pro  $|x| < 1$  tato řada konverguje (absolutně) a pro  $|x| > 1$  nekonverguje (zřejmě pro  $x < -1$  diverguje k  $-\infty$  a pro  $x > 1$  osciluje).

Pro  $x = -1$  se jedná o zápornou harmonickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n} \right),$$

která diverguje k  $-\infty$ . A pro  $x = 1$  se jedná o alternující harmonickou řadu, která konverguje (relativně).

Celkově tedy uvedená mocninná řada konverguje pro  $x \in (-1, 1]$ , přičemž pro  $x \in (-1, 1)$  konverguje absolutně.

V Příkladu 170 pak určíme součet této mocninné řady. □

**Příklad 163.** Určete, pro které hodnoty  $x$  konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

*Řešení.* Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2(n+1)-1} x^{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1} x^{2n-1}} \right| = \frac{2n-1}{2n+1} |x^2| \rightarrow x^2 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

A tedy pro  $x^2 < 1$  tato řada konverguje (absolutně) a pro  $x^2 > 1$  nekonverguje (zřejmě osciluje).

Pro  $x = 1$  se jedná o alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \quad (58)$$

která konverguje (relativně) podle Věty 46. A pro  $x = -1$  se jedná o řadu s opačnými znaménky, než je řada (58), tedy se opět jedná o alternující řadu, která konverguje (relativně). V Příkladu 171 určíme součet této řady.

Celkově tedy uvedená mocninná řada konverguje pro  $x \in [-1, 1]$ , přičemž pro  $x \in (-1, 1)$  konverguje absolutně. □

**Příklad 164.** Určete, pro které hodnoty  $x$  konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

*Řešení.* Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} |x| = \frac{1}{n+1} |x| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

A tedy tato řada konverguje (absolutně) a pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

Zřejmě jste již odhadli, že součet této mocninné řady je funkce  $e^x$ . □

**Příklad 165.** Určete, pro které hodnoty  $x$  konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + 120x^5 + \dots$$

*Řešení.* Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1) |x| \rightarrow \infty \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

A tedy tato řada konverguje pouze pro  $x = 0$  a nekonverguje pro každé  $x \neq 0$ . Zřejmě diverguje k  $\infty$  pro  $x > 0$  a osciluje pro  $x < 0$ . □

**4.6. Poloměr konvergence mocninné řady.** Každá mocninná řada konverguje ve svém středu, protože pro  $x = x_0$  se jedná o nulovou řadu. Dále ze srovnávacího kritéria (Věta 42) plyne následující.

**Tvrzení 12.** *Uvažujme mocninnou řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots \quad (59)$$

- (i) *Jestliže tato mocninná řada konverguje pro nějaké  $x = c$ , potom konverguje absolutně pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro která je  $|x - x_0| < |c - x_0|$ .*
- (ii) *Jestliže tato řada nekonverguje (tj. diverguje k  $\pm\infty$  nebo osciluje) pro nějaké  $x = d$ , potom nekonverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro která je  $|x - x_0| > |d - x_0|$ .*

Graficky lze obsah Tvrzení 12 znázornit následovně (viz obr.). Tedy pro každou mocninnou řadu (59) nastává právě jedna z následujících možností:

- Existuje číslo  $R > 0$  takové, že tato mocninná řada konverguje absolutně pro  $|x - x_0| < R$ , tj. pro  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  a nekonverguje pro  $|x - x_0| > R$ , tj. pro  $x < x_0 - R$  a pro  $x > x_0 + R$ . Řada může a nemusí konvergovat v každém z krajních bodů  $x = x_0 - R$  a  $x = x_0 + R$ .

- Tato mocninná řada konverguje absolutně pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  (v tomto případě klademe  $R := \infty$ ).
- Tato mocninná řada konverguje pouze pro  $x = x_0$  a nekonverguje pro všechna  $x \neq 0$  (v tomto případě klademe  $R := 0$ ).

Číslo  $R$  mající výše popsané vlastnosti nazýváme poloměr konvergence mocninné řady (59). Pokud je  $R > 0$  (tj. pokud nastane první nebo druhá z výše uvedených možností), potom hovoříme o intervalu konvergence či o konvergenčním intervalu.

**Příklad 166.**

- (a) Pro mocninné řady (viz Příklady 161(a), (b))

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

je poloměr konvergence  $\boxed{R = 1}$ .

- (b) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 161(c))

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x - 2)^n$$

je poloměr konvergence  $\boxed{R = 2}$ .

- (c) Pro mocninné řady (viz Příklady 162 a 163)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

je poloměr konvergence  $\boxed{R = 1}$ .

- (d) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 164)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

je poloměr konvergence  $\boxed{R = \infty}$ .

- (e) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 165)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

je poloměr konvergence  $\boxed{R = 0}$ .

□

Pro poloměr konvergence  $R$  mocninné řady platí následující.

**Věta 49 (O poloměru konvergence mocninné řady).** *Pokud existuje limita (vlastní nebo nevlastní)*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \quad \text{případně} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a, \quad (60)$$

potom poloměr konvergence mocninné řady (59) je

$$R = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{pro } a > 0, \\ \infty, & \text{pro } a = 0, \\ 0, & \text{pro } a = \infty. \end{cases}$$

*Důkaz.* Vztah pro poloměr konvergence  $R$  plyne z podílového kritéria (Věta 44), resp. z odmocninového kritéria (Věta 45). Pokud totiž existuje limita v (60), potom je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x - x_0| \rightarrow a \cdot |x - x_0| \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

resp.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|x - x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| \rightarrow a \cdot |x - x_0| \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Tedy mocninná řada konverguje (absolutně), pokud je  $a \cdot |x - x_0| < 1$ , a nekonverguje, pokud je  $a \cdot |x - x_0| > 1$ . Pro  $a \cdot |x - x_0| = 1$  konvergovat může i nemusí.

To znamená, že pokud je  $a > 0$ , řada konverguje pro  $|x - x_0| < \frac{1}{a}$  a nekonverguje pro  $|x - x_0| > \frac{1}{a}$ , neboli  $R = \frac{1}{a}$ .

Pokud je  $a = 0$ , je  $a \cdot |x - x_0| = 0 < 1$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , a tedy řada konverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , neboli  $R = \infty$ .

A pokud je  $a = \infty$ , je  $a \cdot |x - x_0| = \infty > 1$  pro všechna  $x \neq x_0$ , neboli řada nekonverguje pro všechna  $x \neq x_0$ , neboli  $R = 0$ .  $\square$

### Poznámka 35.

- (i) Předpoklad existence limity v (60) je příliš silný. Lze ukázat, že stačí místo limity použít limitu superior (která existuje vždy), tj.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \quad \text{případně} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a.$$

- (ii) Z Poznámky 33 plyne, že pokud existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$ , potom také existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$  (a tyto dvě limity jsou si rovny).

- (iii) Může ale nastat situace, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$  existuje, zatímco  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  neexistuje (viz např. Příklady 151 a 152). Je tedy vidět, že stačí vždy počítat poloměr konvergence pomocí vzorečku s  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$  (pokud tedy tato limita existuje jako vlastní nebo jako nevlastní).  $\square$

**Příklad 167.**

(a) Pro mocninné řady z Příkladu 166(a) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1,$$

a proto je podle Věty 49 (kde  $a = 1$ ) jejich poloměr konvergence roven  $\boxed{R = 1}$ . Všimněte si, že podle Poznámky 35(ii) je také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

(b) Pro mocninnou řadu z Příkladu 166(b) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto je podle Věty 49 (kde  $a = \frac{1}{2}$ ) její poloměr konvergence roven  $\boxed{R = 2}$ . Všimněte si, že podle Poznámky 35(ii) je také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Pro mocninné řady z Příkladu 166(c) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

resp.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1,$$

a proto je podle Věty 49 (kde  $a = 1$ ) jejich poloměr konvergence roven  $\boxed{R = 1}$ . Všimněte si, že podle Poznámky 35(ii) je také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{věta 5(ii)}}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} \stackrel{(54)}{=} 1,$$

resp.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} = 1,$$

přičemž poslední limita se spočítá l'Hospitalovým pravidlem podobně jako (54).

(d) Pro mocninnou řadu z Příkladu 166(d) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

a proto je podle Věty 49 (kde  $a = 0$ ) její poloměr konvergence roven  $\boxed{R = \infty}$ .

(e) Pro mocninnou řadu z Příkladu 166(e) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

a proto je podle Věty 49 (kde  $a = \infty$ ) její poloměr konvergence roven  $\boxed{R = 0}$ . □

Mocninné řady (jakožto „polynomy“ nekonečného stupně) sdílejí s polynomy všechny důležité vlastnosti. Zejména, jak uvidíme níže,

- součet mocninné řady je spojitá funkce,
- mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence,
- mocninnou řadu můžeme integrovat (neurčitým i určitým integrálem) člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence.

Pro jednoduchost uvádíme tyto vlastnosti pro mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ , ale evidentně tyto vlastnosti platí pro mocninné řady s libovolným středem  $x_0$ , přičemž konvergenční interval se změní z  $(-R, R)$  na interval  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

**Věta 50 (Spojitosť mocninné řady).**

- (i) *Nechť má mocninná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  poloměr konvergence  $R > 0$  ( $R \in \mathbb{R}$  nebo  $R = \infty$ ), tj.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x) \quad \text{pro } x \in (-R, R).$$

*Potom je součet  $s(x)$  této řady spojité funkce na intervalu  $(-R, R)$ .*

- (ii) *Je-li  $R < \infty$  a je-li tato řada konvergentní v pravém krajním bodě  $x = R$ , potom je součet  $s(x)$  funkce spojité zleva v bodě  $x = R$ , tj. platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R^-} s(x).$$

- (iii) *Je-li  $R < \infty$  a je-li tato řada konvergentní v levém krajním bodě  $x = -R$ , potom je součet  $s(x)$  funkce spojité zprava v bodě  $x = -R$ , tj. platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \rightarrow -R^+} s(x).$$

**Příklad 168.** V Příkladu 161 vidíme, že součet mocninné řady je spojité funkce na příslušném konvergenčním intervalu. Vlastnost z bodu (ii) ve Větě 50 budeme ilustrovat v Příkladu 170 (tento příklad vyžaduje „znalost“ integrování mocninné řady, kterou probereme níže ve Větě 52).  $\square$

**Věta 51 (Derivace mocninné řady).** *Nechť má mocninná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  poloměr konvergence  $R > 0$  ( $R \in \mathbb{R}$  nebo  $R = \infty$ ), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \quad \text{pro } x \in (-R, R).$$

Potom má funkce  $s(x)$  na intervalu  $(-R, R)$  derivace všech řádů, přičemž platí

$$\begin{aligned} s'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \dots \quad \text{pro } x \in (-R, R), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

Tedy mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a derivace), přičemž se nemění poloměr konvergence.

*Důkaz.* Ukažme si alespoň, že se při derivování mocninné řady nemění poloměr konvergence. Necht'  $a$  je číslo z Věty 49, které určuje poloměr konvergence  $R$  (původní řady). Potom pro derivovanou řadu platí

$$\frac{(n+2) a_{n+2}}{(n+1) a_{n+1}} = \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}_{\rightarrow a} \xrightarrow{(8)} 1 \cdot a = a \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Tedy podle Věty 49 je poloměr konvergence derivované řady roven  $R$ , tj. je stejný, jako je poloměr konvergence původní řady.  $\square$

**Poznámka 36.** Pro derivace vyšších řádů pak platí podobně

$$\begin{aligned} s''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2 a_2 + 6 a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n, \end{aligned}$$

a podobně pro  $s'''(x)$ ,  $s^{(4)}(x)$ , atd.

Zejména tedy můžeme vyšetřovat vlastnosti mocninné řady z kapitoly 2 na intervalu  $(-R, R)$  týkající se monotonie, lokálních extrémů, konvexnosti/konkávnosti, inflexních bodů, atd.  $\square$

**Příklad 169.** Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2 x^2 + 3 x^3 + 4 x^4 + \dots$$

Pomocí získaného výsledku určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots$$

*Řešení.* Poloměr konvergence určíme z Věty 49:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 = a, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{a} = 1.$$

Tedy řada konverguje pro  $x \in (-1, 1)$  a zřejmě nekonverguje v krajních bodech tohoto intervalu.

