12.76

Najděte vytvořující funkci a explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované rekurentním vztahem

$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$

$$\boxed{\forall n \geq 2: \quad a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}} \quad (1)$$

$n=0$: $\quad 5a_{-1} - 4a_{-2} = 5\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0$ (předpokládáme $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \dots 0$)

$$\boxed{1 = a_0 = \underbrace{5a_{-1} - 4a_{-2}}_{0} + 1} \quad (2)$$

$n=1$: $\quad 5a_0 - 4a_{-1} = 5\cdot 1 - 4\cdot 0 = 5$

$$\boxed{2 = a_1 = \underbrace{5a_0 - 4a_{-1}}_{5} - 3} \quad (3)$$

(1) vynásobíme x^n, (2) vynásobíme x^0, (3) vynásobíme x^1:

$\forall n \geq 2$: $\quad a_n x^n = 5a_{n-1}x^n - 4a_{n-2}x^n$

$$a_0 x^0 = 5a_{-1}x^0 - 4a_{-2}x^0 + 1\cdot x^0$$

$$a_1 x = 5a_0 x - 4a_{-1}x - 3x$$

---

všechny tyto rovnosti sečteme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_{n-2}x^n + 1 - 3x \quad (*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5a_{n-1}x^n = \sum_{n=-1}^{\infty} 5a_n x^{n+1} = 5x\sum_{n=-1}^{\infty} a_n x^n = 5x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$\boxed{a_{-1} = 0}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4a_{n-2}x^n = \sum_{n=-2}^{\infty} 4a_n x^{n+2} = 4x^2\sum_{n=-2}^{\infty} a_n x^n = 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(*) upravíme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 - 3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot (1 - 5x + 4x^2) = 1 - 3x$$

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE POSL. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1-3x}{4x^2-5x+1}} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{4x-1} \quad / \cdot (x-1)\cdot(4x-1)$

VÝPOČET KOŘENŮ POLYNOMU $4x^2-5x+1$:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4} = \frac{5\pm3}{8} \quad x_1 = \frac{8}{8} = 1, \quad x_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{4x^2-5x+1 = 4\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right) = (x-1)\cdot(4x-1)}$$

$$1-3x = A\cdot(4x-1) + B(x-1)$$

$\underline{x=1}$: $1-3\cdot1 = -2 = A\cdot(4\cdot1-1) = +3A \implies \boxed{A = -\frac{2}{3}}$

$\underline{x=\frac{1}{4}}$: $1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}B \implies \boxed{B = -\frac{1}{3}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1-3x}{4x^2-5x+1} = \frac{-\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{4x-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-4x} =$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot4^n\right)x^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot4^n}$$ ... EXPLICITNÍ VYJÁDŘENÍ a_n

Najděte explicitní vyjádření pro $\underline{a_n}$, kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost definovaná rekurentním vztahem:

$$a_0 = \frac{5}{2}, \quad a_1 = -\frac{5}{4}$$

$$a_n = a_{n-2} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \geq 2 \quad (1)$$

ÚPRAVA (1) PRO $n=0$, $n=1$:

$\underline{n=0}$: $\quad a_{-2} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2} = a_0 = a_{-2} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \quad (2)$$

$\underline{n=1}$: $\quad a_{-1} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{4} = a_1 = a_{-1} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \quad (3)$$

$$[n=k] := \begin{cases} 1 & \text{pokud } n=k \\ 0 & \text{pokud } n \neq k \end{cases}$$

(1), (2), (3) souhrnně:

$$\forall n \geq 0: \quad a_n = a_{n-2} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1\,[n=0] - 2\,[n=1]$$

$\forall n \geq 0$ VYNÁSOBÍME VZTAH PRO a_n VÝRAZEM x^n A SEČTEME:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^n}_{= \boxed{x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^n}_{= \boxed{\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{3}{2-x}}} + 1\cdot x^0 - 2\cdot x^1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{3}{2-x} + 1 - 2x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot (1-x^2) = \frac{3+(1-2x)\cdot(2-x)}{2-x} = \frac{2x^2-5x+5}{2-x}$$

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE PRO $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{2x^2-5x+5}{(2-x)\cdot(1-x^2)} = \frac{2x^2-5x+5}{(2-x)\cdot(1-x)\cdot(1+x)}$

ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY:

$$\frac{2x^2-5x+5}{(2-x)\cdot(1-x)\cdot(1+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} \quad \ldots$$ (MINULÉ CVIČENÍ)

ROZVOJ DO MOCNINNÉ ŘADY (MINULÉ CVIČENÍ)

$$\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\cdot(-1)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 2\cdot(-1)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

DĚLENÍ ROVINY PŘÍMKAMI (1.30)

Najděte explicitní vyjádření pro p_n rekurentně zadané posloupnosti:

$p_0 = 1$

$p_n = p_{n-1} + n \qquad \forall n \geq 1$

$\underline{n=0}$: $\quad p_{-1} + 0 = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 = p_0 = p_{-1} + 0 + 1}$

$\Rightarrow \quad \forall n \geq 0: \quad p_n = p_{n-1} + n + 1 \cdot [n=0]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1} x^n}_{= \boxed{x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}_{= \boxed{\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) x^{n+1}}} + 1 \cdot x^0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) x^{n+1} = x \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n =$$

$$= \boxed{x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n + \frac{x}{(1-x)^2} + 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n (1-x) = \frac{x + (1-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} \qquad / \cdot (1-x)^3$$

$$x^2 - x + 1 = A\cdot(1-x)^2 + B(1-x) + C$$

nějakým způsobem spočítáme neznámé A, B, C, např. takto:

$\underline{x=1}$: $1-1+1 = \boxed{1 = C}$

$\underline{x=0}$: $0-0+1 = 1 = A+B+C = A+B+1 \Rightarrow A+B=0$ (1)

$\underline{x=-1}$: $(-1)^2-(-1)+1 = 3 = 4A+2B+C = 4A+2B+1 \Rightarrow 4A+2B=2$

$\Rightarrow 2A+B=1$ (2)

z (1), (2) dopočítáme A, B:
$$\begin{array}{cc} A & B \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{cc} A & B \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{B=-1} \quad \boxed{A=1}$$

$$\underline{\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n =$$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(n+1)+\binom{n+2}{2}\right)x^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_n} = 1-(n+1)+\binom{n+2}{2} = -n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} - \frac{2n}{2} =$$

$$\boxed{= \frac{n^2+n+2}{2}}$$

$$\boxed{\text{DÚ: 12.69, 12.75 SPOČÍTAT}}$$