Diskrétní matematika – 4. týden
Elementární teorie čísel – Řešení kongruencí

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2019

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant **Matematika drsně a svižně**, *e*-text na `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant **Matematika drsně a svižně**, *e*-text na `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Michal Bulant, výukový text k přednášce **Elementární teorie čísel**, `http://is.muni.cz/el/1431/podzim2012/M6520/um/main-print.pdf`
- Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša, **Metody řešení matematických úloh**. MU Brno, 2001.
- William Stein, **Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets**, Springer, 2008. Dostupné na `http://wstein.org/ent/ent.pdf`
- Radan Kučera, výukový text k přednášce **Algoritmy teorie čísel**, `http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/ATC10.pdf`

Plán přednášky

Kongruence o jedné neznámé

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Zápis

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

nazýváme *kongruencí o jedné neznámé* x a rozumíme jím úkol nalézt *množinu řešení*, tj. množinu všech takových čísel $c \in \mathbb{Z}$, pro která $f(c) \equiv g(c) \pmod{m}$.
Dvě kongruence o jedné neznámé nazveme *ekvivalentní*, mají-li stejnou množinu řešení.

Kongruence o jedné neznámé

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Zápis

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

nazýváme *kongruencí o jedné neznámé* x a rozumíme jím úkol nalézt *množinu řešení*, tj. množinu všech takových čísel $c \in \mathbb{Z}$, pro která $f(c) \equiv g(c) \pmod{m}$.
Dvě kongruence o jedné neznámé nazveme *ekvivalentní*, mají-li stejnou množinu řešení.
Uvedená kongruence je ekvivalentní s kongruencí

$$\underbrace{f(x) - g(x)}_{\in \mathbb{Z}[x]} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Hledání řešení výčtem všech možností

Věta

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. *Pro libovolná* $a, b \in \mathbb{Z}$ *platí*

$$a \equiv b \pmod{m} \implies f(a) \equiv f(b) \pmod{m}.$$

Hledání řešení výčtem všech možností

Věta

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$a \equiv b \pmod{m} \implies f(a) \equiv f(b) \pmod{m}.$$

Důkaz.

Nechť je $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, kde $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$. Protože $a \equiv b \pmod{m}$, pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $c_i a^i \equiv c_i b^i \pmod{m}$, a tedy sečtením těchto kongruencí pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a kongruence $c_0 \equiv c_0 \pmod{m}$ dostaneme

$$c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 \equiv c_n b^n + \cdots + c_1 b + c_0 \pmod{m},$$

tj. $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$. □

Počet řešení kongruence

Důsledek

Množina řešení libovolné kongruence modulo m je sjednocením některých zbytkových tříd modulo m.

Počet řešení kongruence

Důsledek

Množina řešení libovolné kongruence modulo m je sjednocením některých zbytkových tříd modulo m.

Definice

Počtem řešení kongruence o jedné neznámé modulo m rozumíme počet zbytkových tříd modulo m obsahujících řešení této kongruence.

Počet řešení kongruence

Důsledek

Množina řešení libovolné kongruence modulo m je sjednocením některých zbytkových tříd modulo m.

Definice

Počtem řešení kongruence o jedné neznámé modulo m rozumíme počet zbytkových tříd modulo m obsahujících řešení této kongruence.

Příklad

1. Kongruence $2x \equiv 3 \pmod 3$ má jedno řešení (modulo 3).
2. Kongruence $10x \equiv 15 \pmod{15}$ má pět řešení (modulo 15).
3. Kongruence z příkladu (1) a (2) jsou ekvivalentní.

Věta

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Označme $d = (a, m)$. Pak kongruence

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

(o jedné neznámé x) má řešení právě tehdy, když $d \mid b$.
Pokud platí $d \mid b$, má tato kongruence právě d řešení (modulo m).

Věta

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Označme $d = (a, m)$. Pak kongruence

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

(o jedné neznámé x) má řešení právě tehdy, když $d \mid b$.
Pokud platí $d \mid b$, má tato kongruence právě d řešení (modulo m).

Důkaz.