Protože je  $n x^{n-1} = (x^n)'$ , součet této řady určíme z věty o derivaci mocninné řady (Věta 51):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left( \frac{x}{1-x} \right)' \\ &= x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}}. \end{aligned}$$

Volbou  $x = \frac{1}{2}$  pak dostáváme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \boxed{2}.$$

□

**Věta 52 (Neurčitý integrál mocninné řady).** *Nechť má mocninná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  poloměr konvergence  $R > 0$  ( $R \in \mathbb{R}$  nebo  $R = \infty$ ), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad \text{pro } x \in (-R, R).$$

Potom na intervalu  $(-R, R)$  platí

$$\begin{aligned} \int s(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} + \dots + C \quad \text{pro } x \in (-R, R), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C. \end{aligned}$$

Tedy mocninnou řadu můžeme integrovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrování), přičemž se nemění poloměr konvergence.

**Příklad 170.** Určete součet mocninné řady (viz Příklad 162)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

a tedy pro  $x = 1$  také součet alternující harmonické řady (viz Příklady 156 a 155)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

*Řešení.* V Příkladu 162 jsme ukázali, že tato mocninná řada konverguje pro  $x \in (-1, 1]$ . Protože je  $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n dx$ , součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady (Věta 52):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^n \int x^n dx \right) = \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) dx \\ &= \int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) + C \quad \text{pro } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Protože je pro  $x = 0$  tato mocnná řada konvergentní se součtem 0 (každá mocnná řada má ve svém středu součet 0), po dosazení za  $x = 0$  dostaneme rovnici  $0 = \ln 1 + C$ , tedy  $C = 0$ . Je tedy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = \ln(1+x)} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

A dále, protože tato řada konverguje v pravém krajním bodě  $x = 1$  (je to alternující harmonická řada), je podle věty o spojitosti mocnné řady (Věta 50(ii))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \boxed{\ln 2}, \quad \text{tj.} \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

□

**Příklad 171.** Určete součet mocnné řady (viz Příklad 163)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

*Řešení.* Z Příkladu 163 víme, že tato řada konverguje pro  $x \in [-1, 1]$  a konverguje absolutně pro  $x \in (-1, 1)$ . Protože je  $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int x^{2n} dx$ , součet této řady určíme z věty o integraci mocnné řady (Věta 52):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^n \int x^{2n} dx \right) = \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \right) dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \quad \text{pro } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Protože je pro  $x = 0$  tato mocnná řada konvergentní se součtem 0 (každá mocnná řada má ve svém středu součet 0), po dosazení za  $x = 0$  dostaneme rovnici  $0 = \operatorname{arctg} 0 + C$ , tedy  $C = 0$ . Je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \operatorname{arctg} x \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

A dále, protože tato řada konverguje v pravém krajním bodě  $x = 1$ , je podle věty o spojitosti mocnné řady (Věta 50(ii))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Podobný vztah platí pro  $x = -1$ , protože tato mocnná řada konverguje i v levém krajním bodě  $x = -1$ .

Celkově tedy platí vztah

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \operatorname{arctg} x} \quad \text{pro } x \in [-1, 1].$$

□

**Věta 53 (Určitý integrál mocinné řady).** *Nechť má mocinná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  poloměr konvergence  $R > 0$  ( $R \in \mathbb{R}$  nebo  $R = \infty$ ), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad \text{pro } x \in (-R, R).$$

Potom pro libovolný interval  $[a, b] \subseteq (-R, R)$  platí

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \int_a^b x^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \frac{b^{n+1}}{n+1} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \frac{a^{n+1}}{n+1} \right).$$

Tedy mocinnou řadu můžeme integrovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrování).

**Příklad 172.** Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$$

*Řešení.* Protože platí

$$\frac{1}{(n+1) 2^{n+1}} = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx,$$

je podle věty o určitém integrálu mocinné řady (Věta 53)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) 2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx \\ &= \left[ -\ln(1-x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - (-\ln 1) = -\ln \frac{1}{2} = -\ln 2^{-1} = \boxed{\ln 2}. \end{aligned}$$

Tedy platí, že

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$$

□

**4.7. Taylorovy a Maclaurinovy řady.** Pokud se v Taylorově polynomu (viz Odstavec 2.20) budou brát členy se stále vyššími derivacemi (až do nekonečna), dostaneme Taylorovu řadu příslušnou k dané funkci  $f(x)$ .

**Definice 28 (Taylorova a Maclaurinova řada).** Nechť  $f(x)$  je funkce, která má na nějakém intervalu (obsahujícím bod  $x_0$  jakožto vnitřní bod) derivace všech řádů. Taylorova řada se středem v bodě  $x_0$  příslušná k funkci  $f(x)$  je mocinná řada

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n & \tag{61} \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \dots \end{aligned}$$

Tzn. Taylorova řada je mocinná řada se středem v bodě  $x_0$  a koeficienty  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .

Pokud je  $x_0 = 0$ , potom se Taylorova řada nazývá Maclaurinovou řadou příslušnou k funkci  $f(x)$ , tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots$$

Tzn. Maclaurinova řada je mocninná řada se středem v bodě 0 a koeficienty  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .  $\square$

V předchozí definici si připomeňme zavedenou konvenci, že  $f^{(0)}(x) := f(x)$  („multá derivace“ je samotná funkce) a že je definováno  $0! := 1$ .

### Příklad 173.

- (a) Protože má funkce  $f(x) = \sin x$  derivace všech řádů a hodnoty funkce  $\sin x$  a jejích derivací v bodě  $x_0 = 0$  jsou postupně 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, atd. (viz Příklad 83), Maclaurinova řada pro funkci  $\sin x$  je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

Její poloměr konvergence je  $R = \infty$  (podle Věty 49), tj. tato řada konverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

- (b) Protože má funkce  $f(x) = \cos x$  derivace všech řádů a hodnoty funkce  $\cos x$  a jejích derivací v bodě  $x_0 = 0$  jsou postupně 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0 atd. (viz Příklad 84), Maclaurinova řada pro funkci  $\cos x$  je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots$$

Její poloměr konvergence je  $R = \infty$  (podle Věty 49), tj. tato řada konverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

- (c) Protože má funkce  $f(x) = e^x$  derivace všech řádů a hodnoty funkce  $e^x$  a jejích derivací v bodě  $x_0 = 0$  jsou všechny rovny 1 (viz Příklad 85), Maclaurinova řada pro funkci  $e^x$  je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots$$

Její poloměr konvergence je  $R = \infty$  (viz Příklady 164 a 166(d)), tj. tato řada konverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

- (d) Protože má funkce  $f(x) = \ln(1+x)$  derivace všech řádů a hodnoty funkce  $\ln(1+x)$  a jejích derivací v bodě  $x_0 = 0$  jsou postupně rovny 0, 1, -1, 2, -6, 24, -120 (viz Příklad 86), Maclaurinova řada pro funkci  $\ln(1+x)$  je tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} x^n = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Srovnajte tento výsledek s mocninnou řadou v Příkladu 170. Tato řada konverguje pro všechna  $x \in (-1, 1]$  (viz Příklad 162).  $\square$

**Příklad 174.** Určete Taylorovu řadu funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  se středem v bodě  $x_0 = 2$ . Dále určete obor konvergence této mocninné řady a případně její součet.

*Řešení.* Derivace funkce  $f(x)$  a její hodnoty v bodě 2 jsou následující:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^{-1}, & f(2) = \frac{1}{2} = \frac{0!}{2^1}, \\ f'(x) = -x^{-2}, & f'(2) = -\frac{1}{4} = -\frac{1!}{2^2}, \\ f''(x) = 2x^{-3}, & f''(2) = \frac{2}{8} = \frac{2!}{2^3}, \\ f'''(x) = -6x^{-4}, & f'''(2) = -\frac{6}{16} = -\frac{3!}{2^4}, \\ f^{(4)}(x) = 24x^{-5}, & f^{(4)}(2) = \frac{24}{32} = \frac{4!}{2^5}, \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, & f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}. \end{array}$$

Koeficient  $a_n$  v Taylorově řadě tedy je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}},$$

a proto má příslušná Taylorova řada se středem v bodě 2 tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} (x-2) + \frac{1}{2^3} (x-2)^2 - \frac{1}{2^4} (x-2)^3 + \frac{1}{2^5} (x-2)^4 - \dots$$

Uvedená mocninná řada je geometrická řada s počátečním členem  $a = \frac{1}{2}$  a kvocientem  $q = -\frac{x-2}{2}$  (srovnejte s podobnou řadou v Příkladu 161). Tedy podle Tvzení 10 je tato řada konvergentní pro  $|\frac{x-2}{2}| < 1$ , tj. pro  $|x-2| < 2$ , tj. pro  $x \in (0, 4)$ , a její součet je

$$\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x} = f(x).$$

Alternativně lze poloměr konvergence uvedené řady spočítat z Věty 49, čili

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = a, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{a} = 2.$$

V tomto příkladu tedy vidíme, že Taylorova řada funkce  $f(x)$  konverguje na svém konvergenčním intervalu k funkci  $f(x)$ .  $\square$

Z definice Taylorovy řady (61) plyne, že tato řada konverguje k číslu  $f(x_0)$  pro  $x = x_0$  (protože každá mocninná řada konverguje ve svém středu).

Situace v předchozím Příkladu 174 ohledně konvergence Taylorovy (či Maclaurinovy) řady k samotné funkci  $f(x)$  je „obvyklá“ pro většinu funkcí. Existují ale také funkce, které mají derivace všech řádů (tudíž k nim existuje Taylorova řada), tato Taylorova řada konverguje, ale již ne k funkci  $f(x)$  (kromě bodu  $x_0$ ).

**Příklad 175.** Funkce

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je spojitá a má derivace všech řádů na celém  $\mathbb{R}$ . V bodě  $x_0 = 0$  toto lze ukázat pomocí výpočtu jednostranných derivací  $f'_-(0)$  a  $f'_+(0)$ ,  $f''_-(0)$  a  $f''_+(0)$ , atd., viz Poznámka 4(ii). Zejména jsou všechny tyto derivace v bodě  $x_0 = 0$  rovny 0. Tedy příslušná Maclaurinova řada je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \dots = \boxed{0}.$$

Tedy jedná se o nulovou řadu, která samozřejmě konverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  k nulové funkci  $s(x) \equiv 0$ , která není rovna původní funkci  $f(x)$  s výjimkou  $x = 0$ .  $\square$

Otázku, kdy Taylorova (Maclaurinova) řada funkce  $f(x)$  konverguje k funkci  $f(x)$ , zodpovídá následující tvrzení, které je bezprostředním důsledkem Věty 23.

**Věta 54 (O konvergenci Taylorovy řady).**

- (i) *Taylorova řada (61) funkce  $f(x)$  konverguje na svém konvergenčním intervalu  $I$  k funkci  $f(x)$ , tj. platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{pro všechna } x \in I, \quad (62)$$

$\Leftrightarrow$  *pro posloupnost Taylorových zbytků  $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  (viz (36)) platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

- (ii) *Zejména, pokud jsou všechny derivace  $f^{(n)}(x)$  stejně ohraničené na intervalu  $I$ , tj. pokud pro nějaké  $M > 0$  je*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ a pro všechna } x \in I,$$

*potom platí (62).*

Z Věty 54 vyplývá, že pokud chceme vyjádřit funkci  $f(x)$  jako nekonečnou řadu

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots, \end{aligned} \quad (63)$$

potom volbou  $x = x_0$  nutně dostáváme  $a_0 = f(x_0)$ . Dále derivováním rovnice (63) dostaneme

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots,$$

$$f'''(x) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \dots,$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \dots$$

Dosažením za  $x = x_0$  pak vychází, že

$$f'(x_0) = a_1, \quad f''(x_0) = 2a_2, \quad f'''(x_0) = 6a_3, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

Odsud již vyplývá, že rozvoj funkce  $f(x)$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0$  má nutně uvedený tvar (62).

