**Tvrzení 1.** *Jazyk* $A = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid$ *výpočet TS* $\mathcal{M}$ *nad slovem* $\varepsilon$ *je konečný*$\}$ *není rekurzivní.*

*Myšlenka důkazu.* Budeme chtít ukázat, že nějaký jazyk, o kterém víme, že není rekurzivní, se redukuje na jazyk $A$. Pak jazyk $A$ jistě nemůže být rekurzivní.

Protože víme, že pokud $L \leq_m R$ a $L$ není rekurzivní, pak ani $R$ není rekurzivní.

Přirozenou volbou takového známého nerekurzivního jazyka je HALT, protože stejně jako v jazyce $A$ rozhoduje o příslušnosti slova do jazyka HALT konečnost nějakého výpočtu Turingova stroje. Chceme tedy najít redukci HALT $\leq_m A$.

Pro připomenutí: HALT $= \{\langle \mathcal{M}, w \rangle \mid$ výpočet TM $\mathcal{M}$ nad slovem $w$ je konečný$\}$

Chceme tedy vymyslet, jak z kódu dvojice $\langle \mathcal{M}, w \rangle$, kde $\mathcal{M}$ je Turingův stroj a $w$ je slovo nad jeho abecedou, algoritmicky zkonstruovat kód takového TM $\mathcal{M}'$, že výpočet TM $\mathcal{M}$ nad slovem $w$ je konečný právě tehdy, když výpočet TM $\mathcal{M}'$ nad slovem $\varepsilon$ je konečný.

Jinými slovy $\langle \mathcal{M}, w \rangle \in$ HALT právě tehdy, když $\langle \mathcal{M}' \rangle \in A$.

Chtěli bychom tedy zkonstruovat takový Turingův stroj, který se nad vstupem $\varepsilon$ chová stejně jako TM $\mathcal{M}$ nad vstupem $w$. Můžeme si konstrukci trochu ulehčit a zkonstruovat TM, který se dokonce nad každým vstupem chová jako TM $\mathcal{M}$ nad vstupem $w$. Takový stroj získáme ze stroje $\mathcal{M}$ tak, že do stroje $\mathcal{M}$ natvrdo zakódujeme vstupní slovo $w$. Tedy stroj $\mathcal{M}'$ pro libovolný vstup smaže vstupní pásku, zapíše na ni slovo $w$ a dál se bude chovat úplně stejně jako stroj $\mathcal{M}$. Tím docílíme toho, že se stroj $\mathcal{M}'$ chová na každém vstupu stejně, jako TM $\mathcal{M}$ na vstupu $w$.

Když se TM $\mathcal{M}'$ bude nad každým vstupem chovat jako stroj $\mathcal{M}$ nad vstupem $w$, bude se tak jistě chovat i nad vstupem $\varepsilon$.

*Důkaz.* Ukážeme, že platí vztah HALT $\leq_m A$, pak jazyk $A$ nemůže být rekurzivní. Označme $\Sigma$ abecedu jazyka HALT a $\Phi$ abecedu jazyka $A$.

O jaké abecedy se konkrétně jedná, pro nás není podstatné. Ale ve skutečnosti $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ a $\Phi = \{0, 1\}$.

Pro libovolný Turingův stroj $\mathcal{M}$ a slovo $w$ označme jako $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ Turingův stroj, který se pro libovolný vstup chová následujícím způsobem:

Stroj $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ je přesně stroj $\mathcal{M}'$ z myšlenky důkazu, jen je parametrizovaný libovolným strojem $\mathcal{M}$ a slovem $w$.

1. Smaž vstupní pásku.
2. Zapiš na vstupní pásku slovo $w$ a posuň hlavu zpět na začátek pásky.
3. Spusť výpočet stroje $\mathcal{M}$ (tedy přepni se do počátečního stavu stroje $\mathcal{M}$).

Dále označme jako $\mathcal{T}_\infty$ stroj, který pro libovolný vstup cyklí.

