IB112 Základy matematiky

Základy popisné statistiky

Jan Strejček

Popisná statistika

- Popisuje a sumarizuje informace obsažené ve velkém množství dat pomocí tabulek, grafů a číselných charakteristik.
- Cílem je zpřehlednit informace skryté v datech.
- Některé pojmy popisné statistiky motivují pojmy pravděpodobnosti:
  - relativní četnost motivuje pravděpodobnost,
  - aritmetický průměr motivuje střední hodnotu atd.

Obsah

Základní pojmy

Základní soubor, výběr a rozsah

Definice

Základní soubor je neprázdná konečná množina E. Prvky množiny E nazýváme objekty. Libovolnou neprázdnou podmnožinu množiny E nazýváme výběr. Počet prvků výběru nazýváme rozsah výběru.

- Základní soubor se někdy nazývá *populace*.
- Základní soubory bývají pro bližší zkoumání příliš početné (např. všichni občané ČR). Proto se detailně zkumá pouze menší skupina objektů nazývaná výběr.
- Výběr se často získá náhodným postupem. Např. při marketingovém průzkumu se náhodně vyberou telefonní čísla, na která se zavolá.

Znak

- Vlastnosti objektů vyjadřujeme číselně pomocí tzv. *znaků*.
- 1 vlastnost = 1 znak

Definice (Znak)

Znakem objektu rozumíme funkci $X : E \to \mathbb{R}$.

- Objekty mohou mít více znaků.
- Například u lidí můžeme zkoumat znaky jako výška, hmostnost, věk, IQ,...
- Hodnoty znaků pro prvky výběru můžeme reprezentovat datovým souborem.

Datový soubor

Definice

(k-rozměrným) datovým souborem s rozsahem n rozumíme matici

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Řádky matice odpovídají objektům výběru, sloupce jednotlivým znakům.

- Je-li matice jednosloupcová, hovoříme o *jednorozměrném datovém souboru*. Je-li matice dvousloupcová, hovoříme o *dvourozměrném datovém souboru*.
- Hodnoty, kterých znak nabývá, se také nazývají *varianty* nebo *úrovně*.

Příklad datových souborů

Vlevo je trojrozměrný datový soubor s rozsahem 12 popisující výšku a váhu objektů a jejich známku z matematiky. Vpravo pak je jednorozměrný datový soubor popisující pouze výšku objektů.

$$\begin{pmatrix} 161 & 51 & 1 \\ 188 & 82 & 3 \\ 170 & 70 & 2 \\ 174 & 59 & 4 \\ 182 & 95 & 2 \\ 152 & 44 & 3 \\ 193 & 102 & 4 \\ 177 & 73 & 2 \\ 174 & 63 & 1 \\ 188 & 74 & 3 \\ 167 & 61 & 2 \\ 173 & 63 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 161 \\ 188 \\ 170 \\ 174 \\ 182 \\ 152 \\ 193 \\ 177 \\ 174 \\ 188 \\ 167 \\ 173 \end{pmatrix}$$

Jednorozměrný datový soubor

Uspořádananý datový soubor

Definice

Jestliže uspořádáme hodnoty jednorozměrného datového souboru do neklesající posloupnosti, získáme jednorozměrný uspořádaný datový soubor obvykle značený

$$\begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{pmatrix}, \text{ kde } x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}.$$

Interval $\langle x_{(1)}, x_{(n)} \rangle$ pak nazveme variační obor.
Délka variačního oboru $x_{(n)} - x_{(1)}$ se nazývá rozpětí datového souboru.

Vektor variant

Definice

Nechť je dán jednorozměrný datový soubor. Vektor variant je rostoucí posoupnost všech variant vyskytujících se v souboru, obvykle značená

$$\begin{pmatrix} x_{[1]} \\ x_{[2]} \\ \vdots \\ x_{[r]} \end{pmatrix}, \text{ kde } x_{[1]} < x_{[2]} < \ldots < x_{[r]}.$$

Příklad

Z uvedeného datového souboru vytvořte uspořádaný datový soubor, určete variační obor, rozpětí datového souboru a vektor variant.

$$\begin{pmatrix} 161 \\ 188 \\ 170 \\ 174 \\ 182 \\ 152 \\ 193 \\ 177 \\ 174 \\ 188 \\ 167 \\ 173 \end{pmatrix}$$

Příklad

Z uvedeného datového souboru vytvořte uspořádaný datový soubor, určete variační obor, rozpětí datového souboru a vektor variant.

$$\begin{pmatrix} 161 \\ 188 \\ 170 \\ 174 \\ 182 \\ 152 \\ 193 \\ 177 \\ 174 \\ 188 \\ 167 \\ 173 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{uspořádaný datový soubor}$$

Příklad

Z uvedeného datového souboru vytvořte uspořádaný datový soubor, určete variační obor, rozpětí datového souboru a vektor variant.

$$\begin{pmatrix} 161 \\ 188 \\ 170 \\ 174 \\ 182 \\ 152 \\ 193 \\ 177 \\ 174 \\ 188 \\ 167 \\ 173 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$ uspořádaný datový soubor

- Variační obor je $\langle 152, 193 \rangle$.
- Rozpětí je 41.