**Příklad 176.** Uvedme si přehled Maclaurinových řad pro některé elementární funkce, se kterými se často setkáváme.

(a) Pro funkci  $f(x) = \sin x$  platí (viz Příklad 173(a))

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Pro funkci  $f(x) = \cos x$  platí (viz Příklad 173(b))

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Pro funkci  $f(x) = e^x$  platí (viz Příklad 173(c))

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

(d) Pro funkci  $f(x) = \ln(1+x)$  platí (viz Příklady 173(d) a 170)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 + \dots \quad \text{pro } x \in (-1, 1].$$

(e) Pro funkci  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  platí (viz Příklad 161(a))

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

(f) Pro funkci  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  platí (viz Příklad 161(b))

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

(g) Každý polynom  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  je svým vlastním Maclaurinovým rozvojem (na celém  $\mathbb{R}$ ), neboť platí, že

$$P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2a_2, \quad P'''(0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3! a_3, \quad \dots, \quad P^{(n)}(0) = n! a_n.$$

□

Výše uvedené rozvoje elementárních funkcí do nekonečných řad bychom také mohli chápat jako definice těchto funkcí (jak je skutečně provedeno ve skriptech [8]). A pak lze pomocí vlastností (např. spojitosti, derivace, integrálu, atd.) mocninných řad uvedených v této kapitole také odvodit základní vlastnosti a vztahy těchto elementárních funkcí, jako např.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (e^x)' = e^x, \quad \dots$$

Pro rozvoje funkcí do nekonečných řad můžeme používat normální algebraická pravidla (sčítání, odčítání, násobení, substituce).

### Příklad 177.

(a) Maclaurinova řada funkce  $x \sin x$  je (pro rozvoj funkce  $\sin x$  viz Příklad 176(a))

$$\begin{aligned} x \sin x &= x \cdot \left( x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3!} x^4 + \frac{1}{5!} x^6 - \frac{1}{7!} x^8 + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Maclaurinova řada funkce  $\frac{\sin x}{x}$  je (pro rozvoj funkce  $\sin x$  viz Příklad 176(a))

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left( x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, x \neq 0. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v tohoto vzorce je snadné odvodit limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (viz Příklad 24).

(c) Maclaurinova řada funkce  $e^{-x^2}$  je (pro rozvoj funkce  $e^x$  viz Příklad 176(c))

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \left( 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \frac{1}{5!} t^5 + \dots \right) \Big|_{t=-x^2} \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{4!} x^8 - \frac{1}{5!} x^{10} + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

**4.8. Aplikace nekonečných řad.** Nekonečné (číselné i mocninné) řady mají mnoho aplikací. Nebudu zacházet do přílišných podrobností, ale chci zmínit alespoň následující.

- Přibližné výpočty funkčních hodnot – srovnejte např. s Příklady 81 a 177.
- Aproximace funkcí – srovnejte např. s Příklady 176 a 88.
- Výpočet integrálů vyšších funkcí – viz Poznámka 23.

### Příklad 178.

(a) Primitivní funkce k funkci  $\frac{\sin x}{x}$  je funkce (viz Příklad 177(b))

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{x} dx &= \int \left( 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \right) dx \\ &= x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!} \frac{x^7}{7} + \dots + C \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + C}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

neboť lze mocninnou řadu integrovat člen po členu a poloměr konvergence se integrováním nemění.

(b) Primitivní funkce k funkci  $e^{-x^2}$  je funkce (viz Příklad 177(c))

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} dx &= \int \left( 1 - x^2 + \frac{1}{2!} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{4!} x^8 - \frac{1}{5!} x^{10} + \dots \right) dx \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!} \frac{x^9}{9} - \frac{1}{5!} \frac{x^{11}}{11} + \dots + C \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + C}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

neboť lze mocninnou řadu integrovat člen po členu a poloměr konvergence se integrováním nemění.

□

- Výpočet limit – viz např. Příklad 177(b).
- Řešení některých diferenciálních rovnic – viz např. Příklad 201.
- Jen tak pro zajímavost

**Příklad 179.** Určete součet číselné řady (viz Příklad 148)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

*Řešení.* Funkce  $\frac{\sin x}{x}$  má rozvoj (viz Příklad 177(b))

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \quad (64)$$

Kořeny této funkce jsou zřejmě v bodech  $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \dots$  a tedy tuto funkci lze „rozložit“ na (nekonečný) součin kořenových činitelů

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{4\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Porovnáním koeficientů u mocniny  $x^2$  v rozvoji (64) a (po roznásobení) v (65) dostaneme

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots,$$

čili po vynásobení číslem  $-\pi^2$  dostaneme

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Jen pro zajímavost, tuto úvahu provedl Leonard Euler již v 18. století. □

**Poznámka 37.** Protože je  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , plyne ze vzorců (64) a (65) volbou  $x = \frac{\pi}{2}$  vyjádření

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\pi}{2}} &= \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{\pi}{3\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4\pi}\right) \cdot \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \dots, \end{aligned}$$

neboli dostáváme známý Wallisův vzorec

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots$$

pro vyjádření čísla  $\frac{\pi}{2}$  (a tedy i čísla  $\pi$ ) pomocí nekonečného součinu.

Nekonečné součiny (a otázky spojené s jejich konvergencí) ale v tomto kurzu neprobíráme, tak to berte jen jako zajímavost. □

**4.9. Řady funkcí.** Stejně jako když jsme studovali mocninné řady, tj. řady „generované“ mocninami  $x^n$  s koeficienty  $a_n$ , můžeme studovat řady „generované“ jinými funkcemi. Např. Fourierovy řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

případně můžeme uvažovat obecné řady funkcí (či funkcionální řady)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

přičemž  $f_n(x)$  jsou funkce definované na nějakém (společném) intervalu  $I$ . V této souvislosti je pak přirozené klást otázky týkající se konvergence takové funkcionální řady, tj. pro která  $x \in I$  je definována funkce

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

a jaké vlastnosti funkce  $s(x)$  bude mít (zejména týkající se spojitosti, derivace a primitivní funkce – viz příslušné Věty 50, 51, 52 a 53 o mocninných řadách).

Stejně jako u mocninných či číselných řad je při studiu obecných funkcionálních řad potřeba vyřešit otázku konvergence posloupnosti částečných součtů

$$s_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x),$$

tj. za jakých podmínek a na jakém intervalu konverguje (funkcionální) posloupnost  $s_n(x)$  k funkci  $s(x)$ , tj.  $s_n(x) \rightarrow s(x)$  pro  $x \in I$ . Pro každé pevně zvolené  $x \in I$  se ale jedná o číselnou posloupnost (či řadu), a proto můžeme použít všechny nástroje počínaje Odstavcem 4.1. Hovoříme pak o bodové konvergenci dané funkcionální řady.

Ovšem je nutné zdůraznit, že již nejjednodušší vlastnosti (jako např. spojitost) funkcí  $f_n(x)$  (a tedy i funkcí  $s_n(x)$ ) se při takové bodové konvergenci nepřenášejí na součtovou funkci  $s(x)$ .

**Příklad 180.** Uvažujme funkce  $s_n(x) := x^n$  pro  $x \in [0, 1]$  a  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  (viz obr.). Jedná se tedy o posloupnost částečných součtů

$$s_0(x) = 1, \quad s_1(x) = x, \quad s_2(x) = x^2, \quad s_3(x) = x^3, \quad s_4(x) = x^4, \quad \dots$$

funkcí

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x - 1, \quad f_2(x) = x^2 - x, \quad f_3(x) = x^3 - x^2, \quad \dots, \quad f_n(x) = x^n - x^{n-1}, \quad \dots$$

Všechny tyto funkce  $f_n(x)$  jsou spojité na intervalu  $[0, 1]$  pro každé  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dále jsou všechny funkce  $s_n(x)$  spojité na intervalu  $[0, 1]$ . Přitom

$$\text{pro } x \in [0, 1) \text{ je } s_n(x) = x^n \rightarrow 0, \quad \text{a pro } x = 1 \text{ je } s_n(x) = 1^n \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tedy posloupnost  $s_n(x)$  bodově konverguje na intervalu  $[0, 1]$  k funkci

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x) := \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

přičemž tato funkce  $s(x)$  je nespojité (viz obr.). □

Z Příkladu 180 je tedy vidět, že pro obecné funkcionální řady je potřeba silnější pojem konvergence, než je bodová konvergence, který bude zaručovat přenos vlastností funkcí  $f_n(x)$  na součtovou funkci  $s(x)$ . Tímto se dostáváme k termínu stejněměrné konvergence na intervalu  $I$ .

## 5. FOURIEROVA ŘADA A TRANSFORMACE

## 5.1. Stejněměrná konvergence.

**Definice 29.** Říkáme, že posloupnost funkcí  $f_n(x)$  konverguje stejnoměrně na intervalu  $[a, b]$  k limitě  $f(x)$ , jestliže pro každé kladné (malé) číslo  $\varepsilon$  existuje (velké) přirozené číslo  $N \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \geq N$  a všechna  $x \in [a, b]$  platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

O řadě funkcí řekneme, že konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejich částečných součtů.

**Věta 55.** Uvažme funkce  $f_n(x)$  na intervalu  $I = [a, b]$ .

- (1) Jsou-li všechny funkce  $f_n(x)$  spojité na  $I$  a řada  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konverguje stejnoměrně k funkci  $S(x)$ , je i funkce  $S(x)$  spojitá na  $I$ .
- (2) Jsou-li všechny funkce  $f_n(x)$  spojitě diferencovatelné na  $I$ , a obě řady

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

konvergují stejnoměrně, pak je také funkce  $S(x)$  spojitě diferencovatelná a platí  $S'(x) = T(x)$ , tj.

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

- (3) Jsou-li všechny funkce  $f_n(x)$  Riemannovsky integrovatelné na  $I$  a řada  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konverguje stejnoměrně k funkci  $S(x)$  na  $I$ , je tamtéž integrovatelná i funkce  $S(x)$  a platí vztah

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

**Věta 56** (Weierstrassův test). Nechť  $f_n(x)$  je posloupnost funkcí definovaných na intervalu  $I = [a, b]$  a platí  $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$ . Je-li řada čísel  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentní, pak řada  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konverguje stejnoměrně.

Weierstrassův test můžeme ihned použít na již probrané mocninné řady  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  se středem v bodě  $x_0$ . Již víme, že každá taková řada konverguje na  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , kde tzv. poloměr konvergence  $r \geq 0$  může být také nula nebo  $\infty$ . Zejména k důkazu konvergence řady  $S(x)$  ji můžeme srovnat s vhodnou geometrickou posloupností. Podle Weierstrassova testu je proto řada  $S(x)$  stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním (tj. konečném) intervalu  $[a, b]$  uvnitř intervalu  $(x_0 - r, x_0 + r)$ . Platí tedy následující věta (viz věty 50, 51, 52).

**Věta 57.** Každá mocninná řada  $S(x)$  je ve všech bodech uvnitř svého intervalu konvergence spojitá a spojitě diferencovatelná. Funkce  $S(x)$  je také integrovatelná a derivování i integrování lze provádět člen po členu.

5.2. **Fourierovy řady.** Nejprve zavedeme několik pojmů.

**Definice 30.** (i) Jestliže pro funkci  $f$  na intervalu  $[a, b]$  existuje konečný integrál

$$\int_a^b f^2(x) dx,$$

nazývá se funkce  $f$  integrovatelná s kvadrátem, píšeme  $f \in L^2[a, b]$ .

(ii) Výraz

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f, g \in L^2[a, b],$$

nazýváme skalární součin funkcí  $f, g$  na intervalu  $[a, b]$ .

(iii) Číslo

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}, \quad f \in L^2[a, b],$$

nazýváme norma funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .

Poznamenejme, že každá spojitá (popř. po částech spojitá, tedy mající konečný počet budů nespojitosti prvního druhu) funkce je integrovatelná s kvadrátem. Dále je-li funkce integrovatelná s kvadrátem, je integrovatelná i funkce  $|f|$  a tedy i samotná funkce  $f$ . Navíc, součin dvou funkcí integrovatelných s kvadrátem je integrovatelný, tedy skalární součin je konečné číslo. Je-li toto číslo rovno nule, nazývají se příslušné funkce ortogonální (kolmé).

**Definice 31.** Uvažujme systém funkcí  $\{f_1, f_2, \dots\}$  z  $L^2[a, b]$  (konečný nebo nekonečný). Řekneme, že tyto funkce tvoří na intervalu  $[a, b]$  ortogonální systém, jestliže jsou po dvou ortogonální, tj.

