Algebra II – jaro 2016 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, \bullet)$, kde $\bullet$ je binární operace definovaná předpisem

$$a \bullet b = \begin{cases} a+2, & \text{pokud je } a \text{ liché a } b \text{ sudé,} \\ a-2, & \text{pokud je parita } a \text{ a } b \text{ stejná a } a \geq 3, \\ a, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina

$$(\{\, R \subseteq \mathbb{R} \mid R \text{ nemá největší prvek} \,\}, \subseteq)$$

je svaz.

3. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$, kde L je množina všech dědičných podmnožin B uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ takových, že buď $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nebo B má právě jeden maximální prvek, je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathbb{N}_0, |)$ je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis $\varphi \sim \psi \iff \forall r \in \mathbb{R}\colon |\varphi(r)| = |\psi(r)|$ definuje kongruenci $\sim$ algebry $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \odot)$, kde $+$ a $\odot$ jsou binární operace definované pro $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$ předpisy $(\varphi + \psi)(r) = \varphi(r) + \psi(r)$ a $(\varphi \odot \psi)(r) = \varphi(|\psi(r)|)$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárních operačních symbolů f, g a h. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, s operacemi $f^{\mathcal{A}}$ a $g^{\mathcal{A}}$ definovanými pro libovolnou binární relaci $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho) = \rho \cup (\rho \circ \rho^{-1}) \cup (\rho^{-1} \circ \rho)$, $g^{\mathcal{A}}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$ a s $h^{\mathcal{A}}(\rho)$ definovaným jako tranzitivní obal relace ρ.
   a) $h(f(f(x))) = h(g(x))$,
   b) $f(g(x)) = g(f(x))$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech algeber (A, κ, μ) se dvěma unárními operacemi κ a μ, které splňují podmínku $\forall a \in A\colon \kappa(a) = a$ nebo $\mu(a) = a$.