Příklad

Z uvedeného datového souboru vytvořte uspořádaný datový soubor, určete variační obor, rozpětí datového souboru a vektor variant.

$$\begin{pmatrix} 161 \\ 188 \\ 170 \\ 174 \\ 182 \\ 152 \\ 193 \\ 177 \\ 174 \\ 188 \\ 167 \\ 173 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$ uspořádaný datový soubor

- Variační obor je $\langle 152, 193 \rangle$.
- Rozpětí je 41.

vektor variant $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

Bodové rozložení četností

Jestliže je počet variant v jednorozměrném datovém souboru malý, přiřazujeme četnosti jednotlivým variantám. Hovoříme o *bodovém rozložení četností*.

Definice

Nechť je dán jednorozměrný datový soubor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *v kterém znak* X *nabývá* r *variant. Pak pro každé* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *definujeme*

- n_j - *absolutní četnost* j*-té varianty jako počet výskytů* $x_{[j]}$ *v datovém souboru,*
- $p_j = \frac{n_j}{n}$ - *relativní četnost* j*-té varianty,*
- $N_j = n_1 + \ldots + n_j$ - *absolutní kumulativní četnost prvních* j *variant,*
- $F_j = p_1 + \ldots + p_j$ - *relativní kumulativní četnost prvních* j *variant.*

Tabulka rozložení četností

Definice (Tabulka rozložení četností)

Nechť je dán jednorozměrný datový soubor s r variantami. Tabulka rozložení četností nebo též variační řada je tabulka následujícího tvaru:

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
$x_{[1]}$	n_1	p_1	N_1	F_1
$x_{[2]}$	n_2	p_2	N_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	n_r	p_r	N_r	F_r

- První dva sloupce tabulky tvoří tzv. *četnostní tabulku*, kterou lze použít ke stručnějšímu zadání jednorozměrného datového souboru.

Příklad

Je dán jednorozměrný datový soubor s rozsahem 12 obsahující známky z matematiky. Sestavte tabulku rozložení četností.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Četnostní tabulka zadávající stejný soubor:

$x_{[j]}$	n_j
1	2
2	5
3	3
4	2

Příklad

Je dán jednorozměrný datový soubor s rozsahem 12 obsahující známky z matematiky. Sestavte tabulku rozložení četností.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Četnostní tabulka zadávající stejný soubor:

$x_{[j]}$	n_j
1	2
2	5
3	3
4	2

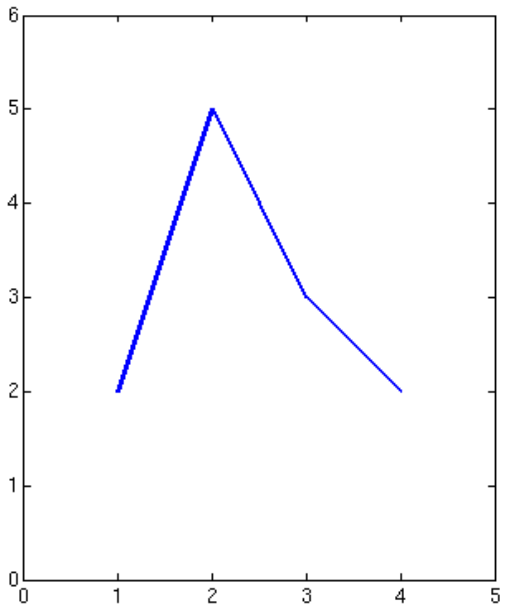
Řešení:

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
1	2	$\frac{2}{12}$	2	$\frac{2}{12}$
2	5	$\frac{5}{12}$	7	$\frac{7}{12}$
3	3	$\frac{3}{12}$	10	$\frac{10}{12}$
4	2	$\frac{2}{12}$	12	$\frac{12}{12} = 1$

Grafická znázornění jednorozměrného bodového rozdělení četností

- *Polygon četností* neboli *spojnicový graf* je lomená čára spojující body se souřadnicemi $(x_{[j]}, n_j)$ pro všechna j.

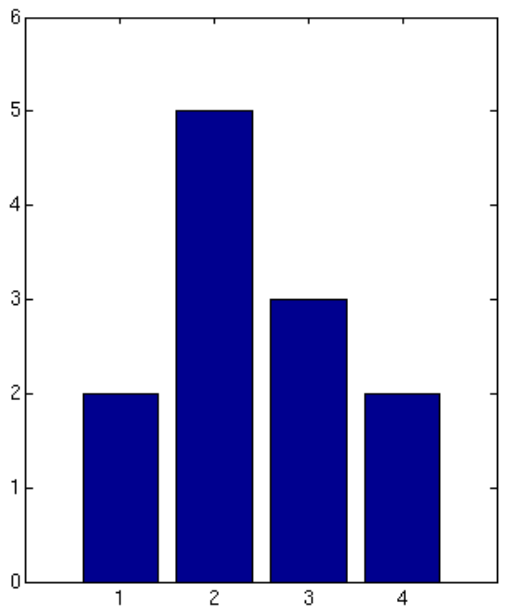
$x_{[j]}$	n_j
1	2
2	5
3	3
4	2



Grafická znázornění jednorozměrného bodového rozdělení četností

- *Sloupcový diagram* je soustava na sebe nenavazujících obdélníků posazených na x-ovou osu, jejichž svislá osa je na nějaké variantě $x_{[j]}$ a výška odpovídá absolutní četnosti n_j.