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b f_m(x)f_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Pokud je navíc norma každé z těchto funkcí rovna jedné, tj.

$$\|f_i\|^2 = \langle f_i, f_i \rangle = \int_a^b f_i^2(x) dx = 1,$$

tvoří na intervalu  $[a, b]$  ortonormální systém.

Do ortogonálního systému nezahrnujeme funkce, které jsou (skoro všude) nulové, tedy funkce, pro které je norma rovna nule. Ortonormální systém poté získáme ze systému ortogonálního vynásobením každé funkce vhodnou konstantou (rovnou převrácené hodnotě normy příslušné funkce).

Poznamenejme, že ortogonální systém lze obdržet např. použitím Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu.

**Tvrzení 13.** *Systém funkcí*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\} \tag{66}$$

*je ortogonální na každém intervalu délky  $2\pi$ .*

*Důkaz.* Tvrzení lze dokázat přímým výpočtem skalárních součinů všech kombinací funkcí.  $\square$

Přímým výpočtem také snadno zjistíme, že konstantní funkce 1 má oproti ostatním funkcím systému (66) větší normu, přesněji, na každém intervalu délky  $2\pi$  platí

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \quad \|\sin nx\| = \sqrt{\pi} = \|\cos nx\|. \tag{67}$$

Tím jsme také dokázali, že všechny funkce ze systému (66) náležejí do  $L^2[a, a + 2\pi]$  pro libovolné  $a \in \mathbb{R}$ .

Předpokládejme nyní, že je možné funkci  $g \in L^2[a, b]$  zapsat jako kombinaci funkcí z daného ortogonálního systému  $\{f_1, f_2, \dots\}$ , tedy

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x),$$

přičemž řada napravo konverguje k funkci  $g$  na intervalu  $[a, b]$  stejnoměrně. Vynásobením funkcí  $f_j$  a následnou integrací od  $a$  do  $b$  obdržíme

$$\int_a^b g(x) f_j(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x) f_j(x) dx.$$

Nyní s použitím věty 55 zaměníme sumaci a integraci (koeficient  $c_i$  je vzhledem k integrálu konstantní, tedy je možné ho vytknout)

$$\int_a^b g(x) f_j(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx.$$

Nyní vezmeme v úvahu, že systém funkcí  $\{f_1, f_2, \dots\}$  je ortogonální. To znamená, že na pravé straně zůstane jediný nenulový sčítanec, tedy

$$\int_a^b g(x) f_j(x) dx = c_j \int_a^b f_j^2(x) dx.$$

Odtud snadno vyjádříme koeficient  $c_j$  jako

$$c_j = \frac{1}{\|f_j\|^2} \int_a^b g(x) f_j(x) dx.$$

Takto vypočtené koeficienty budeme nazývat Fourierovy koeficienty funkce  $g$  v systému  $\{f_1, f_2, \dots\}$ .

Snadno tedy můžeme vyjádřit například Fourierovy koeficienty funkce  $g \in L^2[-\pi, \pi]$  v tzv. trigonometrickém systému (66). Připomeňme normy prvků tohoto systému (67). Uvažujme-li Fourierovu řadu ve tvaru

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (68)$$

na intervalu  $[-\pi, \pi]$ , pak koeficienty obdržíme jako

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (69)$$

Konvergence takto sestavené řady je popsána v následující větě.

**Věta 58.** *Nechť  $g$  je po částech spojitá na intervalu  $[-\pi, \pi]$  a má na něm po částech spojitou derivaci. Pak její Fourierova řada (68) konverguje na  $[-\pi, \pi]$  a platí*

- (1)  $F(x_0) = g(x_0)$  v každém bodě  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ , ve kterém je funkce  $g$  spojitá;
- (2) v každém bodě  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ , ve kterém je funkce  $g$  nespojitá je

$$F(x_0) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \right];$$

- (3) v krajních bodech intervalu  $[-\pi, \pi]$  je

$$F(\pi) = F(-\pi) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow -\pi^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) \right].$$

Pokud navíc je  $g(x)$  spojitá, periodická s periodou  $2\pi$  a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada  $F(x)$  stejnoměrně.

**Příklad 181.** Určete Fourierovu řadu funkce  $g(x) = x$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$  a rozhodněte k jaké funkci získaná řada konverguje na  $\mathbb{R}$ .

*Řešení.* Přímým výpočtem s použitím metody per-partes obdržíme koeficienty (viz (69))

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

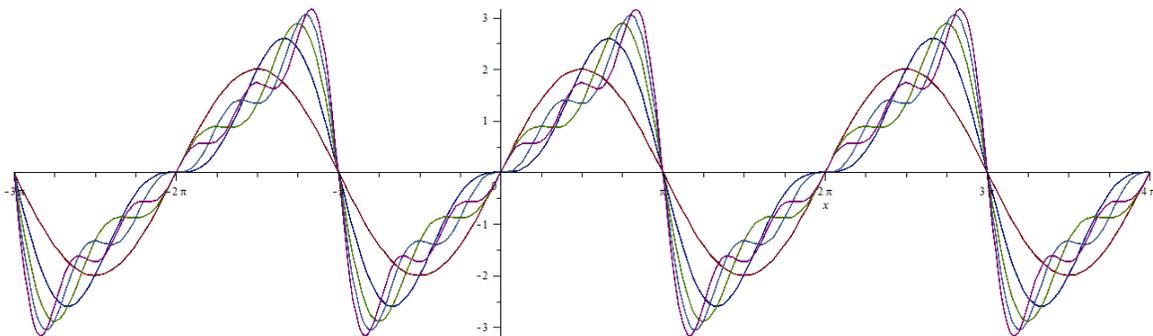
Řada je tedy tvaru (viz (68))

$$F(x) = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

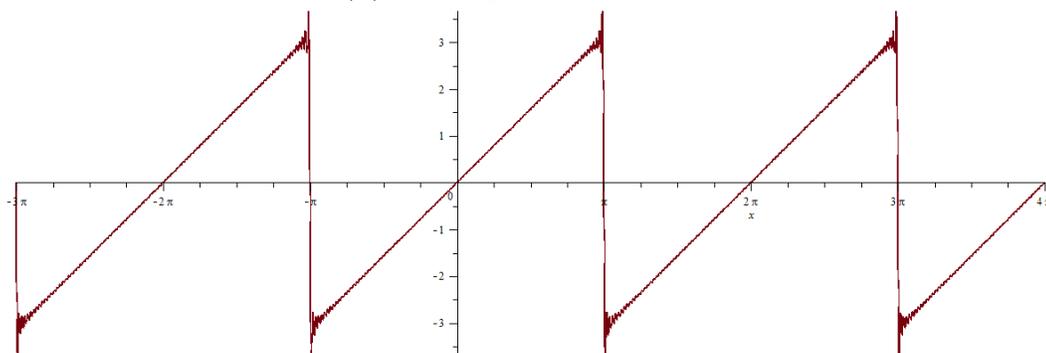
Vzhledem ke spojitosti a spojitosti derivace funkce  $g(x)$  pro  $x \in (-\pi, \pi)$  konverguje tato řada k zadané funkci, tj.

$$F(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Pro rozhodnutí k jaké funkci získaná řada konverguje na  $\mathbb{R}$  potřebujeme ještě hodnoty v krajních bodech intervalu (body nespojitosti uvnitř intervalu nejsou). Hodnoty v krajních bodech intervalu snadno dopočítáme dle věty 58 (3) jako  $F(\pi) = F(-\pi) = 0$ . Součet řady na  $\mathbb{R}$  je pak dán periodickým opakováním intervalu  $[-\pi, \pi]$ .  $\square$



(A) Součet pro  $n = 1, 2, 3, 4, 5$



(B) Součet pro  $n = 100$

Poznamenejme, že nulovost koeficientů  $a_i$  není náhodná. Platí totiž, že liché funkce mají tzv. sinový rozvoj. Podobně sudé funkce mají rozvoj kosinový.

Předchozí úvahy lze samozřejmě provést i na libovolném intervalu  $[a, b]$  pro funkci  $g \in L^2[a, b]$ . Ortogonální systém (66) bude mít potom tvar

$$\left\{ 1, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{4\pi x}{b-a}, \cos \frac{4\pi x}{b-a}, \dots, \sin \frac{2n\pi x}{b-a}, \cos \frac{2n\pi x}{b-a}, \dots \right\}$$

a Fourierova řada bude

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right)$$

s koeficienty

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukažme si na další liché funkci (rozvoj tedy bude opět sinový) chování Fourierovy řady v případě, že funkce má bod nespojitosti.

**Příklad 182.** Určete Fourierovu řadu funkce  $g(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-1, 1)$  a rozhodněte k jaké funkci získaná řada konverguje na  $\mathbb{R}$ .

*Řešení.* Jde o lichou funkci, tedy

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

Dále

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = 2 \left[ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} - (-1)] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

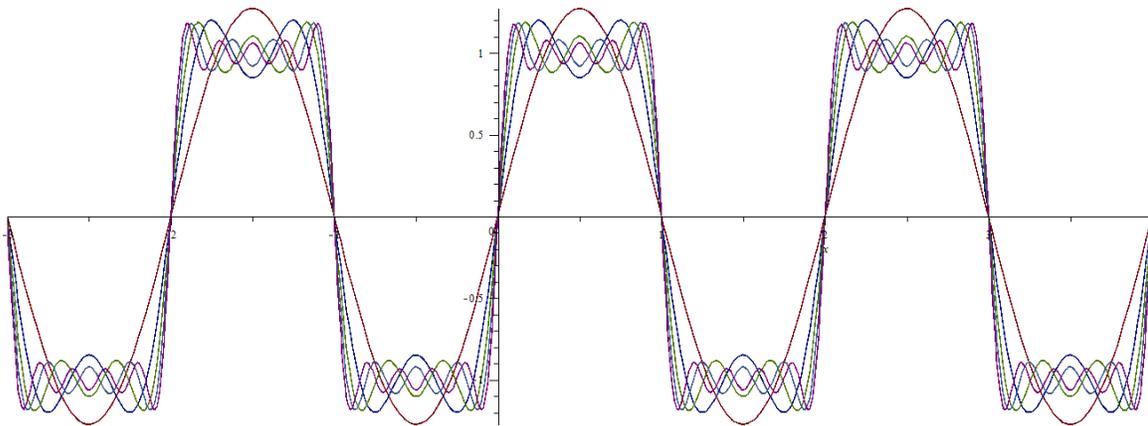
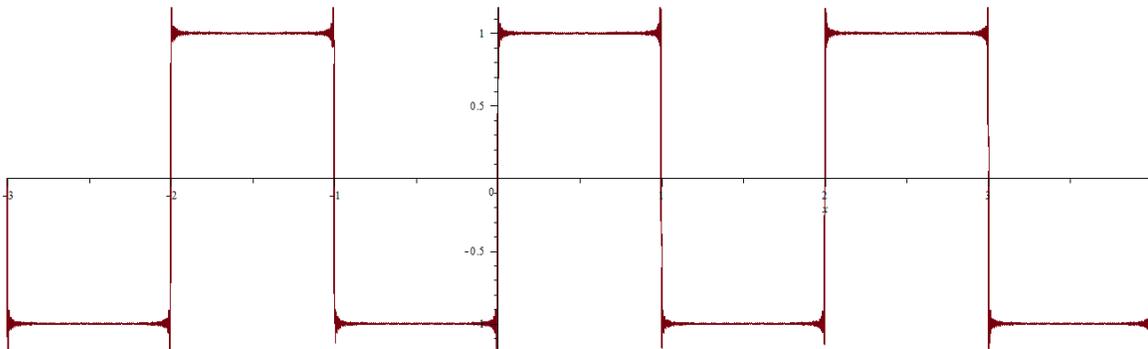
Řada je tedy tvaru (viz (68))

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots \right).$$

Vzhledem ke spojitosti a spojitosti derivace funkce  $g(x)$  pro  $x \in (-\pi, \pi)$  konverguje tato řada k zadané funkci, tj.

$$F(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Pro rozhodnutí k jaké funkci získaná řada konverguje na  $\mathbb{R}$  potřebujeme ještě hodnoty v krajních bodech intervalu a v bodě nespojitosti uvnitř intervalu. Tyto hodnoty snadno dopočítáme dle věty 58 (2) a (3) jako  $F(1) = F(-1) = F(0) = 0$ . Součet řady na  $\mathbb{R}$  je pak dán periodickým opakováním intervalu  $[-1, 1]$ .  $\square$