Dokážeme nejprve, že uvedená podmínka je nutná. Je-li celé číslo c řešením této kongruence, pak nutně $m \mid a \cdot c - b$. Pokud přitom $d = (a, m)$, pak protože $d \mid m$ i $d \mid a \cdot c - b$ a
$d \mid a \cdot c - (a \cdot c - b) = b$.

Dokončení důkazu.

Obráceně dokážeme, že pokud $d \mid b$, pak má daná kongruence právě d řešení modulo m. Označme $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ a $m_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$ a $m = d \cdot m_1$. Řešená kongruence je tedy ekvivalentní s kongruencí

$$a_1 \cdot x \equiv b_1 \pmod{m_1},$$

kde $(a_1, m_1) = 1$. Tuto kongruenci můžeme vynásobit číslem $a_1^{\varphi(m_1)-1}$ a díky Eulerově větě obdržíme

$$x \equiv b_1 \cdot a_1^{\varphi(m_1)-1} \pmod{m_1}.$$

Tato kongruence má jediné řešení modulo m_1 a tedy $d = m/m_1$ řešení modulo m. □

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

1. Nejprve využijeme Eulerovu větu, stejně jako v důkazu předchozí věty.

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

1. Nejprve využijeme Eulerovu větu, stejně jako v důkazu předchozí věty.
2. Další možností je využít Bezoutovu větu.

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

1. Nejprve využijeme Eulerovu větu, stejně jako v důkazu předchozí věty.
2. Další možností je využít Bezoutovu větu.
3. Obvykle nejrychlejším, ale nejhůře algoritmizovatelným způsobem řešení je metoda takových úprav kongruence, které zachovávají množinu řešení.

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

1. Nejprve využijeme Eulerovu větu, stejně jako v důkazu předchozí věty.
2. Další možností je využít Bezoutovu větu.
3. Obvykle nejrychlejším, ale nejhůře algoritmizovatelným způsobem řešení je metoda takových úprav kongruence, které zachovávají množinu řešení.

$$39x \equiv 41 \pmod{47} \iff -8x \equiv -6 \pmod{47} \iff$$

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

1. Nejprve využijeme Eulerovu větu, stejně jako v důkazu předchozí věty.
2. Další možností je využít Bezoutovu větu.
3. Obvykle nejrychlejším, ale nejhůře algoritmizovatelným způsobem řešení je metoda takových úprav kongruence, které zachovávají množinu řešení.

$$39x \equiv 41 \pmod{47} \iff -8x \equiv -6 \pmod{47} \iff$$
$$4x \equiv 3 \pmod{47} \iff 4x \equiv -44 \pmod{47} \iff$$

Následující příklad ukáže, že postup uvedený v důkazu věty obvykle není tím nejefektivnějším – s výhodou lze použít jak Bezoutovu větu, tak ekvivalentní úpravy řešené kongruence.

Příklad

Řešte $39x \equiv 41 \pmod{47}$

1. Nejprve využijeme Eulerovu větu, stejně jako v důkazu předchozí věty.
2. Další možností je využít Bezoutovu větu.
3. Obvykle nejrychlejším, ale nejhůře algoritmizovatelným způsobem řešení je metoda takových úprav kongruence, které zachovávají množinu řešení.

$$\begin{aligned} 39x \equiv 41 \pmod{47} &\iff -8x \equiv -6 \pmod{47} \iff \\ 4x \equiv 3 \pmod{47} &\iff 4x \equiv -44 \pmod{47} \iff \\ x \equiv -11 \pmod{47} &\iff x \equiv 36 \pmod{47} \end{aligned}$$

Wilsonova věta

Pomocí věty o řešitelnosti lineárních kongruencí lze dokázat mj. významnou Wilsonovu větu udávající nutnou (i postačující) podmínku prvočíselnosti. Takové podmínky jsou velmi významné ve výpočetní teorii čísel, kdy je třeba efektivně poznat, je-li dané velké číslo prvočíslem. Bohužel dosud není známo, jak rychle vypočítat modulární faktoriál velkého čísla, proto není v praxi Wilsonova věta k tomuto účelu používána.

