1 Transformace integrálu

Příklad 1.

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = x^2 \\ \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-y}\,\mathrm{d}y$$

Nechť φ je taková funkce, že φ' je spojitá a nenulová na intervalu $[a, b]$. Obecně dostáváme vzorec:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

to odpovídá

Příklad 2.

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{t}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Označme $I = [a, b]$, pak platí

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proč absolutní hodnota? Protože neměníme orientaci na intervalu I (neuvažjeme integrál od b do a).

$$\iint_{B(0,r)} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\cos\varphi \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\right| d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^2\cos\varphi = 0$$

Nechť $F(a, b) = (g(a, b), h(a, b))$ je regulární zobrazení, pak

$$\iint_{F(A)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(g(a, b), h(a, b)) \cdot \left|\det\begin{pmatrix} g_a & g_b \\ h_a & h_b \end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.$$

2 Transformace náhodné veličiny

Nechť $Y = h(X)$, kde h je bijekce. Pak platí:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \le y\}) = \\ =& P(\{\omega \in \Omega \mid h(X) \le y\}) = \\ =& P(\{\omega \in \Omega \mid X \in h^{-1}(-\infty, y)\}) = \\ =& \int_{h^{-1}(-\infty,y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \\ =& \int_{-\infty}^{y} f_X(h(t)) \cdot |h'(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Odtud

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |h'(y)|.$$

Co kdy h není bijekce? Uvažme například transformaci $Y = X^2$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(|X| \le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = P(X \le \sqrt{y}) - P(X \le -\sqrt{y}) = \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Odtud

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X{-}\sqrt{y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Víme, že hustota je derivací kumulativní distribuční funkce, proto

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

3 Transformace náhodných vektorů

Je-li h regulární a prosté zobrazení s jakobiánem J_h, pak podobně jako výše máme pro $\boldsymbol{Y} = h(\boldsymbol{X})$. Označme $M = \prod_i(-\infty, y_i)$, pak

$$F_{\boldsymbol{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{h^{-1}(M)} f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_M f_{\boldsymbol{X}}(h^{-1}(\mathbf{x})) \cdot |J_h(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Odtud

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(h^{-1}(\mathbf{y})) \cdot |J_h(\mathbf{y})|.$$

Zejména pro $\boldsymbol{Y} = \mathbf{a} + B \cdot \boldsymbol{X}$, kde B je regulární matice

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(B^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a})) \cdot \frac{1}{|\det B|}.$$

Jaké má toto využití?

Příklad 3. Vyjádřete hustotu náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$ v závislosti na hustotách f_{X_1} a f_{X_2}.

Řešení. Položme $Y = Y_1$ a uvažme transformaci

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

tj. $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2$. Přitom

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odtud

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = f_{\boldsymbol{X}}(y_1 - y_2, y_2)$$

chceme hustotu pro Y_1, proto marginalizujeme:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(y_1 - y_2, y_2)\,\mathrm{d}y_2$$

Jsou-li dále X_1, X_2 nezávislé náhodné veličiny, pak

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2) \cdot f_{X_2}(y_2)\,\mathrm{d}y_2$$

□

4 Transformace normálního rozdělení

4.1 Jednorozměrný případ

Připomeňme hustotu normálního rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Uvažme transformaci $Y = a + bX$, pak

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot |b|} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-a}{b} - \mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot |b|} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a+b\mu)}{b\sigma}\right)^2}$$

Tedy $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$. Zejména pro $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dostáváme standardizované normální rozdělení.

4.2 Vícerozměrný případ

Necht $\boldsymbol{X} \sim N(\mu, \Sigma)$. Hustota vícerozměrného normálního rozdělení je tvaru:

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu)},$$

kde μ je tentokrát vektor středních hodnot, Σ je kovarianční matice (zejména je symetrická a pozitivně definitní). Uvažme nyní transformaci $\boldsymbol{Y} = \mathbf{a} + B\boldsymbol{X}$.