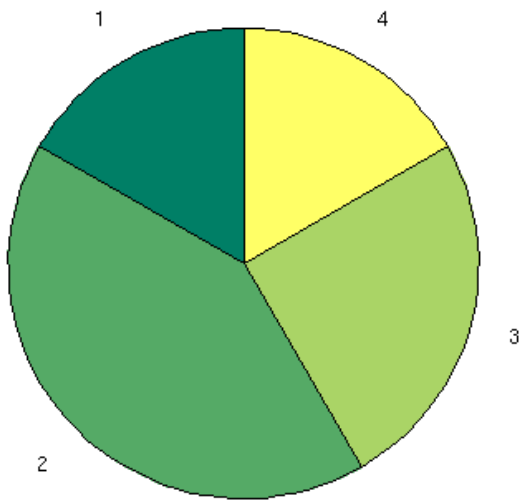
$x_{[j]}$	n_j
1	2
2	5
3	3
4	2



Grafická znázornění jednorozměrného bodového rozdělení četností

- *Výsečový graf* je kruh rozdělený na výseče tak, že poměr obvodu výseče pro variantu $x_{[j]}$ k obvodu kruhu je roven relativní četnosti p_j.

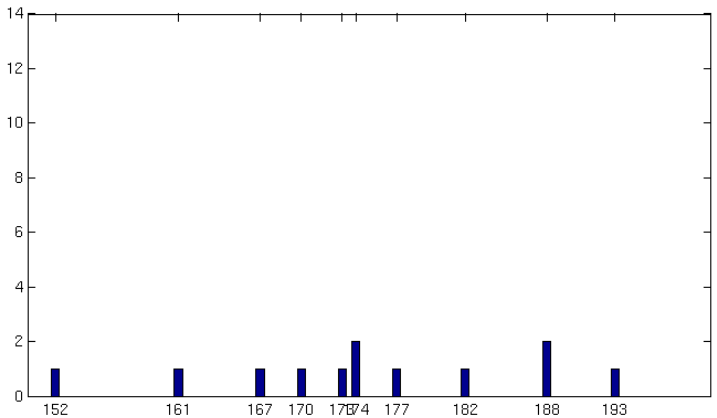
$x_{[j]}$	n_j
1	2
2	5
3	3
4	2



Grafická znázornění jednorozměrného bodového rozdělení četností

- Polygon četností a sloupcový diagram se používají i pro znázornění absolutních kumulativních četností.
- V některých případech může být takový graf názornější.

Příklad:
Sloupcový diagram zobrazující bodové rozdělení četností našeho souboru s výškami jedinců příliš informací nepřináší.

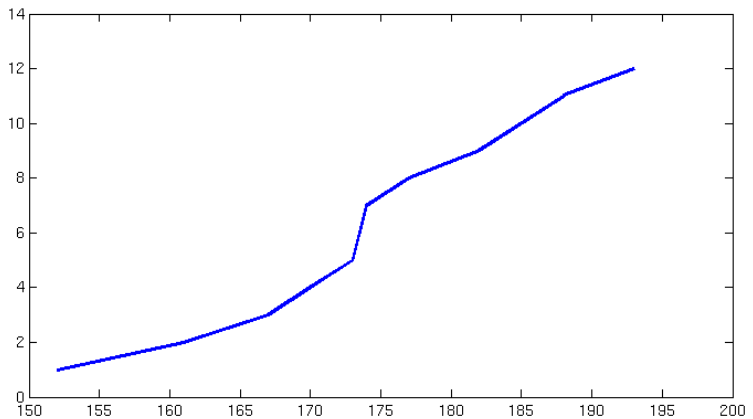


Grafická znázornění jednorozměrného bodového rozdělení četností

- Polygon četností a sloupcový diagram se používají i pro znázornění absolutních kumulativních četností.
- V některých případech může být takový graf názornější.

Příklad:

Polygon absolutních kumulativních četností je v tomto případě přínosnější.



Roztříděný datový soubor

Jestliže je počet variant v jednorozměrném datovém souboru blízký rozsahu souboru, pak variační obor pokryjeme systémem disjunktních intervalů. Hodnoty znaku pak nahradíme příslušností do intervalu. Hovoříme o *roztříděném datovém souboru*.