Wilsonova věta

Pomocí věty o řešitelnosti lineárních kongruencí lze dokázat mj. významnou Wilsonovu větu udávající nutnou (i postačující) podmínku prvočíselnosti. Takové podmínky jsou velmi významné ve výpočetní teorii čísel, kdy je třeba efektivně poznat, je-li dané velké číslo prvočíslem. Bohužel dosud není známo, jak rychle vypočítat modulární faktoriál velkého čísla, proto není v praxi Wilsonova věta k tomuto účelu používána.

Věta (Wilsonova)

Přirozené číslo $n > 1$ je prvočíslo, právě když

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$$

Vcelku přímočarý důkaz je v učebnici.

Plán přednášky

Soustavy lineárních kongruencí

Máme-li soustavu lineárních kongruencí o téže neznámé, můžeme podle předchozí věty rozhodnout o řešitelnosti každé z nich.
V případě, kdy aspoň jedna z kongruencí nemá řešení, nemá řešení ani celá soustava. Naopak, jestliže každá z kongruencí řešení má, upravíme ji do tvaru $x \equiv c_i \pmod{m_i}$.

Soustavy lineárních kongruencí

Máme-li soustavu lineárních kongruencí o téže neznámé, můžeme podle předchozí věty rozhodnout o řešitelnosti každé z nich.
V případě, kdy aspoň jedna z kongruencí nemá řešení, nemá řešení ani celá soustava. Naopak, jestliže každá z kongruencí řešení má, upravíme ji do tvaru $x \equiv c_i \pmod{m_i}$. Dostaneme tak soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv c_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

Soustavy lineárních kongruencí

Máme-li soustavu lineárních kongruencí o téže neznámé, můžeme podle předchozí věty rozhodnout o řešitelnosti každé z nich.
V případě, kdy aspoň jedna z kongruencí nemá řešení, nemá řešení ani celá soustava. Naopak, jestliže každá z kongruencí řešení má, upravíme ji do tvaru $x \equiv c_i \pmod{m_i}$. Dostaneme tak soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv c_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

Zřejmě stačí vyřešit případ $k = 2$, řešení soustavy více kongruencí snadno obdržíme opakovaným řešením soustav dvou kongruencí.

Věta

Nechť c_1, c_2 *jsou celá čísla,* m_1, m_2 *přirozená. Označme* $d = (m_1, m_2)$. *Soustava dvou kongruencí*

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

v případě $c_1 \not\equiv c_2 \pmod{d}$ *nemá řešení. Jestliže naopak* $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$, *pak existuje celé číslo* c *tak, že* $x \in \mathbb{Z}$ *vyhovuje soustavě, právě když vyhovuje kongruenci*

$$x \equiv c \pmod{[m_1, m_2]}.$$

Věta

Nechť c_1, c_2 jsou celá čísla, m_1, m_2 přirozená. Označme $d = (m_1, m_2)$. Soustava dvou kongruencí

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

v případě $c_1 \not\equiv c_2 \pmod{d}$ nemá řešení. Jestliže naopak $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$, pak existuje celé číslo c tak, že $x \in \mathbb{Z}$ vyhovuje soustavě, právě když vyhovuje kongruenci

$$x \equiv c \pmod{[m_1, m_2]}.$$

Důkaz.

Má-li soustava nějaké řešení $x \in \mathbb{Z}$, platí nutně $x \equiv c_1 \pmod{d}$, $x \equiv c_2 \pmod{d}$, a tedy i $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$. Odtud plyne, že v případě $c_1 \not\equiv c_2 \pmod{d}$ soustava nemůže mít řešení.

Dokončení důkazu.

Předpokládejme dále $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$. První kongruenci řešené soustavy vyhovují všechna celá čísla x tvaru $x = c_1 + tm_1$, kde $t \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Toto x bude vyhovovat i druhé kongruenci soustavy, právě když bude platit $c_1 + tm_1 \equiv c_2 \pmod{m_2}$, tj. $tm_1 \equiv c_2 - c_1 \pmod{m_2}$.

