Najděte vytvořující funkci a explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$ definované rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} a_0 &= 1,\ a_1 = 2 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 \text{ pro } n \geq 2 \end{aligned}$$

Řešení. Doplňme $a_{-1} = a_{-2} = 0$ a rozepišme podrobně druhou rovnici pro případ $n = 1$, $n = 0$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4a_0 - 3a_{-1} + 1 - 2 \\ a_0 &= 4a_{-1} - 3a_{-2} + 1 + 0 \end{aligned}$$

Dohromady tak můžeme psát pro $n \geq 0$ jedinou formulku

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 - 2 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0].$$

Tu nyní vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, \ldots$, čímž dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 - 2 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0]) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 2x + 0 \\ &= 4x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + \frac{1}{1-x} - 2x. \end{aligned}$$

Označíme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

(tady se hodí, že $a_{-1} = a_{-2} = 0$, jinak by v těch posledních dvou výrazech byly členy navíc). Tím se rovnice přepíše na

$$f(x) = 4xf(x) - 3x^2 f(x) + \frac{1}{1-x} - 2x.$$

Převedením vyrazů obsahujících $f(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$(1 - 4x + 3x^2) f(x) = \frac{1}{1-x} - 2x$$

neboli

$$(1 - 3x)(1 - x) f(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - x}$$

Podělením výrazem u $f(x)$ pak dostáváme

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Rozklad na parciální zlomky dá

$$f(x) = 3/4 \cdot \frac{1}{1-x} - 1/2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 3/4 \cdot \frac{1}{1-3x}$$

a rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty (pro záporné exponenty)[1]

$$f(x) = 3/4 \cdot \sum \binom{n}{0} x^n - 1/2 \cdot \sum \binom{n+1}{1} x^n + 3/4 \cdot \sum \binom{n}{0} \underbrace{(3x)^n}_{3^n x^n}.$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$\begin{aligned} a_n &= 3/4 \cdot \binom{n}{0} - 1/2 \cdot \binom{n+1}{1} + 3/4 \cdot \binom{n}{0} 3^n \\ &= 3/4 - 1/2 \cdot (n+1) + 3/4 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

□

[1] $(1-x)^k = \sum \binom{n+k-1}{k-1} x^n$