- Číselnou osu rozdělíme na intervaly

  $$(-\infty, u_1\rangle, (u_1, u_2\rangle, (u_2, u_3\rangle, \ldots, (u_r, u_{r+1}\rangle, (u_{r+1}, \infty)$$

  tak, aby krajní intervaly neobsahovaly žádnou pozorovanou hodnotu (s těmito intervaly dále nepracujeme).
- $(u_j, u_{j+1}\rangle$ nazveme j-tý *třídící interval*, kde $j \in \{1, \ldots, r\}$.
- $d_j = u_{j+1} - u_j$ je *délka* j-tého intervalu.
- $x_{[j]} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2}$ je *střed* j-tého intervalu.
- Počet tříd volíme podle *Sturgesova pravidla* $r = 1 + 3{,}3 \cdot \log_{10} n$ (je to pouze doporučení, pro $n < 500$ často volíme vyšší r)
- Intervaly obvykle volíme tak, aby měly stejnou délku.

Intervalové rozložení četností

Hodnoty z jednorozměrného datového souboru pak rozdělíme do r zvolených intervalů. *Intervalové rozložení četností* pak definujeme podobně jako bodové rozložení četností.

Definice

Nechť je dán jednorozměrný datový soubor a r třídících intervalů. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, r\}$ definujeme

- n_j - *absolutní četnost j-tého třídícího intevalu počet prvků datového souboru padajících do intevalu $(u_j, u_{j+1}\rangle$,*
- $p_j = \frac{n_j}{n}$ - *relativní četnost j-tého třídícího intervalu,*
- $f_j = \frac{p_j}{d_j}$ - *četnostní hustota j-tého třídícího intervalu,*
- $N_j = n_1 + \ldots + n_j$ - *absolutní kumulativní četnost prvních j třídících intervalů,*
- $F_j = p_1 + \ldots + p_j$ - *relativní kumulativní četnost prvních j třídících intervalů.*

Tabulka rozložení četností

Definice (Tabulka rozložení četností)

Nechť je dán jednorozměrný datový soubor s r variantami. Tabulka rozložení četností je tabulka následujícího tvaru:

$(u_j, u_{j+1}\rangle$	d_j	n_j	p_j	f_j	N_j	F_j
$(u_1, u_2\rangle$	d_1	n_1	p_1	f_1	N_1	F_1
$(u_2, u_3\rangle$	d_2	n_2	p_2	f_2	N_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(u_r, u_{r+1}\rangle$	d_r	n_r	p_r	f_r	N_r	F_r

- První a třetí sloupec tabulky tvoří tzv. *četnostní tabulku*, která popisuje roztříděný datový soubor.

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Četnostní tabulkou zapište roztříděný datový soubor (počet tříd určete Sturgesovým pravidlem) a sestavte tabulku rozložení četností.

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Četnostní tabulkou zapište roztříděný datový soubor (počet tříd určete Sturgesovým pravidlem) a sestavte tabulku rozložení četností.

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

Řešení:

- Rozsah je $n = 12$. Počet tříd tedy bude $r = 5$.

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Četnostní tabulkou zapište roztříděný datový soubor (počet tříd určete Sturgesovým pravidlem) a sestavte tabulku rozložení četností.

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

Řešení:

- Rozsah je $n = 12$. Počet tříd tedy bude $r = 5$.
- Volíme stejnou délku tříd $d_j = 10$. Zvolíme tedy třídy $(150, 160\rangle, (160, 170\rangle, (170, 180\rangle, (180, 190\rangle, (190, 200\rangle$.
- Četnostní tabulka vypadá následovně:

$(u_j, u_{j+1}\rangle$	n_j
$(150, 160\rangle$	1
$(160, 170\rangle$	3
$(170, 180\rangle$	4
$(180, 190\rangle$	3
$(190, 200\rangle$	1

Příklad

Z četnostní tabulky už snadno spočítáme tabulku rozložení četností:

$(u_j, u_{j+1}\rangle$	n_j
$(150, 160\rangle$	1
$(160, 170\rangle$	3
$(170, 180\rangle$	4
$(180, 190\rangle$	3
$(190, 200\rangle$	1

Příklad

Z četnostní tabulky už snadno spočítáme tabulku rozložení četností:

$(u_j, u_{j+1}\rangle$	n_j
$(150, 160\rangle$	1
$(160, 170\rangle$	3
$(170, 180\rangle$	4
$(180, 190\rangle$	3
$(190, 200\rangle$	1

$(u_j, u_{j+1}\rangle$	d_j	n_j	p_j	f_j	N_j	F_j
$(150, 160\rangle$	10	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$	1	$\frac{1}{12}$
$(160, 170\rangle$	10	3	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{120}$	4	$\frac{4}{12}$
$(170, 180\rangle$	10	4	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{120}$	8	$\frac{8}{12}$
$(180, 190\rangle$	10	3	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{120}$	11	$\frac{11}{12}$
$(190, 200\rangle$	10	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$	12	$\frac{12}{12}$

