Matematika IV – 7. týden
Elementární kombinatorika

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2017

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!

Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

Analýza algoritmů: Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu `Quicksort`.

Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!
Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

Analýza algoritmů: Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu `Quicksort`.

Odvození Cayleyho formule: Chceme znát počet různých stromů na daných n vrcholech.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
    if L == []: return []
    return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
         + L[0:1]
         + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k-1$ a $n-k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $n-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je k-tý největší, je $\frac{1}{n}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $k-1$ a $n-k$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right).$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$

symetrie obou sum

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *symetrie obou sum*

$$nC_n = n(n-1) + 2 \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *vynásob n*

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *symetrie obou sum*

$$nC_n = n(n-1) + 2 \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *vynásob n*

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}$$ *tentýž výraz pro C_{n-1}*

Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(C_{k-1} + C_{n-k} \right), \; C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *symetrie obou sum*

$$nC_n = n(n-1) + 2 \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$ *vynásob n*

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}$$ *tentýž výraz pro C_{n-1}*

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$ *odečteno a upraveno*

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n.

Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2(n-1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty C_n dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci n.

Nejprve si pomůžeme drobným trikem, kdy vydělíme obě strany výrazem $n(n+1)$:

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

Nyní tento vztah „rozbalíme“ (*telescope*, příp. si pomůžeme substitucí $B_n = C_n/n+1$):

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} + \cdots + \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} + \frac{C_1}{2}$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1}\right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady).

Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\left(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1}\right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

($H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ je součet prvních n členů harmonické řady). Přitom je možné odhadnout $H_n \sim \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} + \gamma$, odkud

$$C_n \sim 2(n+1)(\ln(n+1) + \gamma - 2) + 2.$$

Plán přednášky

1. Motivace
2. Elementární kombinatorické metody
3. Binomická věta

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.
Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.

Počet **kombinací** k**-tého stupně** z n prvků je $(k \leq n)$

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.
Na dané konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí.
Počet **kombinací k-tého stupně** z n prvků je $(k \leq n)$

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním, $P(p_1, \ldots, p_k)$, platí

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním, $P(p_1, \ldots, p_k)$, platí

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Pro **variace k-tého stupně s opakováním** z n prvků platí

$$V(n, k) = n^k.$$

Pro **kombinace s opakováním**, $C(n,k)$, platí

Theorem

Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechna $0 \leq k$ a $0 < n$

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Princip inkluze a exkluse

Uvažujme obecnou konečnou množinu M a její podmnožiny $A_1, \ldots, A_k$. Budeme psát $|M|$ pro počet prvků množiny M, tj. pro **mohutnost** množiny M.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j})| \right).$$

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.
Výsledek je $\binom{15}{4} - \binom{13}{2} = 1287$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomická věta $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Vandermondova konvoluce $$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Odkazovací strategie

Ve vězení je 100 vězňů s čísly jedna až sto. V uzavřené místnosti je 100 krabiček s čísly jedna až sto a v každé z nich náhodně rozdělené papírky s čísly také 1 až sto. Do místnosti budou po jednom postupně vcházet vězni a každý smí otevřít 50 krabic, vězni přitom spolu nekomunikují. Jestliže každý z nich najde svoje číslo, všechny pustí, v opačném případě všechny popraví.
Doporučte nějakou rozumnou strategii pro vězně ...

Plán přednášky

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i + j + k = 22$ a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\},\ \ j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\},\ \ k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(x^0+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu.

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i+j+k=22$ a zároveň

$$i \in \{0,1,2,3,4\},\ j \in \{0,2,4,6,8,10\},\ k \in \{0,5,10,15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})(x^0+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři možnosti** $3*5+3*2+1*1$, $3*5+2*2+3*1$, $2*5+5*2+2*1$ a $2*5+4*2+4*1$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah". Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$ a a_{50} taková, že a_i je násobkem i pro všechna $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ a zároveň $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah". Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.
Nechť I, J jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané $r \in \mathbb{N}$ počet řešení (i, j) rovnice $i + j = r$ splňujících $i \in I, j \in J$ roven koeficientu u x^r v polynomu $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$ a a_{50} taková, že a_i je násobkem i pro všechna $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ a zároveň $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$. Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u x^{100} v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$
$$(1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$

Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^7 v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots+x^{15}).$$

Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^7 v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots+x^{15}).$$

Když máme předpsaný nějaký počet jako nejmenší možný, prostě začneme až od příslušných mocnin.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Věta (binomická)

Pro $n \in \mathbb{N}$ *a* $r \in \mathbb{R}$ *platí*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Na levou stranu se můžeme dívat jako na součin n polynomů, pravá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějška. Využijeme přitom **binomickou větu.**

Věta (binomická)

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $r \in \mathbb{R}$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

Na levou stranu se můžeme dívat jako na součin n polynomů, pravá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením. Dosazením čísel $x = 1$, resp. $x = -1$ dostáváme známé vzorce:

Důsledek

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

Důsledek

Platí

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

Důsledek

Platí

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme $n(1+x)^{n-1}$, derivací pravé strany (člen po členu) pak $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Dosazením $x = 1$ dostaneme tvrzení. $\square$

Zobecněná binomická věta

Pro reálná čísla x, y, α, $x + y > 0$, platí

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k},$$

kde i pro $\alpha \notin \mathbb{N}$ klademe

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Budeme dokazovat v ekvivalentním tvaru (předpokládáme $y > 0$ a tedy můžeme z celého výrazu vytknout y^α)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jde nám tedy o vyjádření koeficientů v mocninné řadě pro mocninnou funkcí $f(x) = (1+x)^\alpha$ se středem v $x = 0$. Jednoduchou kombinatorickou úvahou využívající pravidlo pro derivování mocninných řad člen po členu odvodíme požadovaný výsledek.

Budeme dokazovat v ekvivalentním tvaru (předpokládáme $y > 0$ a tedy můžeme z celého výrazu vytknout y^α)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Jde nám tedy o vyjádření koeficientů v mocninné řadě pro mocninnou funkcí $f(x) = (1+x)^\alpha$ se středem v $x = 0$.
Jednoduchou kombinatorickou úvahou využívající pravidlo pro derivování mocninných řad člen po členu odvodíme požadovaný výsledek.
Všimněme si, že pro přirozené α se od jistého k v čitateli zobecněného binomického koeficientu vždy objeví jako součinitel nula, proto v takovém případě dostáváme opět klasickou konečnou sumu z binomické věty.