

Matematika IV – 8. týden

Odvozování kombinatorických identit

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2017

Obsah přednášky

- 1 (Formální) mocninné řady
 - Přehled několika mocninných řad

- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
Matematika drsně a svižně, e-text na
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
Matematika drsně a svižně, e-text na
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

- 1 (Formální) mocninné řady
 - Přehled několika mocninných řad
- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi

(Formální) mocninné řady

Definice

Bud' dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

(Formální) mocninné řady

Definice

Bud' dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvěřující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat.

(Formální) mocninné řady

Definice

Bud' dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvóřující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninných řad k příslušným funkcím.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvářejících funkcí.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvářejících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci, ...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci, ...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro n -tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro n -tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);

Vytvářející funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro n -tý člen posloupnosti;
- často vytvářející funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo alespoň asymptotické chování.

Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z předloňského semestru:

Věta

Bud' (a_0, a_1, a_2, \dots) posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \geq 1$ je $|a_n| \leq K^n$, pak řada

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$.

Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z předloňského semestru:

Věta

Bud' (a_0, a_1, a_2, \dots) posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \geq 1$ je $|a_n| \leq K^n$, pak řada

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$. Hodnotami funkce $a(x)$ na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má $a(x)$ v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Přehled mocninných řad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n,$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{0+n-1}{n-1} + \cdots + \binom{k+n-1}{n-1} x^k + \cdots$$

Plán přednášky

- 1 (Formální) mocninné řady
 - Přehled několika mocninných řad

- 2 Operace s vytvořujícími funkcemi

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání ($a_i + b_i$) posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení ($\alpha \cdot a_i$) všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídající posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k .

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání ($a_i + b_i$) posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvářejících funkcí.
- Vynásobení ($\alpha \cdot a_i$) všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvářející funkce.
- Vynásobení vytvářející funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídající posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvářející funkci x^k .
- Substitucí polynomu $f(x)$ s nulovým absolutním členem za x vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro $f(x) = \alpha x$, což odpovídá vynásobení k -tého členu posloupnosti skalárem α^k . Dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x : funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k + 1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvářejícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x : funkce $a'(x)$ vytváří posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrovaní: funkce $\int_0^x a(t) dt$ vytváří posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x : funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrovaní: funkce $\int_0^x a(t) dt$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti (c_0, c_1, c_2, \dots) , kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k)$. Posloupnost (c_n) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_n), (b_n)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \dots)$ se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n,$$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \dots)$ se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} x^n,$$

což již sice máme dokázáno z dřívějšíka (dokonce dvakrát – jednou díky zobecněné binomické větě a podruhé díky derivaci řady), ale další důkaz jistě nezaškodí 😊

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})(1 + x + x^2 + \dots + x^{50}).$$

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})(1 + x + x^2 + \dots + x^{50}).$$

Tento součin upravíme na tvar

$(1 - x)^{-3}(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})$, odkud pomocí zobecněné binomické věty dostaneme

$$\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \dots \right) (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + \dots)$$

a tedy koeficient u x^{70} je zřejmě

$$\binom{70+2}{2} - \binom{70+2-31}{2} - \binom{70+2-41}{2} - \binom{70+2-51}{2} = 1061.$$

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Řešení

Potřebnou konvoluci získáme součinem řad $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$.

Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Řešení

Potřebnou konvoluci získáme součinem řad $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$.
Odtud

$$[x^n] \frac{1}{(1-x)^2} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (n-k+1)$$

a snadnou úpravou dostaneme požadované.