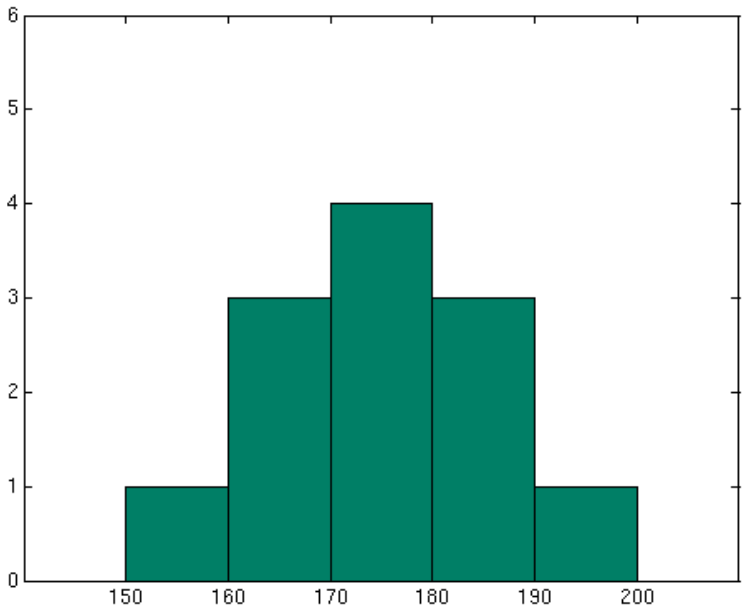
Grafická znázornění jednorozměrného intervalového rozdělení četností

- Používáme podobné grafy jako u bodového rozdělení četností.
- V případě polygonu četností místo konkrétních hodnot použijeme středy intervalů.
- Místo sloupcového grafu používáme *histogram*, což je v vlastně totéž, akorát bez mezer mezi sloupci (šířka sloupce odpovídá délce intervalu).
- Lze použít i výsečový graf.
- Polygon četností a histogram lze použít i pro znázornění absolutních kumulativních četností.

Příklad

Histogram pro roztříděný datový soubor z předchozího příkladu.

$(u_j, u_{j+1}\rangle$	n_j
$(150, 160\rangle$	1
$(160, 170\rangle$	3
$(170, 180\rangle$	4
$(180, 190\rangle$	3
$(190, 200\rangle$	1



Číselné charakteristiky znaků

Charakteristiky polohy

Všechny charakteristiky definujeme pro neroztříděné datové soubory. Varianty pro roztříděné soubory lze dohledat.

Aritmetický průměr

- $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Aritmetický průměr je citlivý na extrémně odchýlené hodnoty.

Modus

- Je to hodnota, která se v datovém souboru vyskytuje nejčastěji.
- Není určeno jednoznačně (více hodnot může mít maximální absolutní četnost).

Charakteristiky polohy

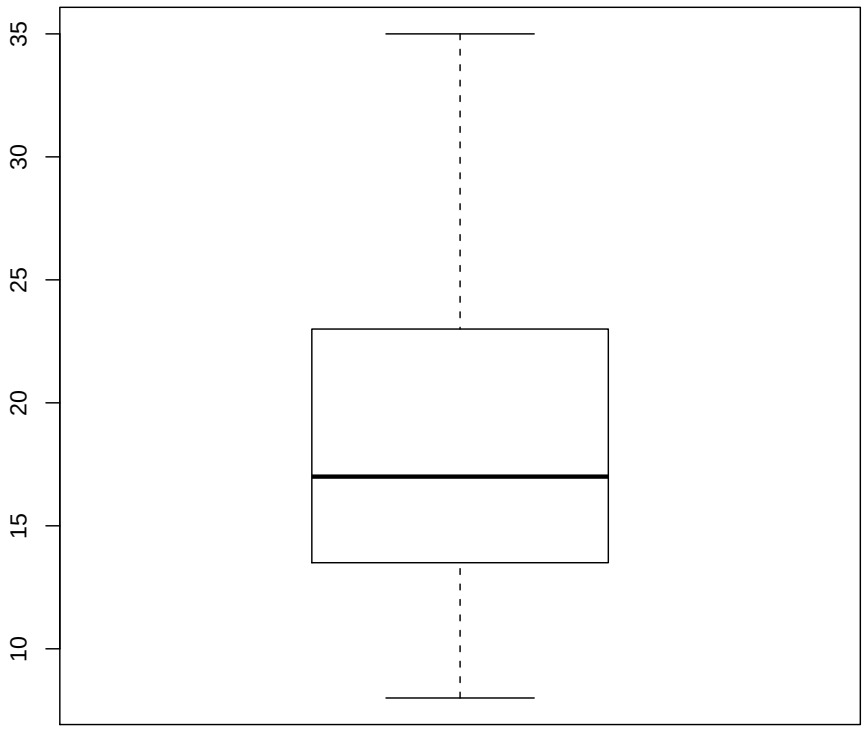
α-kvantil, medián, horní a dolní kvartil

- Nechť $\alpha \in (0, 1)$. α-kvantil je číslo x_α, které rozděluje uspořádaný datový soubor na dolní úsek obsahující podíl α ze všech dat a na horní úsek obsahující podíl $1 - \alpha$ ze všech dat.
- Pokud $n \cdot \alpha$ je celé číslo c, pak $x_\alpha = \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2}$.
- Pokud $n \cdot \alpha$ není celé, vezmeme nejbližší větší celé číslo c a $x_\alpha = x_{(c)}$.
- *Medián* je $x_{0,5}$, tedy rozděluje soubor na horní a dolní polovinu. Oproti aritmetickému průměru není citlivý na extrémně odchýlené hodnoty.
- *Dolní kvartil* je $x_{0,25}$, tedy rozděluje soubor na dolní čtvrtinu a horní tři čtvrtiny.
- *Horní kvartil* je $x_{0,75}$, tedy rozděluje soubor na dolní tři čtvrtiny a horní čtvrtinu.