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(B^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})) \cdot \frac{1}{|\det B|} &= \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (B^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\mu)} |\det B^{-1}| = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det B|^{-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}B(B^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\mu))^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (B^{-1}B(B^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\mu))} = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot |\det B|^{-\frac{1}{2}} \cdot (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det B|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a}-B\mu))^T \cdot (B^{-1})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot B^{-1} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{a}-B\mu)} = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\det B\Sigma B)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-(\mathbf{a}+B\mu))^T \cdot (B\Sigma B^T)^{-1} \cdot (\mathbf{y}-(\mathbf{a}+B\mu))} =
\end{aligned}$$

Tedy $\boldsymbol{Y} \sim N(a + B\mu, B\Sigma B^T)$.
Všimněme si, že pokud $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, pak Σ je diagonální matice. Dále pro libovolnou kovarianční matici Σ platí, že existuje matice B taková, že $B\Sigma B^T$ je diagonální.
Víme, že nulová kovariance neznamená nezávislost (korelace vyjadřuje míru lineární závislosti, jiný typ závislosti může nastat i u nulové korelace). Nicméně mají-li dvě normálně rozdělené náhodné proměnné X_1, X_2 nulovou kovarianci, pak je Σ diagonální a platí

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2),$$

což ale znamená, že X_1 a X_2 jsou nezávislé. Tedy dvě normálně rozdělené náhodné proměnné jsou nezávislé právě tehdy, když mají nulovou kovarianci (tj. jsou lineárně nezávislé).
Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé, B je ortonormální matice (tj. $B \cdot B^T = I$) a $\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{X}$, pak také $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou nezávislé.

5 Gamma a Beta funkce

Definice. Pro $x > 0$ definujeme

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

Dále pro $x > 0$ a $y > 0$ definujeme

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} \,\mathrm{d}t.$$

Gamma funkce se definuje pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots\}$ jako holomorfní rozšíření integrálu výše. Beta funkce se definuje, pokud reálné části obou proměnných jsou kladné.

Věta 1 (Vlastnosti Gamma a Beta funkcí)**.**

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $B(x, y) = B(y, x)$
4. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Důkaz.

1. Per partes: $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-t^x \cdot e^{-t}]_0^\infty + x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = x \cdot \Gamma(x)$
2. $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$
3. Substituce $r = 1 - t$
   $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 (1-r)^{x-1} \cdot r^{y-1}\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^{y-1} \cdot (1-r)^{x-1}\,\mathrm{d}r = B(y,x).$
4. $\Gamma(x)\cdot\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^\infty r^{y-1} \cdot e^{-r}\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1} r^{y-1} e^{-(t+s)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \begin{vmatrix} t = ab \\ r = a(1-b) \end{vmatrix} =$
   $= \int_0^\infty \int_0^1 (ab)^{x-1}(a(1-b))^{y-1} e^{-a} |-a|\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a = \int_0^1 b^{x-1} \cdot (1-b)^{y-1}\,\mathrm{d}b \cdot \int_0^\infty a^{x+y-1} e^{-a}\,\mathrm{d}a =$
   $= B(x,y) \cdot \Gamma(x+y)$
5. $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(1) \cdot B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{b-b^2}}\,\mathrm{d}b = |x = b - \frac{1}{2}| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x)^2}} = |y = 2x| =$
   $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = |y = \sin t| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{|\cos t|}\,\mathrm{d}t = \pi$

□

6 χ^2 rozdělení a studentovo rozdělení

Definice (χ^2 rozdělení)**.** Řekneme, že náhodná veličina X má χ^2 rozdělení s $n > 0$ stupni volnosti, pokud její hustota má tvar

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Věta 2. *Nechť $U_1, \dots, U_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozdělením, pak*

$$\sum_{i=1}^n U_i^2 \sim \chi^2(n).$$

Důkaz. Nejprve dokažme tvrzení pro $n = 1$. Využijeme dříve odvozeného vzorce, že pro $Y = U^2$ platí

