MB104, první dva příklady k domácímu rozjímání
jarní semestr 2017

Příklad *Petr si zvolil nějakou skupinu deseti po sobě jdoucích kladných celých čísel. Každé obarvil buď červeně nebo modře (každá z barev je použita aspoň jednou). Je možné, aby součet nejmenšího společného násobku modrých čísel a nejmenšího společného násobku červených čísel končil (v desítkové soustavě) čtyřčíslím* 2016*?*

Řešení. Ne, není to možné. Všimněme si, že číslo končící čtyřčíslím 2016 je dělitelné číslem 16. Z deseti po sobě jdoucích čísel je buď pouze jedno číslo dělitelné osmi (pak je právě jeden ze dvou uvažovaných nejmenších společných dělitelů dělitelný osmi, tudíž jejich součet není dělitelný osmi, natož šestnácti), nebo jsou mezi nimi dvě čísla dělitelná osmi, to znamená že právě jedno číslo dělitelné šestnácti a opět právě jeden z největších společných násobků je dělitelný šestnácti a jejich součet tak šestnácti dělitelný není. □

Příklad *Neprázdnou množinu A kladných celých čísel nazveme úplnou, jestliže pro libovolná kladná celá a a b taková, že $a + b \in A$, je také číslo ab prvkem A (nepožadujeme, aby a a b byla různá ani aby náležela A). Najděte všechny úplné množiny.*

Řešení. Vyhovují množiny $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{N}$. Vlastnosti množiny A ze zadání implikují:

1. Je-li $n \in A$, $n \geq 2$ pak i $(n - 1) \in A$. ($n = 1 + (n - 1)$ a tudíž i $1 \cdot (n - 1)$ je prvkem A)
2. Je-li $n \in A$, $n \geq 5$, pak musí být i nějaké větší číslo než n prvkem A ($n = 2 + (n - 2)$ a tedy i $2(n - 2) = 2n - 4 = n + n - 4 \geq n + 1$ je prvkem A.

Tyto dvě vlastnosti říkají, že jedinými možnými vyhovujícími množinami jsou $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ zjevně vyhovuje, snadno ověříme, že vyhovují i zbylé množiny. □