Krabicový graf (boxplot)

Grafické znázornění pěti charakteristik polohy:

- největší hodnota
- horní kvartil
- medián
- dolní kvartil
- nejmenší hodnota



Charakteristiky variability

Rozptyl

- Čím větší rozptyl, tím větší proměnlivost souboru.
- Průměrná kvadratická odchylka od aritmetického průměru.
- $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$

Směrodatná odchylka

- Čím větší směrodatná odchylka, tím větší proměnlivost souboru.
- $s = \sqrt{s^2}$

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Spočítejte zmíněné číselné charakteristiky a nakreslete krabicový graf.

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Spočítejte zmíněné číselné charakteristiky a nakreslete krabicový graf.

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

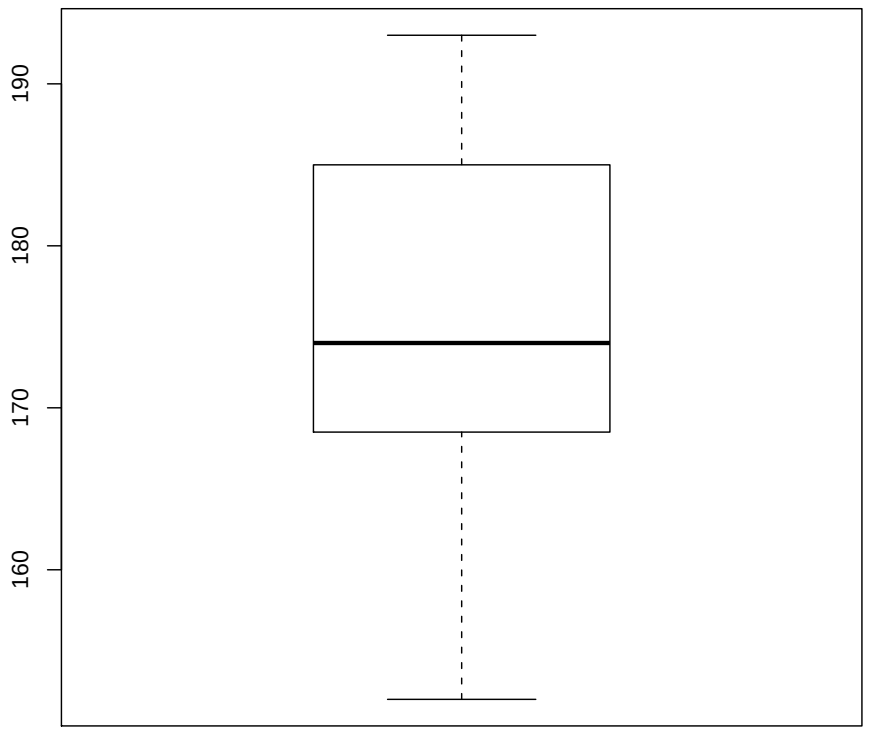
Řešení:

- Aritmetický průměr je $m = \frac{2099}{12} = 174,9166\overline{6}$.
- Modus může být 188 nebo 174.
- Medián je $x_{0,5} = \frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2} = 174$.
- Dolní kvartil je $x_{0,25} = \frac{x_{(3)}+x_{(4)}}{2} = 168,5$.
- Horní kvartil je $x_{0,75} = \frac{x_{(9)}+x_{(10)}}{2} = 185$.
- Rozptyl s^2 je přibližně $127,9$.
- Směrodatná odchylka je s je přibližně $11,3$.

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Spočítejte zmíněné číselné charakteristiky a nakreslete krabicový graf.

$$\begin{pmatrix} 152 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$



Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Spočítejte zmíněné číselné charakteristiky a nakreslete krabicový graf.