(c) Součet pro  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (d) Součet pro  $n = 100$ 

**5.3. Fourierova transformace.** Uvažujme vektorový prostor  $\mathcal{S}[a, b]$  všech po částech spojitých funkcí na intervalu  $I = [a, b]$ . Lineární zobrazení  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývají (reálné) lineární funkcionály. Například

- vyčíslení funkce v jednotlivých bodech je lineární funkcionál  $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , tedy

$$f \mapsto L(f) = f(x_0);$$

- pomocí integrace můžeme zadat tzv. integrální funkcionál s pomocí pevně zvolené funkce  $g(x)$  jako

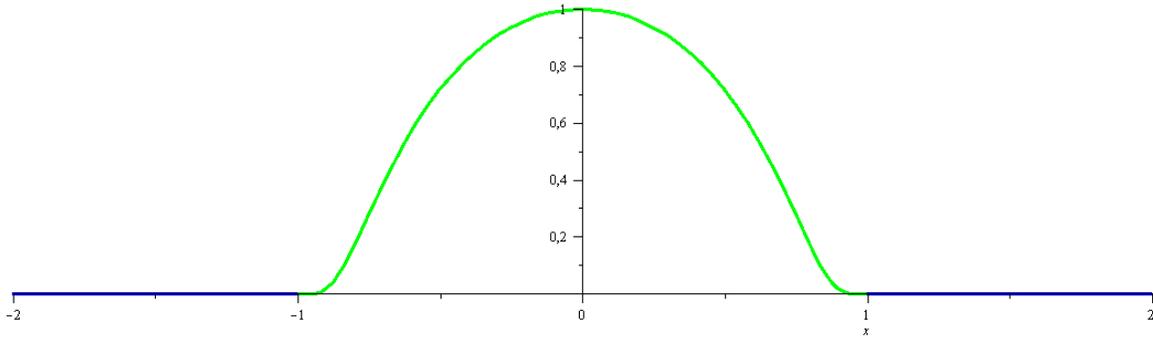
$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Funkce  $g(x)$  zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci  $f(x)$ . Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s  $g(x) = 1$  pro všechny body  $x \in [a, b]$ .

Uvažujme nyní jako váhu například funkci

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2 - a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

Jde o funkci hladkou (tj. existují její derivace všech řádů) na celém  $\mathbb{R}$  s kompaktním nosičem (množinou na které je funkce nenulová) v intervalu  $(-a, a)$ .

(E) Funkce  $g(x)$  pro  $a = 1$ 

Integrální funkcional

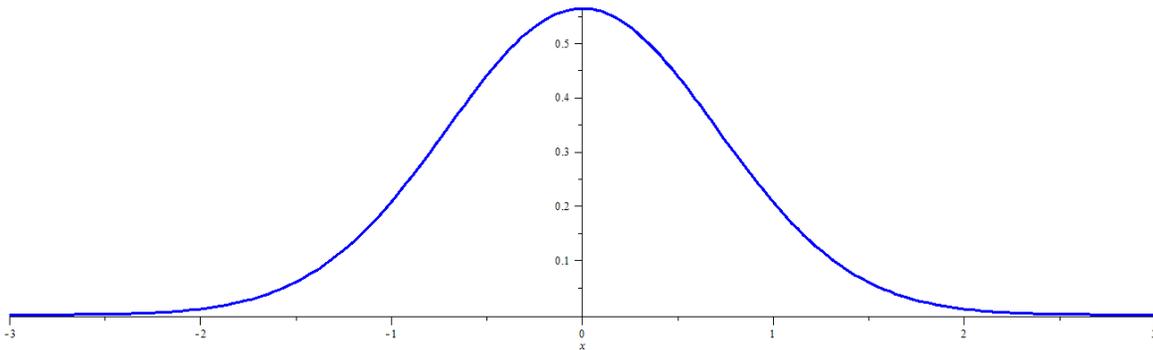
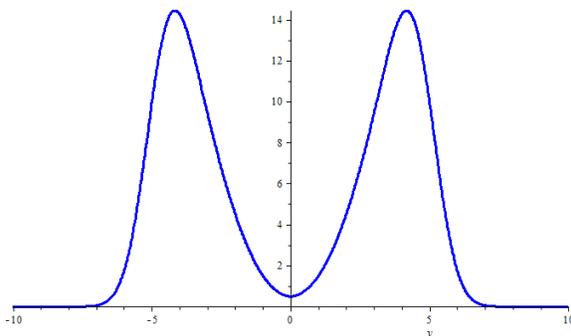
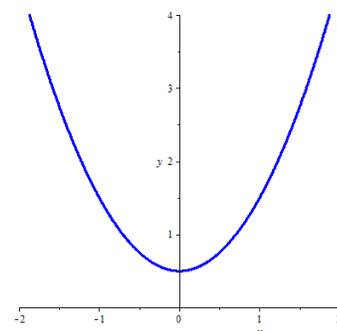
$$L_y(f) = \int_a^b f(x)g(y-x) dx$$

je pak možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování“ hodnot funkce  $f$  kolem bodu  $x = y$  (funkce  $g$  má ve svém středu hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti  $a$  na obě strany). Jde tedy o váženou kombinaci hodnot s rychle se zmenšující vahou při vzdalování se od počátku. Integrál funkce  $g$  na celém  $\mathbb{R}$  je konečný, tedy je možné funkci přenásobením konstantou upravit na funkci, jejíž integrál přes celé  $\mathbb{R}$  je 1.

Podobně lze uvažovat tzv. Gaussovu funkci

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, \quad \text{popř.} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

jejíž integrál přes celé  $\mathbb{R}$  je 1 a jde tedy opět o „nerovnoměrné průměrování“ dané funkce. Pokud je vahou Gaussova funkce je zřejmé, že význam bodů dále od počátku bude klesat, ale nebude nulový.

(F) Gaussova funkce  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ (G)  $\int_{-5}^5 x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2} dx$ (H)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2} dx$

Pohled na integrální funkcionál  $L_y$  jako na zprůměrované chování funkce  $f$  v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ . Místo prostoru  $\mathcal{S}$  všech po částech spojitých funkcí na  $\mathbb{R}$  budeme uvažovat po částech spojitě a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce  $f$  v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr  $y$  může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce  $f \mapsto \tilde{f}$ , tj.

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x) dx.$$

Této operaci se říká konvoluce funkcí  $f$  a  $g$ , značíme ji  $f * g$ . Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém  $\mathbb{R}$ .

Pomocí transformace  $x = y - t$  se snadno spočte

$$(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} f(y-t)g(t) dt = (g * f)(y),$$

tedy konvoluce je coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní. Podobně lze ukázat, že platí

- asociativita

$$f * (g * h) = (f * g) * h;$$

- linearita ( $c \in \mathbb{R}$ )

$$f * (g + h) = f * g + f * h, \quad f * (cg) = c(f * g) = (cf) * g;$$

- 

$$|f * g| \leq |f| * |g|;$$

- konvoluce dvou spojitých funkcí je spojitá funkce.

Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument  $f$  je přenášenou informací, funkce  $g$  je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

**Příklad 183.** Uvažujme funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konvoluci  $f * g$ .

*Řešení.* Zřejmě je konvoluce daných funkcí pro proměnnou  $|y| \geq 2$  nulová. Např. pro  $y = 2$  dostáváme, že funkce  $f(x)$  je nenulová pro  $x \in (-1, 1)$  a funkce  $g(2-x)$  pro  $x \in [1, 3]$ , tedy jejich součin pro libovolné  $x$  je nulový. Pro  $y > 2$  se nosiče funkcí  $f(x)$  a  $g(y-x)$  ještě více vzdalují. Pro  $y \leq -2$  podobně (popř. přímo ze sudosti obou funkcí).

Zajímá nás tedy jen interval  $(-2, 2)$ . Nosič funkce  $f(x)$  je stále interval  $(-1, 1)$ , zatímco nosič funkce  $g(y-x)$  je „proměnný“ a jde o interval  $(y-1, y+1)$ . Proto musíme uvažovat dva případy. Nejprve pro  $y \in (-2, 0]$  je součin  $f(x)g(y-x)$  nenulový pro  $x \in (-1, y+1)$ , tedy máme

$$(f * g)(y) = \int_{-1}^{y+1} (1-x^2) \cdot 1 dx = -\frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3}.$$

Podobně pro  $y \in (0, 2)$  je součin  $f(x)g(y-x)$  nenulový pro  $x \in (y-1, 1)$ , tedy

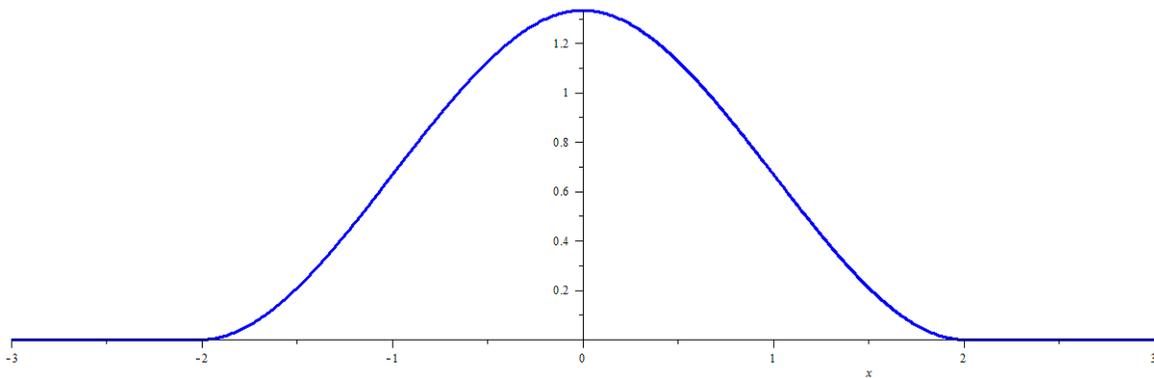
$$(f * g)(y) = \int_{y-1}^1 (1-x^2) \cdot 1 dx = \frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3}.$$

Celkem jsme tedy zjistili, že

$$(f * g)(y) = \begin{cases} -\frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in (-2, 0], \\ \frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in (0, 2), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{|y|^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in (-2, 2), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

□



(I) Konvoluce  $(f * g)(y)$  z příkladu 183

**Poznámka 38.** Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostoro-  
rech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y, x) dx$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiční obor takových funkcionálů je nutné  
vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

Nyní se zaměříme na jeden mimořádně důležitý případ integrálních operátorů, tzv. Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}$ , která úzce souvisí s Fourierovými řadami. Připomeňme si základní formuli pro para-  
metrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání  $\omega = 2\pi/T$ , kde  $T$  je čas jednoho  
oběhu

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Zjevně funkce  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$  tvoří ortogonální systém funkcí s periodou  $T$  a jejich velikosti na  
intervalu délky periody jsou  $\sqrt{T/2}$ , např.

$$\|\sin \omega t\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} (\sin \omega t)^2 dt = \frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin ns)^2 ds = T/2.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci  $f(t)$  zavedeme její komplexní Fourierovy koeficienty jako kom-  
plexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega nt} dt.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty Fourierových řad

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a těmito čísly  $c_n$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Při reálném  $f$  jsou samozřejmě  $c_n$  a  $c_{-n}$  komplexně konjugované.

Označíme-li  $\omega_n = \omega n$ , je původní funkce  $f(t)$  s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Při pevně zvoleném  $T$  vyjadřuje výraz  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T$  změnu ve frekvenci způsobenou nárůstem  $n$  o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence.

Náš další postup bude spočívat v limitním přechodu  $T \rightarrow \infty$ . Přitom se početná množina hodnot  $c_n$  „zahustí“ na celé kontinuum reálných hodnot a získáme místo Fourierových koeficientů  $c_n$  novou funkci  $\tilde{f}$ .