Dokončení důkazu.

Předpokládejme dále $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$. První kongruenci řešené soustavy vyhovují všechna celá čísla x tvaru $x = c_1 + tm_1$, kde $t \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Toto x bude vyhovovat i druhé kongruenci soustavy, právě když bude platit $c_1 + tm_1 \equiv c_2 \pmod{m_2}$, tj. $tm_1 \equiv c_2 - c_1 \pmod{m_2}$. Podle věty o řešitelnosti lineárních kongruencí má tato kongruence (vzhledem k t) řešení, neboť $d = (m_1, m_2)$ dělí $c_2 - c_1$, a $t \in \mathbb{Z}$ splňuje tuto kongruenci právě když

$$t \equiv \frac{c_2 - c_1}{d} \cdot \left(\frac{m_1}{d}\right)^{\varphi\left(\frac{m_2}{d}\right)-1} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m_2}{d}\right),$$

Dokončení důkazu.

Předpokládejme dále $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$. První kongruenci řešené soustavy vyhovují všechna celá čísla x tvaru $x = c_1 + tm_1$, kde $t \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Toto x bude vyhovovat i druhé kongruenci soustavy, právě když bude platit $c_1 + tm_1 \equiv c_2 \pmod{m_2}$, tj. $tm_1 \equiv c_2 - c_1 \pmod{m_2}$. Podle věty o řešitelnosti lineárních kongruencí má tato kongruence (vzhledem k t) řešení, neboť $d = (m_1, m_2)$ dělí $c_2 - c_1$, a $t \in \mathbb{Z}$ splňuje tuto kongruenci právě když

$$t \equiv \frac{c_2 - c_1}{d} \cdot \left(\frac{m_1}{d}\right)^{\varphi\left(\frac{m_2}{d}\right)-1} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m_2}{d}\right),$$

tj. právě když

$$x = c_1 + tm_1 = c_1 + (c_2 - c_1) \cdot \left(\tfrac{m_1}{d}\right)^{\varphi\left(\frac{m_2}{d}\right)} + r\frac{m_1 m_2}{d} = c + r \cdot [m_1, m_2],$$

kde $r \in \mathbb{Z}$ je libovolné a $c = c_1 + (c_2 - c_1) \cdot (m_1/d)^{\varphi(m_2/d)}$, neboť $m_1 m_2 = d \cdot [m_1, m_2]$. Našli jsme tedy takové $c \in \mathbb{Z}$, že libovolné $x \in \mathbb{Z}$ splňuje soustavu, právě když $x \equiv c \pmod{[m_1, m_2]}$, což jsme chtěli dokázat. □

Všimněme si, že důkaz této věty je konstruktivní, tj. udává vzorec, jak číslo c najít. Věta nám tedy dává metodu, jak pomocí jediné kongruence zachytit podmínku, že x vyhovuje této soustavě . Podstatné je, že tato nová kongruence je téhož tvaru jako obě původní. Můžeme proto tuto metodu aplikovat i na soustavu – nejprve z první a druhé kongruence vytvoříme kongruenci jedinou, které vyhovují právě ta x, která vyhovovala původním dvěma kongruencím, pak z nově vzniklé a z třetí kongruence vytvoříme další atd. Při každém kroku se nám počet kongruencí soustavy sníží o 1, po $k-1$ krocích tedy dostaneme kongruenci jedinou, která nám bude popisovat všechna řešení dané soustavy.

Čínská zbytková věta (CRT)

Ve čtvrtém století se čínský matematik Sun Ze (Sun Tsu) ptal na číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2, při dělení pěti zbytek 3 a při dělení sedmi je zbytek opět 2.

