vytvořující funkce: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

$\{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)\} \leftrightarrow \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$

Příklad: 5 druhů šišky $\rightarrow$ 12 kuliček

KOLIKA ZPŮSOBY? $\binom{12+5-1}{5-1} = \binom{16}{4}$

(i) od každého druhu aspoň 2

(ii) -"- každý sudý počet

(iii) jednoho z typů jsou jen 3 kuličky

$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^5 \leftarrow$ koeficient u x^{12}

$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 \leftarrow$ rozvinu do mocninné řady

$(1-x)^{-5} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+5-1}{5-1} x^{12} \rightarrow \binom{16}{4}$

4 10-15:56

(i) vytvořující funkce: $(x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots)^5 = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^5$

$= \frac{x^{10}}{(1-x)^5} = x^{10} \sum_{k\geq 0} \binom{k+4}{4} x^k \Rightarrow \boxed{k = 2}$

$\Rightarrow \binom{6}{4}$ způsobů ✓

(ii) vytvořující funkce: $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^5 = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^5$

$\boxed{z = x^2}$: $\sum_{k\geq 0} \binom{k+4}{4} z^k \Rightarrow \boxed{k = 6}$

$\Rightarrow \binom{10}{4}$ způsobů

(iii) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \dots)^4 = (1 + x + x^2 + x^3) \sum_{k\geq 0} \binom{k+4-1}{4-1} x^k$

$\Rightarrow \binom{15}{3} + \binom{14}{3} + \binom{13}{3} + \binom{12}{3}$. ✓

4 10-16:14

Operace s vytvořujícími funkcemi:

posloupnosti — v. f. p.

sčítání: $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

násobení: $\alpha (a_i) = (\alpha a_i) \leftrightarrow \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) x^k$

$(a_0, a_1, \dots) \mapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\times}, a_0, a_1, \dots) \leftrightarrow x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n} x^k$

$(a_0, \dots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_n, a_{n+1}, \dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0} a_k x^k \mapsto \left(\sum_{k\geq 0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right)$

$\mapsto (\cdot/\cdot)\, x^{-n}$

dosazení αx za x

$(a_0, \dots) \mapsto (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \alpha^3 a_3, \dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0} a_k \alpha^k x^k$

$(a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_0, \overbrace{0, \dots, 0}^{s-1}, a_1, 0, \dots, 0, a_2, \dots)$ dosazení x^s za x

$\sum_{k\geq 0} a_k x^{sk}$

4 10-16:35

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto$

$\mapsto (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$

derivace řady: $\leftrightarrow \left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right)' = \sum_{k\geq 1} a_k k x^{k-1}$

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto$

$\mapsto (0, a_0, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{3} a_2, \dots)$

integrace řady: $\int \sum_{k\geq 0} a_k x^k \, dx = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$

Najděte vytvořující funkci k posloupnosti:

(i) $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+1}{1} x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

$(a_i), (b_i) \mapsto (c_i)$

KONVOLUCE

$\leftrightarrow \left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{\ell\geq 0} b_\ell x^\ell\right) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

KONVOLUCE

4 10-16:46

(ii) $(1, 4, 9, 16, \dots)$

$\frac{x}{(1-x)^2} \leftrightarrow (0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = (1-x)^{-2} + x(+2)(1-x)^{-3} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3}$

$= \frac{1+x}{(1-x)^3} \leftrightarrow (1 \cdot 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 3, 4 \cdot 4, \dots)$

$\left(\frac{1}{(1-x)^3} \leftrightarrow \left(\binom{n+2}{n}\right)\right)$

(iii) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$

$\frac{1}{1-x} \leftrightarrow (1, 1, \dots)$

$\frac{1}{1-2x} \leftrightarrow (1, 2, 4, 8, \dots)$

$\frac{1}{1-2x^2} \leftrightarrow (1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \dots)$

$\frac{x}{1-2x^2} \leftrightarrow (0, 1, 0, 2, 0, 4, \dots)$

$\frac{1+x}{1-2x^2} \leftrightarrow (1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$

4 10-16:58

(iv) $(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \dots)$

$2^0 \cdot 3^2$, $2^1 \cdot 4^2$, $2^2 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 6^2$

$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \leftrightarrow (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$

$\frac{f(x) - (1+4x)}{x^2} \leftrightarrow (3^2, 4^2, 5^2, \dots)$

substituce $x \mapsto 2x^3$:

$\frac{f(2x^3) - (1+8x^3)}{4x^6} \leftrightarrow (2^0 \cdot 3^2, 0, 0, 2^1 \cdot 4^2, 0, 0, \dots)$

$\|$

$\frac{\frac{1+2x^3}{(1-2x^3)^3} - (1+8x^3)}{4x^6} = \dots$

podíl polynomů

4 10-17:08

Nalezit řadu pro:

(i) $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x}{2-(-x)} = \dfrac{x/2}{1-(-x/2)}$

$\boxed{\dfrac{1}{1-ax}}$

$\dfrac{1}{1-x} \iff (1,1,\dots)$

$\dfrac{1}{1-(-x)} \longleftrightarrow (1,-1,1,-1,\dots)$

$\dfrac{x}{1-(-x)} \longleftrightarrow (0,1,-1,1,-1,\dots)$

$\dfrac{x/2}{1-(-x/2)} \longleftrightarrow (0, 1/2, -1/4, 1/8, \dots)$

$\overset{\shortparallel}{\sum_{n=1}^{\infty}} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{2^n}$

4 10-17:16

(ii) $\dfrac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1} = 1/3 \dfrac{1}{1-2(-x)} - 1/3 \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2} =$

$= 1/3 \sum_{k\geq 0} (-1)^k 2^k x^k - 1/3 \sum_{k\geq 0} x^k + \sum_{k\geq 0} (k+1) x^k$

$\longleftrightarrow \left((-1)^k \frac{1}{3} 2^k - \frac{1}{3} + k+1 \right)$

PARCIÁLNÍ ZLOMKY

$x = 1$ je kořen

dosazením

$(2x^3 - 3x^2 + 1) : (x-1) = \underline{\underline{2x^2 - x - 1}}$

$\underline{-2x^3 + 2x^2}$

$-x^2 + 1$

$\underline{+x^2 - x}$

$-x + 1$

$(2x^2 - x - 1) : (x-1) = \boxed{2x+1}$

$\underline{-2x^2 + 2x}$

$x - 1$

$x = -1/2$

$$\left.\frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+x+1 = \\ A\cdot(x-1)^2 + \\ B\cdot(2x+1)(x-1) + \\ C\,(2x+1) \end{array}$$

$x^0: \; 1 = A - B + C$

$\Rightarrow x^1: \; 1 = -2A - B + 2C$

$x^2: \; 1 = A + 2B$

$3 = 3C$ $\quad \boxed{C = 1}$

$A = B$ $\quad A = 1/3$

$3A = 1$ $\quad B = 1/3$

4 10-17:21