Koeficient  $1/T$  u formule pro  $c_n$  je roven  $\Delta\omega/2\pi$ , takže můžeme řadu pro  $f(t)$  přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx e^{i\omega_n t} \right).$$

Představme si nyní hodnoty  $\omega_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{Z}$  jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly  $[\omega_n, \omega_{n+1}]$  o délce  $\Delta\omega$ . Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

kde  $g(\omega)$  je funkce nabývající v bodech  $\omega_n$  hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Předpokládejme, že naše funkce  $f$  je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé  $\mathbb{R}$ . Pak můžeme limitně přejít  $T \rightarrow \infty$  a dojde ke zjemňování normy  $\Delta\omega$  našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci  $f$  na  $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Této funkci  $\tilde{f}$  říkáme Fourierova transformace funkce  $f$ , kde koeficient  $1/\sqrt{2\pi}$  souvisí s definicí inverzní operace. Naše odvození totiž ukazuje, že pro „rozumné“ funkce  $f(t)$  bude platit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Tím říkáme, že existuje k právě definované Fourierově transformaci  $\mathcal{F}$  inverzní operace  $\mathcal{F}^{-1}$ , které říkáme inverzní Fourierova transformace.

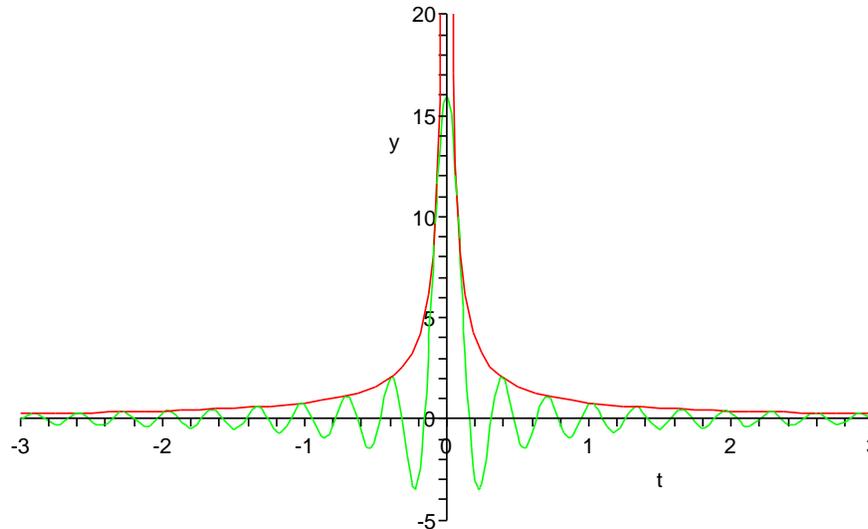
Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem  $k(\omega, t) = e^{\pm i\omega t}$ .

**5.4. Vlastnosti Fourierovy transformace.** Fourierova transformace zajímavým způsobem převrací lokální a globální chování funkcí. Začneme jednoduchým příkladem, ve kterém najdeme funkci  $f(t)$ , která se ztransformuje na charakteristickou funkci intervalu  $[-\omega, \omega]$ , tj.  $\tilde{f}(x) = 0$  pro  $|x| > \omega$  a  $\tilde{f}(x) = 1$  pro  $|x| \leq \omega$ . Inverzní transformace  $\mathcal{F}^{-1}$  nám dává

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_{-\omega}^{\omega} = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}} \sin(\omega t).$$

Přímým výpočtem limity v nule spočteme, že  $f(0) = 2\omega(2\pi)^{-1/2}$ , nejbližší nulové body jsou v  $t = \pm\pi/\omega$  a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek  $x = 0$ .

Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro  $\omega = 20$ . Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím  $\omega$  naše funkce  $f(t)$  stále rychleji „vlní“.



V dalším příkladu spočteme Fourierovu transformaci derivace  $f'(t)$  pro nějakou funkci  $f$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že  $f$  má kompaktní nosič, tj. zejména  $\mathcal{F}(f')$  i  $\mathcal{F}(f)$  skutečně existují a počítejme metodou per partes

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \end{aligned}$$

**Tvrzení 14** (Transformace derivací). *Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj.  $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega)$ ,  $\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}(f)$ , ...*

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Najdeme transformaci konvoluce  $h = f * g$ , kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče.

Při výpočtu zaměníme pořadí integrování, což je krok, který bude ověřen v diferenciálním a integrálním počtu až později (MB103). V dalším kroku pak zavedeme substituci  $t - x = u$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x) dx \right) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt \right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega(u+x)} du \right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \right) \\
 &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),
 \end{aligned}$$

tedy transformace konvoluce je (až na konstantu) součin transformací.

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce  $f * g$  velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny  $f$ . Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro  $g$ . Prostě spočteme  $\mathcal{F}(f * g)$  a podělíme obrazem  $\mathcal{F}(g)$ . Hovoříme pak o dekonvoluci.

## 6. ELEMENTÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice byly přesunuty do předmětu MB103 (a MB203). Následující kapitola je zde ponechána pro zájemce a pro případné využití při přípravě do předmětu MB103.

Tato kapitola je zaměřena na použití diferenciálního a integrálního počtu pro řešení některých jednoduchých diferenciálních rovnic.

**6.1. Úvod a motivace.** Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytuje neznámá funkce spolu se svou derivací (či derivacemi vyšších řádů).

Diferenciální rovnice slouží k modelování fyzikálních procesů (viz také konec Odstavce 2.7), vyskytují se v ekonomii, biologii, chemii, atd.

**Příklad 184.** Příklady fyzikálních procesů, které jsou modelovány diferenciálními rovnicemi.

(a) Neznámá funkce je  $u = u(x)$  (poloha bodu na přímce),

$$m \cdot u'' = F(x) \quad (\text{Newtonův zákon}).$$

(b) Neznámá funkce je  $u = u(x, t)$  (teplota v bodě  $x$  na přímce v čase  $t$ ),

$$\alpha^2 \cdot u_{xx} = u_t \quad (\text{vedení tepla na přímce}).$$

(c) Neznámá funkce je  $u = u(x, t)$  (vychýlení v bodě  $x$  na přímce v čase  $t$ ),

$$\alpha^2 \cdot u_{xx} = u_{tt} \quad (\text{vlnová rovnice}).$$

(d) Neznámá funkce je  $\theta = \theta(t)$  (úhel v čase  $t$ ),

$$\theta'' + \alpha \sin \theta = 0 \quad (\text{matematické kyvadlo}).$$

(e) Neznámá funkce je  $Q = Q(t)$  (množství radioaktivního materiálu v čase  $t$ ),

$$Q' = -kQ \quad (\text{radioaktivní rozpad}).$$

□

Otázky k zamyšlení:

1. Jak poznáme, že daná diferenciální rovnice vůbec má řešení? (otázka existence řešení)
2. Je toto řešení jediné? (otázka jednoznačnosti řešení)
3. Kolik řešení existuje?
4. Jak najít toto/tato řešení? (metody řešení diferenciálních rovnic)
5. Jak určit chování případných řešení, aniž by bylo nutné danou diferenciální rovnici vyřešit? (kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic)

**Příklad 185.** Diferenciální rovnice  $x y' + y = 0$  má řešení  $y = \frac{C}{x}$  pro libovolné  $C \in \mathbb{R}$ , protože

$$y' = (Cx^{-1})' = -\frac{C}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x y' + y = x \left( -\frac{C}{x^2} \right) + \frac{C}{x} = 0.$$

Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení.  $\square$

Řešení diferenciální rovnice je funkce  $y = y(x)$  (případně funkce  $y = y(t)$ ,  $y = y(x, t)$ , apod.), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic se obvykle najdou pomocí integrování, a proto budou obsahovat integrační konstanty (zřejmě tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. obecné řešení (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např.  $y(x_0) = y_0$  (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá partikulární.

**Příklad 186.** Obecné řešení diferenciální rovnice z Příkladu 185 je

$$y = \frac{C}{x}, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Řešení této diferenciální rovnice splňující počáteční podmínku  $y(1) = 1$  je  $y = \frac{1}{x}$  (tohle je tedy partikulární řešení).  $\square$

**Příklad 187.** Matematicky lze každý příklad na výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál, viz Odstavec 3.1) chápat jako diferenciální rovnici  $y' = f(x)$ , přičemž hledaná neznámá funkce  $y$  se vypočítá jako  $y = \int f(x) dx$ , tedy přímým integrováním.  $\square$

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

**Příklad 188.** Tedy diferenciální rovnice z Příkladu 184(a–d) jsou druhého řádu, zatímco rovnice v Příkladu 184(e) je prvního řádu.  $\square$

**6.2. Diferenciální rovnice 1. řádu.** V tomto odstavci se budeme podrobněji zabývat diferenciálními rovnicemi 1. řádu. Tj. jsou to rovnice tvaru

$$y' = F(x, y). \tag{70}$$

**Příklad 189.**

(a) Rovnice  $y' = y^2$  má nekonečně mnoho řešení (tedy obecné řešení)

$$y = \frac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

definovaných na  $(-\infty, C)$  a na  $(C, \infty)$  a řešení  $y = 0$  definované na celém  $\mathbb{R}$ .

(b) Rovnice  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$  s počáteční podmínkou  $y(0) = 0$  má řešení  $y = 0$  a  $y = x^3$  (a také libovolnou jejich navazující kombinaci, viz obr.). Tedy existuje nekonečně mnoho řešení.  $\square$

**Poznámka 39.** V obecné teorii diferenciálních rovnic lze ukázat, že pokud je pravá strana rovnice (70) spojitá a navíc tzv. lipschitzovská v proměnné  $y$ , tj.  $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$  pro každé  $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  a pro nějaké univerzální  $L \geq 0$ , potom řešení počáteční úlohy s touto rovnicí a podmínkou  $y(x_0) = y_0$  skutečně existuje a je jediné – ale pouze v dostatečně malém okolí bodu  $x_0$ .

Navíc je zřejmé, že toto řešení bude spojitě podle Věty 9 a bude mít spojitou derivaci, protože  $y' = F(x, y)$  je spojitá funkce, jak předpokládáme.  $\square$

Speciálními případy této diferenciální rovnice jsou rovnice se separovanými proměnnými a rovnice lineární, kterým se budeme blíže věnovat.

**6.3. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.** Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

tj. pravá strana z obecné rovnice (70) je  $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ , tj. je to součin funkce proměnné  $x$  a funkce proměnné  $y$  (odtud je název této rovnice).

**Příklad 190.**

(a) Pro diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x^2}{y \cdot (1 + x^3)} \quad \text{je} \quad f(x) = \frac{x^2}{1 + x^3}, \quad g(y) = \frac{1}{y},$$

a proto se jedná o rovnici se separovanými proměnnými.

(b) Rovnice v Příkladech 187 a 189 jsou všechny se separovanými proměnnými.

(c) Rovnice  $y' = x + y$  není rovnice se separovanými proměnnými  $\square$

Pokud napíšeme derivaci  $y'$  jako podíl diferenciálů  $\frac{dy}{dx}$ , tj.  $y' = \frac{dy}{dx}$ , potom lze rovnici se separovanými proměnnými přepsat na tvar

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx,$$

odtud název – separované proměnné. A tuto poslední rovnici vyřešíme integrací na obou stranách – na levé straně podle proměnné  $y$  a na pravé straně podle proměnné  $x$ , tj.

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C}. \quad (71)$$

Integrační konstantu lze zřejmě brát pouze jednou, např. tedy na pravé straně. Dostáváme tedy následující tvrzení.

**Tvrzení 15 (O řešitelnosti diferenciální rovnice se separovanými proměnnými).** Jsou-li funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  spojitě a  $g(y) \neq 0$  na intervalu  $(c, d)$ , potom má počáteční úloha

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je dáno implicitně vztahem (71). Konstanta  $C$  se určí z počáteční podmínky  $y(x_0) = y_0$ .