$$\begin{pmatrix} 102 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$

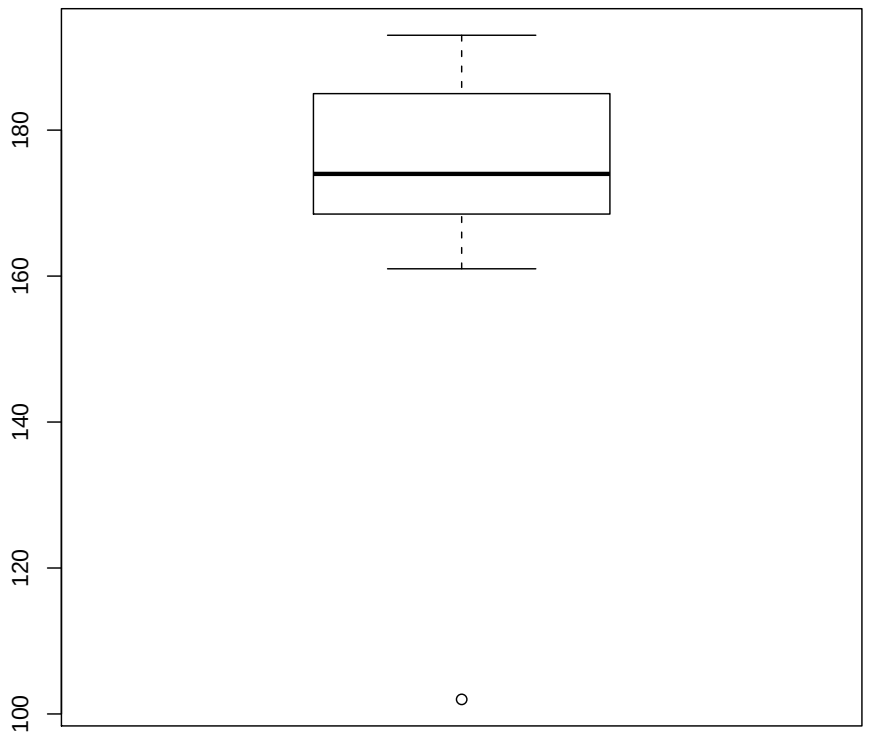
Řešení:

- Aritmetický průměr je $m = \frac{2049}{12} = 170,75$.
- Modus může být 188 nebo 174.
- Medián je $x_{0,5} = \frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2} = 174$.
- Dolní kvartil je $x_{0,25} = \frac{x_{(3)}+x_{(4)}}{2} = 168,5$.
- Horní kvartil je $x_{0,75} = \frac{x_{(9)}+x_{(10)}}{2} = 185$.
- Rozptyl s^2 je přibližně $509,9$.
- Směrodatná odchylka je s je přibližně $22,6$.

Příklad

Je dán uspořádaný datový soubor popisující výšku osob. Spočítejte zmíněné číselné charakteristiky a nakreslete krabicový graf.

$$\begin{pmatrix} 102 \\ 161 \\ 167 \\ 170 \\ 173 \\ 174 \\ 174 \\ 177 \\ 182 \\ 188 \\ 188 \\ 193 \end{pmatrix}$$



Dvourozměrný datový soubor

Dvojrozměrný datový soubor

- Připomeňme, že dvourozměrný datový soubor je matice tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}.$$

- Pro dvourozměrný soubor můžeme definovat analogické pojmy k většině pojmů zavedených pro jednorozměrný soubor, namátkou:
  - roztříděný dvourozměrný datový soubor
  - středy tříd, absolutní (kumulativní) četnost, relativní (kumulativní) četnost
  - četnostní tabulky, ...
- Ke grafickému znázornění dvourozměrných datových souborů lze použít *rozptylový graf* (neroztříděný soubor), případně *stereogram* (dvourozměrný histogram, pro roztříděné soubory).

Koeficient korelace

- Zajímavá číselná charakteristika dvourozměrného souboru.
- Udává míru lineární závoslosti znaků X a Y.
- Předpokládáme, že $s(x), s(y)$ jsou nenulové směrodatné odchylky znaků X a Y a m_x, m_y jejich aritmetické průměry.
- Pak koeficient korelace je

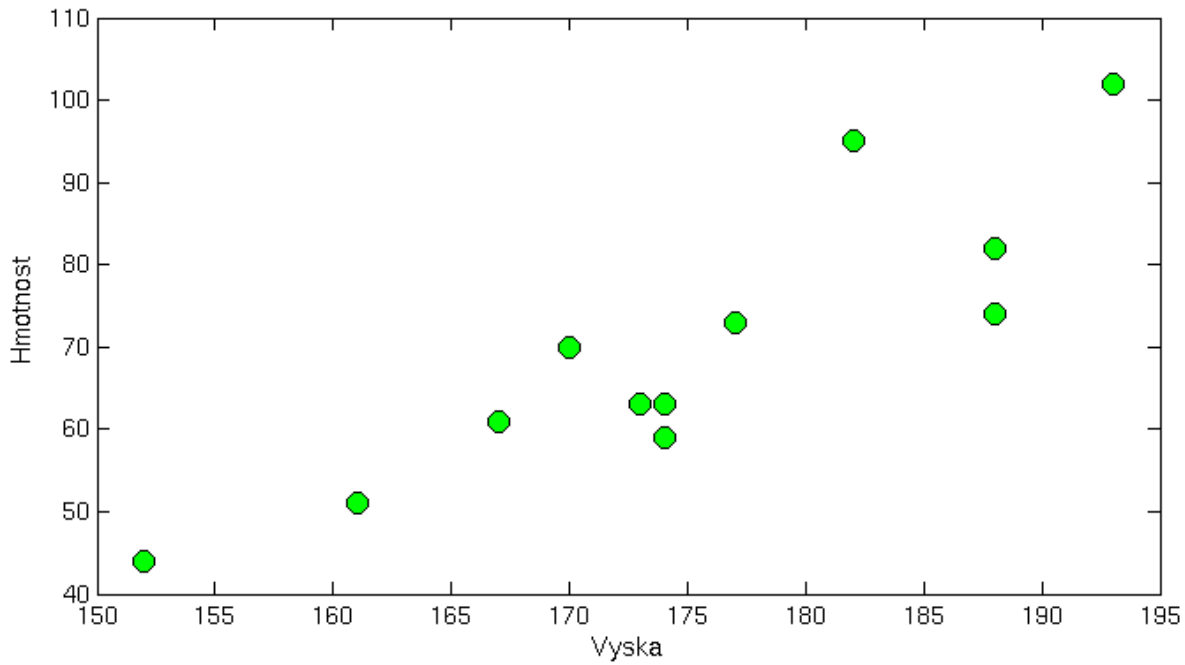
$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)}{s(x)s(y)}.$$

