

# IV124 Komplexní sítě

Jan Fousek, Eva Hladká

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita

17. května 2018

# Modely nákazy: epidemie

---

Minule: komplexní šíření

- rozšíření „přehlasováním“
- sociologické aplikace

Dnes: jednoduché šíření

- stochastický model
- aplikace v biologických a technických sítích

# Poznámka ke stochastickým modelům

---

Jednoduché deterministické modely lze komplikovat (přidávat pravidla)

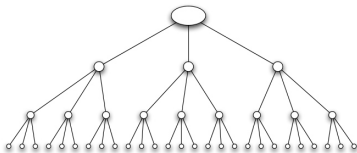
- rozšiřuje se repertoár možných chování
- stále náročnější analýza
- v jistý moment je jednodušší velké množství reálných dějů shrnout do jedné náhodné veličiny

# Větvící se procesy

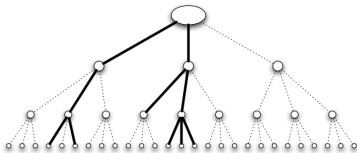
---

Nejprostší model:

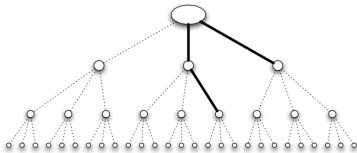
- do populace  $p$  přichází pacient 0 a potká  $k$  osob
- pravděpodobnost přenosu při setkání je  $p$
- v každé další vlně zůstává  $k$  i  $p$  stejné
- výsledkem je strom kontaktů mezi potenciálně nakaženými a podstrom skutečné nákazy



(a) *The contact network for a branching process*



(b) *With high contagion probability, the infection spreads widely*



(c) *With low contagion probability, the infection is likely to die out quickly*

1

# Větvící se procesy

---

Možné výsledky:

- nákaza se po chvíli zastaví (zanikne)
- rozsáhlá epidemie

Reprodukční číslo  $R_0$ :

- očekávaný počet nově nakažených jedním jedincem
- popisuje životaschopnost a agresivitu nákazy
- zde  $R_0 = pk$

# Větvící se procesy

---

Vývoj v závislosti na  $R_0$ :

- $R_0 \ll 1$ : rychlý konec šíření
- $R_0 \gg 1$ : agresivní epidemie
- $R_0 \approx 1$ : rozsah nákazy se může výrazně lišit mezi běhy; i malé změny v mechanismu šíření rozhodují o vypuknutí epidemie

Doposud jsme ignorovali:

- konečnost populace
- topologii kontaktní sítě

# SIR model

---

Tři sousledné stavy uzlu:

1. **S**usceptible: náchylný k nákaze od sousedů
2. **I**nfectious: nemocný uzel šířící nákazu po  $t_i$  kroků
3. **R**emoved: imunní/mrtvý uzel

V každém kroku uzly ve stavu  $I$  rozšíří nemoc do všech svých sousedů s pravěpodobností  $p$ .



# Klasické epidemiologické modely

---

Předpokládají možnost kontaktu s libovolným členem populace, formulovány pomocí diferenciálních rovnic:

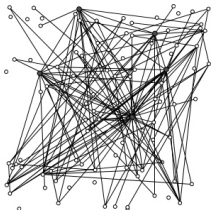
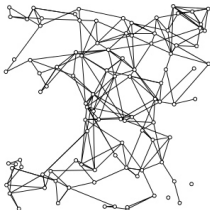
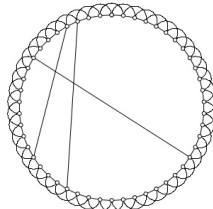
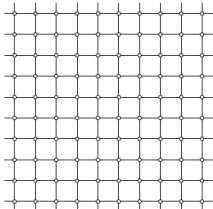
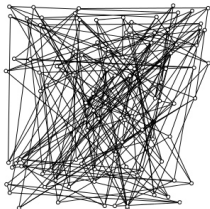
$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

