Algebra II – jaro 2016 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *, \mu)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem $a * b = |a - b| + 2$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ a μ je unární operace definovaná předpisem
$$\mu(a) = \begin{cases} a - 2 & \text{pro } a \text{ sudé, } a \neq 2, \\ 2 & \text{pro } a = 2, \\ a + 1 & \text{pro } a \text{ liché.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$, kde prvky L jsou právě prázdná množina a čtverce $\langle p, p + r\rangle \times \langle q, q + r\rangle$, kde $p, q, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, je svaz.

3. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda přidáním největšího a nejmenšího prvku k uspořádané množině $(\{\, \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \varphi \text{ je rostoucí na } \mathbb{R}\,\}, \leq)$, kde pro $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je
$$\varphi \leq \psi \iff \forall r \in \mathbb{R}\colon \varphi(r) \leq \psi(r),$$
vznikne úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$, kde prvky L jsou právě množiny tvaru $\{\, N \subseteq \mathbb{N} \mid B \subseteq N \subseteq C\,\}$ pro nějaké množiny $B, C \subseteq \mathbb{N}$, je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis $\rho \sim \sigma \iff \rho \cap \rho^{-1} = \sigma \cap \sigma^{-1}$ definuje kongruenci $\sim$ algebry $(\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \kappa, \cap)$, kde κ je unární operace definovaná pro relaci $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem $\kappa(\rho) = \rho \circ \rho$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů f, g a h a nulárního operačního symbolu c. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathcal{P}(\{0,1\}^*)$ a s operacemi definovanými pro libovolné jazyky $L, M \subseteq \{0,1\}^*$ předpisy
$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}}(L, M) &= \{\, v \in \{0,1\}^* \mid \exists u \in L\colon uv \in M\,\}, \\ g^{\mathcal{A}}(L, M) &= \{\, u \in \{0,1\}^* \mid \exists v \in M\colon uv \in L\,\}, \\ h^{\mathcal{A}}(L, M) &= L \cdot M, \\ c^{\mathcal{A}} &= \{0,1\}^*. \end{aligned}$$
a) $f(x, h(x, f(x, y))) = f(x, y)$,
b) $g(x, f(c, x)) = g(x, c)$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů, které buď nemají žádný prvek, nebo mají nejmenší prvek, ale nemají žádný atom (tj. prvek pokrývající nejmenší prvek).