Definujeme funkci $f \colon \Sigma^* \to \Phi^*$ pro každé slovo $x \in \Sigma^*$ následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},w} \rangle, & \text{jestliže } x = \langle \mathcal{M}, w \rangle \text{ pro nějaký TM } \mathcal{M} \text{ a slovo } w, \\ \langle \mathcal{T}_\infty \rangle, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Druhý případ v definici je nutný, aby funkce $f$ byla totální. Ne každé slovo nad abecedou $\Sigma$ je totiž kódem dvojice TM a slova.

Ukážeme, že funkce $f$ je redukce HALT na $A$.

Tedy, že $f$ je totální, vyčíslitelná a pro každé $x \in \Sigma^*$ platí $x \in$ HALT $\iff f(x) \in A$.

Funkce $f$ je jistě totální. Také je vyčíslitelná, protože pomocí TM je možné zkontrolovat, jestli je slovo $x$ kódem dvojice TM a slova, a také je možné zkonstruovat kód příslušného Turingova stroje $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ nebo $\mathcal{T}_\infty$. Obě tyto úlohy je totiž možné vyřešit algoritmicky.

Zbývá dokázat, že pro každé slovo $x \in \Sigma^*$ platí $x \in \mathrm{HALT}$ právě tehdy, když $f(x) \in A$. Dokážeme obě tyto implikace:

- „$\Rightarrow$“: Předpokládejme, že $x \in \mathrm{HALT}$. Tedy z definice jazyka HALT platí $x = \langle \mathcal{M}, w \rangle$, kde $\mathcal{M}$ je Turingův stroj, jehož výpočet nad slovem $w$ je konečný. Z definice funkce $f$ dostáváme, že $f(x) = f(\langle \mathcal{M}, w \rangle) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},w} \rangle$.

  Výpočet TM $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ nad každým vstupním slovem je také konečný, protože tento TM v prvním kroku smaže vstupní pásku, ve druhém na ni zapíše slovo $w$ a pak spustí výpočet stroje $\mathcal{M}$, a ten je z předpokladu na slově $w$ konečný. Tím spíše je tedy konečný výpočet TM $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ nad slovem $\varepsilon$, a tedy $f(x) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},w} \rangle \in A$, což jsme chtěli dokázat.

- „$\Leftarrow$“: Tento směr implikace ukážeme obměnou. Předpokládejme tedy, že $x \notin \mathrm{HALT}$. Rozlišíme dva případy, proč slovo $x$ může nebýt v jazyce HALT:

  Vzpomeňte si, že obměna tvrzení $x \in \mathrm{HALT} \Leftarrow f(x) \in A$ je $x \notin \mathrm{HALT} \Rightarrow f(x) \notin A$

  - *Slovo $x$ není kódem dvojce TM a slova:* Pak z definice funkce $f$ dostáváme $f(x) = \langle \mathcal{T}_\infty \rangle$. Turingův stroj $\mathcal{T}_\infty$ cyklí nad každým vstupem, tím spíše tedy cyklí nad vstupem $\varepsilon$, a tedy $f(x) = \langle \mathcal{T}_\infty \rangle \notin A$, což jsme chtěli dokázat.
  - *Platí $x = \langle \mathcal{M}, w \rangle$, kde $\mathcal{M}$ je Turingův stroj, jehož výpočet nad slovem $w$ je nekonečný:* Z definice funkce $f$ dostáváme, že $f(x) = f(\langle \mathcal{M}, w \rangle) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},w} \rangle$.

    Výpočet TM $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ nad každým vstupním slovem je také nekonečný, protože tento TM v prvním kroku smaže vstupní pásku, ve druhém na ni zapíše slovo $w$ a pak spustí výpočet stroje $\mathcal{M}$, a ten je z předpokladu na slově $w$ nekonečný. Tím spíše je tedy nekonečný výpočet TM $\mathcal{T}_{\mathcal{M},w}$ nad slovem $\varepsilon$, a tedy $f(x) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},w} \rangle \notin A$, což jsme chtěli dokázat.

Ukázali jsme tedy, že platí $\mathrm{HALT} \leq_m A$, a protože jazyk HALT není rekurzivní, nemůže být rekurzivní ani jazyk $A$. $\square$