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_U(\sqrt{y}) + f_U(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

Pro $y \geq 0$ tedy platí

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{y}{2}} \right) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}.$$

Dále indukcí:

$$\begin{aligned}
f_{U_1^2+\dots+U_k^2+U_{k+1}^2}(u) &= \int_{-\infty}^\infty f_{\chi^2(k)}(u-x) f_{\chi^2(1)}(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^u (u-x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(u-x)} \cdot x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^u (u-x)^{\frac{n}{2}-1} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \\
\left| y = \frac{x}{u} \right| &= \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (u(1-y))^{\frac{n}{2}-1} (yu)^{-\frac{1}{2}} u\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{u^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1-y)^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{u^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \\
&= \frac{u^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})}
\end{aligned}$$

$\square$

Definice (Studentovo rozdělení)**.** Řekneme, že náhodná veličina X má Studentovo t rozdělení o $n > 0$ stupních volnosti, pokud její hustota je tvaru

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{n} + 1\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= \frac{n^{-\frac{1}{2}}(\frac{x^2}{n} + 1)^{-\frac{n+1}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Píšeme $X \sim t(n)$.

Věta 3. *Nechť náhodné veličiny $U \sim N(0,1)$ a $K \sim \chi^1(n)$ jsou nezávislé. Pak náhodná veličina*

$$T = \frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{K}} \sim t(n).$$

Důkaz. Nejdříve je potřeba odvodit vztah pro podíl nezávislých náhodných veličin. Uvažme náhodný vektor (X_1, X_2), kde $X_2 > 0$ a transformaci $Y_1 = \frac{cX_1}{X_2}$, $Y_2 = X_2$, tj. $X_1 = \frac{Y_1 Y_2}{c}$, $X_2 = Y_2$. Jakobián transformace je tedy

$$\det \begin{pmatrix} \frac{y_2}{c} & \frac{y_1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{y_2}{c}.$$

Odtud potom (s využitím nezávislosti) dostáváme marginalizací

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}\left(\frac{y_1 y_2}{c}\right) \cdot f_{X_2}(y_2) \cdot \left|\frac{y_2}{c}\right| \mathrm{d}y_2$$

Protože náhodná veličina X_2 je kladná, tak

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} f_{X_1}\left(\frac{y_1 y_2}{c}\right) \cdot f_{X_2}(y_2) \cdot y_2 \,\mathrm{d}y_2$$

Ještě potřebujeme spočítat hustotu náhodné veličiny $\sqrt{K}$. Pro $y \geq 0$ tedy máme

$$F_{\sqrt{K}}(y) = P(\sqrt{K} \leq y) = P(K \leq y^2) = \int_0^{y^2} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \,\mathrm{d}x$$

Potřebujeme, aby meze šly pouze do y, zvolme tedy transformaci $x = t^2$

$$F_{\sqrt{K}}(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^y t^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \,\mathrm{d}t,$$

odtud

$$f_{\sqrt{K}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Konečně můžeme spočítat

$$\begin{aligned} f_T(u) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2 x^2}{2n}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} x \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-\frac{u^2 x^2}{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} x \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{u^2}{n}+1\right)} x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní použijme substituci $t = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{u^2}{n} + 1\right)$, tedy $x = \left(\frac{2t}{\frac{u^2}{n}+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ a $x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{u^2}{n}+1\right)}$

$$f_T(u) = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{u^2}{n} + 1\right)^{-\frac{n-1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-t} \cdot \left(\frac{u^2}{n} + 1\right)^{-1} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{u^2}{n} + 1\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{u^2}{n} + 1\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

□

7 Rozdělení statistik odvozených od normálního rozdělení

Věta 4. *Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Označme*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

Pak platí

1. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,
2. $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$,
3. $K = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$,
4. $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$.

Poznamenejme, že

$$K = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2.$$

Kdybychom místo $\bar{X}$ vzali skutečnou střední hodnotu, tak by výsledek dopadl velmi podobně:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n),$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1),$$