**Příklad 191.** Pro diferenciální rovnici z Příkladu 190 máme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{y \cdot (1+x^3)} &\Rightarrow & y \, dy = \frac{x^2}{1+x^3} \, dx &\Rightarrow & \int y \, dy = \int \frac{x^2}{1+x^3} \, dx \\ & &\Rightarrow & \frac{y^2}{2} = \left| \begin{array}{l} 1+x^3 = u \\ 3x^2 \, dx = du \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + C \\ & &\Rightarrow & \boxed{y^2 = \frac{2}{3} \ln |1+x^3| + C}. \end{aligned}$$

Pokud je navíc zadána počáteční podmínka  $y(0) = 2$ , potom dosazením do vypočteného vztahu za  $x = 0$  a  $y = 2$  dostaneme rovnici  $4 = C$ , a tedy partikulární řešení je

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{2}{3} \ln |1+x^3| + 4}}$$

(ve výše uvedeném vztahu bereme kladnou odmocninu, protože hodnota  $y(0) = 2 > 0$ ).  $\square$

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici se separovanými proměnnými. Např. diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se pomocí substituce  $u = \frac{y}{x}$  (Pozor,  $u = u(x)$  je funkce proměnné  $x$ !) převede na rovnici se separovanými proměnnými. Skutečně, protože je (podle pravidla pro derivaci součinu, viz Věta 10(iii))

$$\begin{aligned} u \cdot x = y &\Rightarrow u' \cdot x + u = y' &\Rightarrow & u' \cdot x + u = f(u) \\ &\Rightarrow \frac{du}{dx} x = f(u) - u &\Rightarrow & \frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

a poslední uvedená rovnice má separované proměnné ( $x$  a  $u$ ).

**Příklad 192.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

*Řešení.* Volbou  $u = \frac{y}{x}$ , neboli  $y = u \cdot x$ , dostaneme  $y' = u' \cdot x + u$  a po dosazení do rovnice

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u = 1 + u &\Rightarrow u' \cdot x = 1 &\Rightarrow & \frac{du}{dx} \cdot x = 1 \\ &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx &\Rightarrow & \int du = \int \frac{1}{x} dx &\Rightarrow & u = \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Zpětným dosazením za proměnnou  $u$  pak dostaneme hledané řešení

$$\frac{y}{x} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x \ln |x| + Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.)  $\square$

6.4. **Lineární diferenciální rovnice 1. řádu.** Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)$$

tj. pravá strana z obecné rovnice (70) je  $F(x, y) = a(x)y + b(x)$ , tj. je to lineární funkce vzhledem k proměnné  $y$ .

**Příklad 193.**

- (a) Rovnice v Příkladu 184(e) je lineární ( $a(x) = -k$  je konstanta a  $b(x) \equiv 0$ ).
- (b) Rovnice v Příkladech 189 a 190(a,b) nejsou lineární.
- (c) Rovnice v Příkladu 190(c) je lineární.

□

Lineární diferenciální rovnici lze jednoduchým způsobem vyřešit.

- Rovnice je tzv. homogenní, tj.  $b(x) \equiv 0$ . Potom se jedná o rovnici  $y' = a(x)y$ , což je rovnice se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = a(x)y &\Rightarrow \frac{1}{y} dy = a(x) dx &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int a(x) dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = \int a(x) dx + C &\Rightarrow |y| = e^{\int a(x) dx + C} = e^{\int a(x) dx} \cdot e^C \\ &\Rightarrow \pm y = e^{\int a(x) dx} \cdot e^C &\Rightarrow y = e^{\int a(x) dx} \cdot \underbrace{(\pm e^C)}_{\text{lib. konst.}} \\ &\Rightarrow \boxed{y = C e^{\int a(x) dx}}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{72}$$

- Rovnice je tzv. nehomogenní, tj.  $b(x) \not\equiv 0$ . V tomto případě se nejprve celá rovnice vynásobí vhodnou funkcí  $\mu(x)$  (tzv. integračním faktorem), aby po úpravách vznikl výraz pro derivaci součinu. Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) := e^{-\int a(x) dx}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} y' - a(x)y = b(x) &\Rightarrow [y' - a(x)y] \cdot \mu(x) = b(x) \cdot \mu(x) \\ &\Rightarrow \underbrace{y' \cdot e^{-\int a(x) dx} - y a(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}}_{(y \cdot e^{-\int a(x) dx})'} = b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} \\ &\Rightarrow (y \cdot e^{-\int a(x) dx})' = b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} \\ &\Rightarrow y \cdot e^{-\int a(x) dx} = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + C \\ &\Rightarrow \boxed{y = e^{\int a(x) dx} \left[ \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + C \right]}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{73}$$

Tedy jsme dokázali následující tvrzení.

**Tvrzení 16 (O řešitelnosti lineární diferenciální rovnice 1. řádu).** Jsou-li koeficienty  $a(x)$  a  $b(x)$  spojité funkce na intervalu  $(a, b)$ , potom má počáteční úloha

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu  $(a, b)$  definováno vztahem (73). Konstanta  $C$  se určí z počáteční podmínky  $y(x_0) = y_0$ .

Tedy vidíme, že na rozdíl od nelineárních rovnic, které mají zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu  $x_0$  (viz Poznámka 39), jsou lineární diferenciální rovnice jednoznačně řešitelné na celém intervalu spojitosti pravé strany rovnice.

**Příklad 194.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x.$$

*Řešení.* Protože je  $y' + 3y = x$ , je integrační faktor

$$\mu(x) = e^{\int 3 dx} = e^{3x}.$$

Potom platí

$$\underbrace{y' e^{3x} + 3y e^{3x}}_{(y \cdot e^{3x})'} = x e^{3x} \quad \Rightarrow \quad (y \cdot e^{3x})' = x e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot e^{3x} = \int x e^{3x} dx + C \quad \left| \begin{array}{l} u' = e^{3x} \\ v = x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} u = \frac{e^{3x}}{3} \\ v' = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{3} x - \frac{1}{9} + C e^{-3x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) □

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici lineární. Například tzv. Bernoulliho rovnice

$$y' = a(x)y + b(x)y^r$$

se pomocí substituce  $u = y^{1-r}$  (Pozor,  $u = u(x)$  je funkce proměnné  $x$ !) převede na rovnici lineární. Je-li  $r > 0$ , pak má rovnice také řešení  $y \equiv 0$ , které není zahrnuté v obecném řešení.

**Příklad 195.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 3y - x y^2.$$

*Řešení.* Jedná se zřejmě o Bernoulliho rovnici s  $r = 2$ . Substitucí  $u = y^{-1} = \frac{1}{y}$  dostaneme  $u' = -y^{-2}y' = -\frac{y'}{y^2}$  a tedy daná rovnice se převede na tvar

$$y' = 3y - x y^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{y'}{y^2} = -3\frac{1}{y} + x \quad \Rightarrow \quad u' = -3u + x.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $u(x)$ . Z Příkladu 194 víme, že její řešení je funkce

$$u = \frac{1}{3} x - \frac{1}{9} + C e^{-3x}.$$

Zpětným dosazením za funkci  $u$  pak dostaneme řešení původní rovnice

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + C e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + C e^{-3x}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) Nezapomeňte také na řešení  $y \equiv 0$ .  $\square$

Dalším trikem, který někdy může pomoci převést danou rovnici na lineární diferenciální rovnici, je záměna nezávislé a závislé proměnné  $x$  a  $y$ . Tedy místo hledání řešení jako funkce  $y = y(x)$  jej budeme hledat jako funkci  $x = x(y)$ . Výsledkem potom zřejmě bude řešení zadané pomocí inverzní funkce.

**Příklad 196.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y^2 - 2x}.$$

*Řešení.* Tato rovnice není lineární diferenciální rovnice. Platí ale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -2x + y^2,$$

přičemž poslední rovnice už je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $x = x(y)$ . Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru, tj.  $\mu(y) = e^{2y}$ . Řešení je potom tvaru (po dvojnásobné integraci per-partes v integrálu  $\int y^2 e^{2y} dy$ )

$$\boxed{x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} + C e^{-2y}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice. Derivaci  $y'$  získáte z pravidla pro derivování implicitní funkce, viz Odstavec 2.12.)  $\square$

**6.5. Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.** V tomto odstavci probereme (na ukázkou) tři aplikace lineárních diferenciálních rovnic.

• Radioaktivní rozpad – Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu.

Tedy označíme-li jako  $Q(t)$  množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase  $t$  [roků], potom musí platit rovnice

$$\boxed{Q'(t) = -r Q(t)}, \quad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj.  $Q' < 0$ .

**Příklad 197 (Radioaktivní rozpad).** Rádium-226 má poločas rozpadu 1620 let. Najděte čas potřebný k tomu, aby se dané množství Ra-226 zmenšilo na  $\frac{3}{4}$  původního množství.

*Řešení.* Označíme-li jako  $Q(0) := Q_0$  původní množství Ra-226, potom pro hledanou funkci  $Q(t)$ , která splňuje (homogenní) lineární diferenciální rovnici  $Q' = -r Q$ , platí (viz (72))

$$Q(t) = C e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad Q(0) = C e^0 = C \quad \Rightarrow \quad C = Q_0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 e^{-rt}.$$

Nyní určíme konstantu  $r$  z informace o poločasu rozpadu:

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-r \cdot 1620} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -r \cdot 1620 \Rightarrow r = \frac{-\ln \frac{1}{2}}{1620} = \frac{\ln 2}{1620} \approx 0.000428 \text{ [let}^{-1}\text{]}.$$

A nyní určíme hodnotu  $t$ , pro kterou je  $Q(t) = \frac{3}{4} Q_0$ :

$$\frac{3}{4} Q_0 = Q_0 e^{-rt} \Rightarrow \ln \frac{3}{4} = -rt \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{3}{4}}{-r} = -\frac{1620 \ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \approx \boxed{672.4 \text{ [let]}}.$$

□

• Výměna tepla mezi tělesem a okolím – Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (tzv. Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase  $t$  jako  $\Theta(t)$  [°C] a teplotu okolního prostředí jako  $T$  [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k [\Theta(t) - T], \quad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí vyšší, než je teplota tělesa (tj. pokud je  $\Theta(t) < T$ ), potom je  $\Theta' > 0$  a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí nižší, než je teplota tělesa (tj. pokud  $\Theta(t) > T$ ), potom je  $\Theta' < 0$  a těleso se bude ochlazovat.

**Příklad 198 (Detektivní kancelář).** Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí.

*Řešení.* Při použití výše uvedeného značení (pro čas  $t$  v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3, \quad \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)}, \quad \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce  $\Theta(t)$  splňuje rovnici

$$\Theta' = -k(\Theta - T) \Rightarrow \Theta' = -k\Theta + kT.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $\Theta(t)$ . Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru  $\mu(t) = e^{kt}$ , tj. podle (73) je

$$\Theta = T + C e^{-kt} = 18.3 + C e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstanty  $C$  a  $k$  určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase  $t = 3$  [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C e^0 = 18.3 + C \Rightarrow C = 8.3 \Rightarrow \Theta = 18.3 + 8.3 e^{-kt},$$

a dále

$$\begin{aligned} 21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3 e^{-3k} &\Rightarrow e^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337 \Rightarrow -3k = \ln 0.337 \\ &\Rightarrow k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362. \end{aligned}$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\boxed{\Theta(t) = 18.3 + 8.3 e^{-0.362t}}.$$

Jak se určí čas úmrtí? Určíme čas  $t$ , pro který je  $\Theta(t) = 37$  °C (teplota lidského těla). Tedy

$$18.3 + 8.3 e^{-0.362t} = 37 \Rightarrow e^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253 \Rightarrow -0.362t = \ln 2.253$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24 \approx -\boxed{2 \text{ hodiny } 15 \text{ minut}}.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti.  $\square$

• Míchání dvou látek – např. voda a do ní roztok soli, nebo voda (jezero) a do ní nečistoty z továrny, atd.

**Příklad 199 (Míchání roztoku).** Vodní nádrž o celkovém objemu  $L = 1000$  [litrů] obsahuje  $Q_0 = 0$  [gramů] soli v počátečním čase  $t_0 = 0$  [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli  $c = 50$  [gramů/litr] rychlostí  $v = 20$  [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí (viz obr.). Určete množství soli  $Q(t)$  v nádrži v libovolném čase  $t$  a limitní množství pro  $t \rightarrow \infty$ .