Řešení

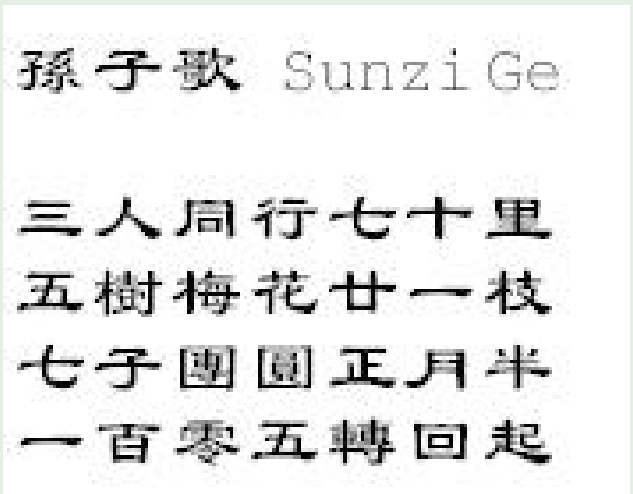
Odpověď je (prý) ukryta v následující písni:

Čínská zbytková věta (CRT)

Ve čtvrtém století se čínský matematik Sun Ze (Sun Tsu) ptal na číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2, při dělení pěti zbytek 3 a při dělení sedmi je zbytek opět 2.

Řešení

Odpověď je (prý) ukryta v následující písni:



Důsledek (Čínská zbytková věta)

Nechť $m_1, , \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ *jsou po dvou nesoudělná,* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. *Pak platí: soustava*

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

má jediné řešení modulo $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$.

Důsledek (Čínská zbytková věta)

Nechť $m_1, , \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ *jsou po dvou nesoudělná,* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. *Pak platí: soustava*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

má jediné řešení modulo $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$.

Důkaz.

Jde o jednoduchý důsledek předchozího tvrzení, který lze ale rovněž elegantně dokázat přímo. □

Uvědomme si, že jde o docela silné tvrzení (které ve skutečnosti platí v podstatně obecnějších algebraických strukturách), umožňující nám při předepsání libovolných zbytků podle zvolených (po dvou nesoudělných) modulů garantovat, že existuje číslo s těmito předpsanými zbytky.

Uvědomme si, že jde o docela silné tvrzení (které ve skutečnosti platí v podstatně obecnějších algebraických strukturách), umožňující nám při předepsání libovolných zbytků podle zvolených (po dvou nesoudělných) modulů garantovat, že existuje číslo s těmito předpsanými zbytky.

Příklad

Řešte systém kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{10} \\ x &\equiv 5 \pmod{18} \\ x &\equiv -4 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že jde o docela silné tvrzení (které ve skutečnosti platí v podstatně obecnějších algebraických strukturách), umožňující nám při předepsání libovolných zbytků podle zvolených (po dvou nesoudělných) modulů garantovat, že existuje číslo s těmito předpsanými zbytky.

Příklad

Řešte systém kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{10} \\ x &\equiv 5 \pmod{18} \\ x &\equiv -4 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Řešení

Výsledkem je $x \equiv 221 \pmod{450}$.

Čínskou zbytkovou větu můžeme použít také „v opačném směru“.

Příklad

Řešte kongruenci $23\,941x \equiv 915 \pmod{3564}$.

Čínskou zbytkovou větu můžeme použít také „v opačném směru“.

Příklad

Řešte kongruenci $23\,941x \equiv 915 \pmod{3564}$.

Řešení

Rozložme $3564 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11$. Protože ani 2, ani 3, ani 11 nedělí číslo 23 941, platí $(23\,941, 3564) = 1$ a má tedy kongruence řešení. Protože $\varphi(3564) = 2 \cdot (3^3 \cdot 2) \cdot 10 = 1080$, je řešení tvaru $x \equiv 915 \cdot 23\,941^{1079} \pmod{3564}$. Úprava čísla stojícího na pravé straně by však vyžádala značné úsilí. Proto budeme kongruenci řešit poněkud jinak.