- Vždy platí $-1 \leq r \leq 1$, přičemž r nabývá krajních hodnot, pokud jsou znaky zcela lineárně závislé, tj. pokud $y_i = ax_i + b$. Je-li $r = 1$, tak body (x_i, y_i) leží na rostoucí přímce, pro $r = -1$ leží na klesající přímce. Hodnoty r blízké 0 vyjadřují, že závislost X, Y není lineární, případně jsou X, Y nezávislé.

Příklad

Uvažme dvojrozměrný datový soubor výšek a hmotností.
Rozptylový graf vypadá následovně.

$$\begin{pmatrix} 161 & 51 \\ 188 & 82 \\ 170 & 70 \\ 174 & 59 \\ 182 & 95 \\ 152 & 44 \\ 193 & 102 \\ 177 & 73 \\ 174 & 63 \\ 188 & 74 \\ 167 & 61 \\ 173 & 63 \end{pmatrix}$$

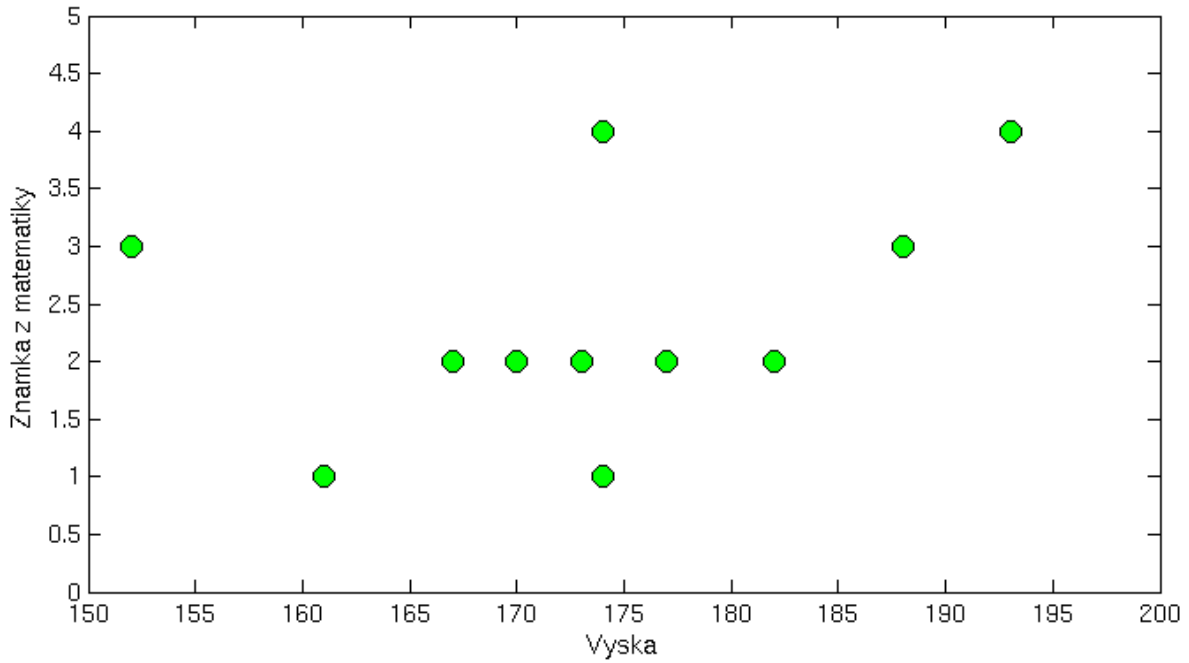


Koeficient korelace je $0,8784$.

Příklad

Uvažme dvojrozměrný datový soubor výšek a známek z matematiky. Rozptylový graf vypadá následovně.

$$\begin{pmatrix} 161 & 1 \\ 188 & 3 \\ 170 & 2 \\ 174 & 4 \\ 182 & 2 \\ 152 & 3 \\ 193 & 4 \\ 177 & 2 \\ 174 & 1 \\ 188 & 3 \\ 167 & 2 \\ 173 & 2 \end{pmatrix}$$



Koeficient korelace je $0,4049$.