*Řešení.* Označili jsme jako  $Q(t)$  [g] množství soli v nádrži v libovolném čase  $t$  [min]. Potom  $Q'(t)$  udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left( \begin{array}{l} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže přitéká rychlostí

$$c \cdot v = 50 \text{ [g/l]} \cdot 20 \text{ [l/min]} = 1000 \text{ [g/min]}.$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna  $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$  [g/l], sůl z nádrže vytéká rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \text{ [g/l]} \cdot 20 \text{ [l/min]} = \frac{Q(t)}{50} \text{ [g/min]}.$$

Tedy hledaná funkce  $Q(t)$  splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \quad \Rightarrow \quad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \quad \Rightarrow \quad Q(0) = 0. \quad (74)$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = e^{\int \frac{v}{L} dt} = e^{\frac{v}{L} t} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{0.02t}$$

a potom je (výpočty uvádím jak pro obecnou situaci tak i pro náš konkrétní příklad)

$$\begin{aligned} Q' + \frac{v}{L} Q &= cv & \Rightarrow & \quad Q' + 0.02 Q = 1000, \\ Q' e^{\frac{v}{L} t} + \frac{v}{L} e^{\frac{v}{L} t} Q &= c v e^{\frac{v}{L} t} & \Rightarrow & \quad Q' e^{0.02t} + 0.02 e^{0.02t} Q = 1000 e^{0.02t}, \\ (Q e^{\frac{v}{L} t})' &= c v e^{\frac{v}{L} t} & \Rightarrow & \quad (Q e^{0.02t})' = 1000 e^{0.02t}, \\ Q e^{\frac{v}{L} t} &= \int c v e^{\frac{v}{L} t} dt = c v \frac{e^{\frac{v}{L} t}}{\frac{v}{L}} + C & \Rightarrow & \quad Q e^{0.02t} = \int 1000 e^{0.02t} dt = 1000 \frac{e^{0.02t}}{0.02} + C, \\ \boxed{Q = cL + C e^{-\frac{v}{L} t}} & & \Rightarrow & \quad \boxed{Q = 50000 + C e^{-0.02t}}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A protože je počáteční množství známo v (74), pro integrační konstantu  $C$  platí

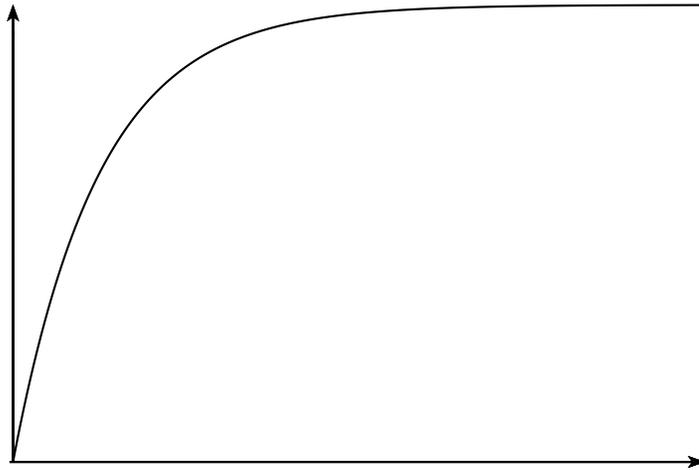
$$\begin{aligned} Q_0 = Q(t_0) = cL + C e^{-\frac{v}{L} t_0} &\Rightarrow 0 = Q(0) = 50000 + C e^0, \\ C = (Q_0 - cL) e^{\frac{v}{L} t_0} &\Rightarrow C = -50000, \end{aligned}$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku  $t$  minut) je tvaru

$$\begin{aligned} Q = cL + (Q_0 - cL) e^{-\frac{v}{L} t_0} e^{-\frac{v}{L} t} &\Rightarrow Q = 50000 - 50000 e^{-0.02t}, \\ \boxed{Q = cL + (Q_0 - cL) e^{-\frac{v}{L} (t-t_0)}} &\Rightarrow \boxed{Q = 50000 (1 - e^{-0.02t})}. \end{aligned}$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je  $Q_0 > cL$  nebo  $Q_0 < cL$ , množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při  $Q_0 = cL$  zůstává stále stejné.

Pro situaci v tomto příkladu je výsledné množství soli zobrazeno na následujícím obrázku.



OBRÁZEK 3. Graf funkce  $Q(t) = 50000 (1 - e^{-0.02t})$  na intervalu  $[0, 400]$ .

Pro  $t \rightarrow \infty$  je potom

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ cL + (Q_0 - cL) \underbrace{e^{-\frac{v}{L} (t-t_0)}}_{\rightarrow 0} \right\} &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 50000 (1 - \underbrace{e^{-0.02t}}_{\rightarrow 0}) \\ \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = cL \text{ [g]}} &\Rightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 50000 \text{ [g]}}. \end{aligned}$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{cL}{L} = c \text{ [g/l]}, \quad \text{neboli} \quad Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \text{ [g/l]},$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství  $Q_0$ , tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku).  $\square$

**Příklad 200 (Míchání roztoku – pokračování).** Jak se změní model v předchozím Příkladu 199, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze  $w = 19$  [litrů/min] (viz obr.)? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

*Řešení.* Všimněte si, že se nyní objem roztoku v nádrži mění (roste) a to rychlostí  $v - w = 1$  [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže vytéká rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v - w)(t - t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000 + t} \text{ [g/l]} \cdot 19 \text{ [l/min]} = \frac{19Q(t)}{1000 + t} \text{ [g/min]}.$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v - w)(t - t_0)} \cdot w \quad \Rightarrow \quad Q' = 1000 - \frac{19Q(t)}{1000 + t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení  $Q(t)$  splňuje počáteční podmínku (74). Příslušný integrační faktor je (nyní již pouze pro naše konkrétní hodnoty)

$$\mu(t) = e^{\int \frac{19}{1000+t} dt} = e^{19 \ln(1000+t)} = e^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000 + t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} Q' + \frac{19Q(t)}{1000 + t} = 1000 &\Rightarrow Q'(1000 + t)^{19} + 19Q(t)(1000 + t)^{18} = 1000(1000 + t)^{19} \\ &\Rightarrow [Q(1000 + t)^{19}]' = 1000(1000 + t)^{19} \\ &\Rightarrow Q(1000 + t)^{19} = \int 1000(1000 + t)^{19} dt = 1000 \frac{(1000 + t)^{20}}{20} + C \\ &\Rightarrow Q = \frac{50(1000 + t)^{20} + C}{(1000 + t)^{19}} = \boxed{50(1000 + t) + \frac{C}{(1000 + t)^{19}}}. \end{aligned}$$

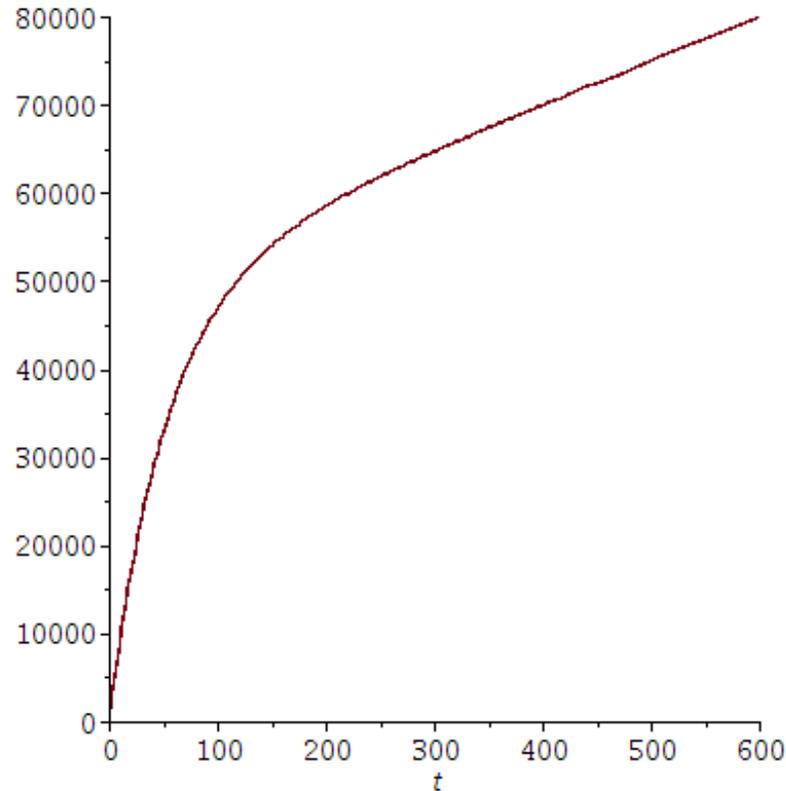
Z počáteční podmínky (74) pak určíme hodnotu  $C$ , tj.

$$0 = Q(0) = 50 \cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \quad \Rightarrow \quad C = -50000 \cdot 1000^{19} = -5 \cdot 10^4 \cdot (10^3)^{19} = -5 \cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$\boxed{Q = 50(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}}$$

a jeho graf je zobrazen na následujícím obrázku.



OBRÁZEK 4. Graf funkce  $Q(t) = 50(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000+t)^{19}}$  na intervalu  $[0, 600]$ .

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku  $t = 600$  bude v nádrži

$$Q(600) = 50(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \text{ [g] soli,}$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \text{ [g/l],}$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. □

**6.6. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu.** Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

kde funkce  $a, b, c, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  jsou koeficienty v této rovnici.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně – na celém intervalu spojitosti koeficientů rovnice – pomocí dvou počátečních podmínek

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).

O těchto rovnicích existuje velké množství literatury, obvykle se studují zejména rovnice s konstantními koeficienty

$$a y'' + b y' + c y = f(x),$$

které mají mnoho aplikací např. při modelování mechanického a elektromagnetického kmitání.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

**Příklad 201.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = 0$$

pomocí nekonečných řad.

*Řešení.* Hledejme řešení této rovnice ve tvaru mocninné řady

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Potom podle pravidla pro derivaci mocninné řady (Věta 51) platí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2) (n+1) x^n.$$

Dosazením do rovnice  $y'' + y = 0$  dostáváme

$$0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2) (n+1) x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_y = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2) (n+1) + a_n] x^n$$

Tedy poslední uvedená řada je mocninná řada pro konstantní funkci  $s(x) \equiv 0$ , a proto musí všechny její koeficienty být nulové, tj.

$$a_{n+2} (n+2) (n+1) + a_n = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Odtud vychází rekurentní vztah pro jednotlivé koeficienty

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy jsou-li koeficienty  $a_0$  a  $a_1$  dány (všimněte si, že  $a_0 = y(0)$  a  $a_1 = y'(0)$ , tj. tyto koeficienty jsou dány počátečními podmínkami ve středu hledané mocninné řady), potom je

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2}, & a_3 &= -\frac{a_1}{3 \cdot 2}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, & a_5 &= -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, & a_7 &= -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \\ &\vdots & &\vdots \\ a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{(2k)!}, & a_{2k+1} &= (-1)^k \frac{a_1}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 - \frac{a_0}{6!} x^6 - \frac{a_1}{7!} x^7 + \dots \\
 &= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right\} \\
 &\quad + a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots \right\} \\
 &= \boxed{a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right\}}.
 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že hledané obecné řešení je lineární kombinací dvou funkcí (viz Příklad 176)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \cos x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin x,$$

přičemž uvedené mocninné řady konvergují pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  (jejich poloměr konvergence je  $R = \infty$ ). Neboli obecné řešení uvedené diferenciální rovnice je (položíme-li  $C := a_0$  a  $D := a_1$ )

$$\boxed{y = C \cos x + D \sin x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si zderivováním, že tato funkce je skutečně řešením pro libovolné konstanty  $C, D \in \mathbb{R}$ .)  $\square$

#### LITERATURA

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 6th Edition, John Wiley & Sons, New York, NY, 1997.
- [2] B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.
- [3] Z. Došlá, J. Kuben, *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Masarykova univerzita, Brno, 2003.
- [4] Z. Došlá, V. Novák, *Nekonečné řady*, Masarykova univerzita, Brno, 1998.
- [5] O. Došlý, P. Zemánek, *Integrální počet v  $\mathbb{R}$* , Masarykova univerzita, Brno, 2011.
- [6] V. Novák, *Integrální počet v  $\mathbb{R}$* , Masarykova univerzita, Brno, 2001.
- [7] M. Panák, J. Slovák, *Matematika drsně a svižně*, kapitoly 5–7, elektronický text k předmětu FI: MB102, 2011.
- [8] J. Slovák, M. Panák, M. Bulant a kolektiv, *Matematika drsně a svižně*, Masarykova univerzita, Brno, 2013. Dostupné z <http://goo.gl/KUbmCO>.
- [9] G. B. Thomas, R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 9th Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1996.
- [10] Matematika online [cit. 2014-03-04], Ústav matematiky FSI VUT Brno, Dostupné z <http://mathonline.fme.vutbr.cz/>.

Konec dokumentu