Kolik je pořadí se n prvků?

1. pozice n možností
2. pozice n−1 — " —
⋮
n. pozice 1 možnost

$\Rightarrow \# = n\cdot(n-1)\cdots 1 = n!$

4 3-16:04

1.41.

6 dopisů, 6 adresátů. Pravděpodobnost, že alespoň 1 adresát dostane svůj dopis

$n = \{1,2,\dots,6\}$

$M_i = \{$permutace s pevným bodem $i\}$

$d =$ počet permutací bez pevného bodu

$d = 6! - |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_6|$

$|M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}|$, $k = 1,\dots,6$ $\Rightarrow$ 6−k „volných"

$(6-k)!$ $\quad |M_1 \cup \dots \cup M_6| = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1}\binom{6}{k}(6-k)!$

$d = 6! + \sum_{k=1}^{6}(-1)^{k}\binom{6}{k}(6-k)! = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}(6-k)!$

$= 6!\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\frac{1}{k!}$

$\binom{6}{k}(6-k)! = 6!\cdot\frac{1}{k!}$

NIKDO NEMÁ: $\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\frac{1}{k!} \simeq e^{-1}$

ASPOŇ 1 MÁ: $1 - \ldots \simeq \boxed{1-e^{-1}}$

4 3-16:14

1.42. V ČR je ročně 1200 onemocnění ps. dop. nákazou ročně. ($12/10^5$ pravděpodobnost na jedince) Z dané skupiny 300 lidí, s jakou pravděpodobností dojde alespoň k 1 nákaze za 10 let.

1 člověk neonemocní za rok: $1 - 12/10^5$

za 10 let: $(1 - 12/10^5)^{10}$

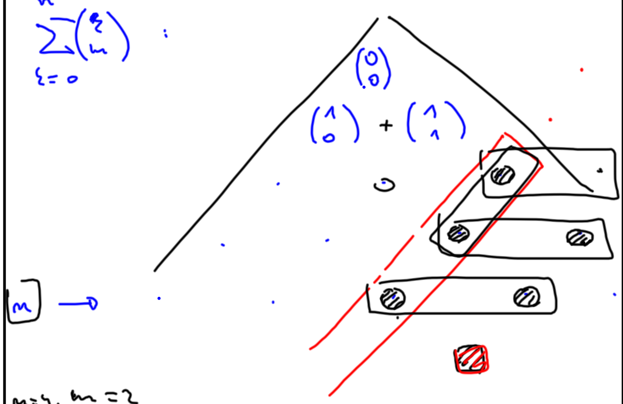
300 lidí, — " — " — 10 let: $(1 - 12/10^5)^{3000}$

$= 0{,}6977$

Aspoň 1 nákaza: $\approx 30\,\%$.

4 3-16:28

$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}$:



$n=4,\ m=2$

4 3-16:37

12.45 10 karet, z nich právě jedna je eso. Náhodný výběr s vracením. Kolikrát je třeba provést aby pravděpodobnost aspoň 1 esa byla > 0,9?

A_i: … při i-tém výběru vytaženo eso, nezávislé jevy

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(A_1' \cap \dots \cap A_n')$

$= 1 - (1-P(A_1))(1-P(A_2))\cdots(1-P(A_n))$

$P(A_i) = 1/10$

$= 1 - (9/10)^n > 0{,}9$

$-(9/10)^n > -0{,}1 \qquad (9/10)^n < 0{,}1$

$n\cdot\ln(0{,}9) < \ln(0{,}1)$ $\quad \boxed{n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}9)}}$ $\quad n \geq 22$

4 3-16:43

$x^a\cdot x^b = x^{a+b}$

$(c_0x^0 + c_1x + \dots + c_nx^n)(d_0x^0 + d_1x + \dots + d_mx^m)$

$= \sum_{i,j} c_i d_j x^{i+j}$

1 koruna: $x^a \sim a$ mincí

2 korunová: $x^{2b} \sim b$ mincí

5 korunové: $x^{5c} \sim c$ mincí

$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(x^5 + x^{10} + \dots + x^{15})$

4 3-16:55

$$1+x+\dots = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\% = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{20}}\cdot\frac{1}{1-x^{100}}$$

$$(1+x)^\alpha$$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}}$$

$$(x+y)^\alpha = \Big(\boxed{\tfrac{x}{y}}+1\Big)^\alpha \cancel{y^\alpha} = \cancel{y^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{-k}$$

$y \neq 0$

$\frac{x}{y} = z$

$$\boxed{(z+1)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k}$$

4 3-17:11

$$\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^\alpha = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}_{P}(1+x)^{\alpha-k}$$

řada v $x=0$:

$$\underset{>0}{(1+x)^\alpha} \simeq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

$(\alpha-k)$, x, $k+1$

podílové kritérium: $\frac{|\alpha-k||x|}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1\cdot|x| < 1$

4 3-17:20

$$\boxed{(1+x)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k(-1)^k = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}x^k}$$

$\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = \binom{k+n-1}{n-1}(-1)^k$$

$$= \frac{(-1)^k n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \qquad = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\,k!}\cdot(-1)^k$$

$$= (-1)^k\frac{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!\,(n-1)!}$$

4 3-17:26

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}x^k$$

$$n=1: \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{0}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

$$n=2: \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+1}{1}x^k = 1+2x+3x^2+\dots$$

$$n=3: \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k = 1+3x+\binom{4}{2}x^2+\dots$$

4 3-17:35