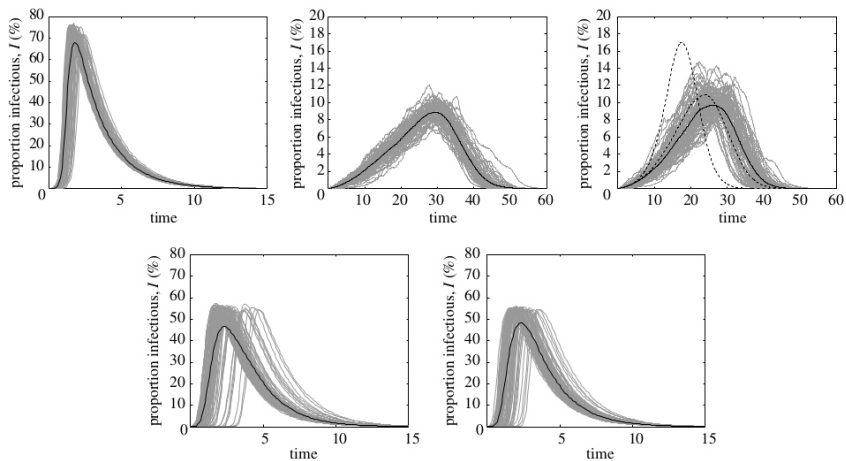
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

# SIR vs. síť<sup>2</sup>

---



# SIR vs. síť<sup>3</sup>



# SIR model: rozšíření

---

Dynamika je jednoduchá (větví se proces na síti)

Možná rozšíření:

- ohodnocený graf – nehomogenní pravděpodobnost rozšíření  $p$
- nehomogenní  $I_t$
- rozdělení  $I$  na více podrobných – infekční inkubace, méně infekční období se symptomy, ...

# SIS model

---

Umožníme opětovnou nákazu

1. **Susceptible**: náchylný k nákaze od susedů
2. **Infectious**: nemocný uzel šířící nákazu po  $t_i$  kroků
3. **Susceptible**

Narozdíl od SIR modelu umožňuje velmi dlouhé běhy na konečné síti.

# SIRS model

---

Ve výskytu reálných chorob pozorujeme výrazné oscilace, ty ani v SIS nedostaneme.

Přidáme časově omezenou imunitu

1. **S**usceptible: náchylný k nákaze od sousedů
2. **I**nfectious: nemocný uzel šířící nákazu po  $t_I$  kroků
3. **R**ecovery: uzdravený a uzel imunní po  $t_R$  kroků
4. **S**usceptible

# Globální vs. lokální oscilace

---

SIRS vykazuje na obecné síti oscilace na lokální úrovni.

Oscilace na globální úrovni

- vyžadují homofilní (lokální) vazby a daleko dosahující zkratky
- odpovídá charakteristice malých světů
- konkrétní dynamika je úzce svázaná s topologií sítě

# SIRS a malé světy

---

Model sítě Watts-Strogatz (připomenutí):

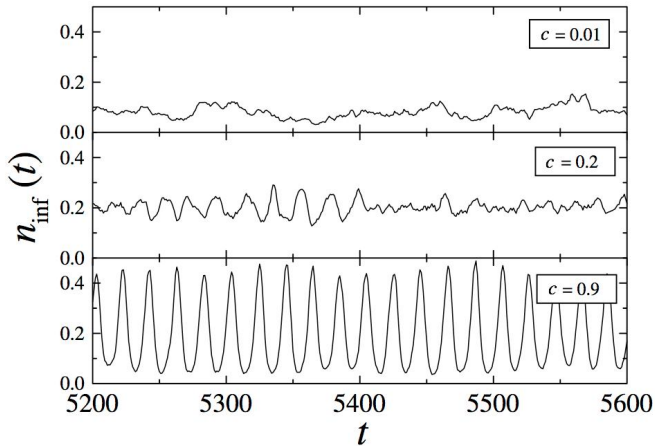
- kruh s lokálními vazbami; s pravděpodobností  $c$  přepojeny hrany do náhodného cíle

SIRS dynamika

- globální oscilace (synchronizace) závisí na počtu „zkratek“ – slabých vazeb
- malé  $c$  – lokální infekce, velké  $c$  – globální oscilace



# SIRS a malé světy



4

# Dema

---

...