Řešení

Víme, že $x \in \mathbb{Z}$ řešením dané kongruence, právě když je řešením soustavy

$$23941x \equiv 915 \pmod{2^2}$$
$$23941x \equiv 915 \pmod{3^4}$$
$$23941x \equiv 915 \pmod{11}.$$

Řešení

Víme, že $x \in \mathbb{Z}$ řešením dané kongruence, právě když je řešením soustavy

$$23941x \equiv 915 \pmod{2^2}$$
$$23941x \equiv 915 \pmod{3^4}$$
$$23941x \equiv 915 \pmod{11}.$$

Vyřešíme-li postupně každou z kongruencí soustavy, dostaneme ekvivalentní soustavu

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$
$$x \equiv -3 \pmod{81}$$
$$x \equiv -4 \pmod{11},$$

Řešení

Víme, že $x \in \mathbb{Z}$ řešením dané kongruence, právě když je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 23941x &\equiv 915 \pmod{2^2} \\ 23941x &\equiv 915 \pmod{3^4} \\ 23941x &\equiv 915 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Vyřešíme-li postupně každou z kongruencí soustavy, dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{4} \\ x &\equiv -3 \pmod{81} \\ x &\equiv -4 \pmod{11}, \end{aligned}$$

odkud snadno postupem pro řešení soustav kongruencí dostaneme $x \equiv -1137 \pmod{3564}$, což je také řešení zadané kongruence.

Modulární reprezentace čísel

Při počítání s velkými čísly je někdy výhodnější než s dekadickým či binárním zápisem čísel pracovat s tzv. *modulární reprezentací* (též *residue number system*), která umožňuje snadnou paralelizaci výpočtů s velkými čísly. Takový systém je určen k-ticí modulů (obvykle po dvou nesoudělných) a každé číslo menší než jejich součin je pak jednoznačně reprezentováno k-ticí zbytků (jejichž hodnoty nepřevyšují příslušné moduly) – viz např. `http://goo.gl/oM25m`.

Příklad

Pětice modulů $3, 5, 7, 11, 13$ nám umožní jednoznačně reprezentovat čísla menší než 15015 a efektivně provádět (v případě potřeby distribuovaně) běžné aritmetické operace. Vypočtěme např. součin čísel 1234 a 5678, v této modulární soustavě reprezentovaných pěticemi $[1, 4, 2, 2, 12]$ a $[2, 3, 1, 2, 10]$.

Příklad

Pětice modulů $3, 5, 7, 11, 13$ nám umožní jednoznačně reprezentovat čísla menší než 15015 a efektivně provádět (v případě potřeby distribuovaně) běžné aritmetické operace. Vypočtěme např. součin čísel 1234 a 5678, v této modulární soustavě reprezentovaných pěticemi $[1, 4, 2, 2, 12]$ a $[2, 3, 1, 2, 10]$. Součin provedeme po složkách a dostaneme $[2, 2, 2, 4, 3]$, což na závěr pomocí CRT převedeme zpět na 9662, což je modulo 15015 totéž jako $1234 \cdot 5678$.

Plán přednášky

Binomické kongruence

V této části se zaměříme na řešení speciálních typů polynomiálních kongruencí vyššího stupně, tzv. *binomických kongruencí*. Jde o analogii binomických rovnic, kdy polynomem $f(x)$ je dvojčlen $x^n - a$. Snadno se ukáže, že se můžeme omezit na případ, kdy je a nesoudělné s modulem kongruence – v opačném případě totiž vždy můžeme pomocí ekvivalentních úprav kongruenci na tento případ převést nebo rozhodnout, že kongruence není řešitelná.

Binomické kongruence

V této části se zaměříme na řešení speciálních typů polynomiálních kongruencí vyššího stupně, tzv. *binomických kongruencí*. Jde o analogii binomických rovnic, kdy polynomem $f(x)$ je dvojčlen $x^n - a$. Snadno se ukáže, že se můžeme omezit na případ, kdy je a nesoudělné s modulem kongruence – v opačném případě totiž vždy můžeme pomocí ekvivalentních úprav kongruenci na tento případ převést nebo rozhodnout, že kongruence není řešitelná.

Příklad

Řešte kongruenci

$$x^3 \equiv 3 \pmod{18}.$$

Řešení

Protože je $(3, 18) = 3$, nutně $3 \mid x$. Užijeme-li, podobně jako výše, substituci $x = 3 \cdot x_1$, dostáváme kongruenci $27x_1^3 \equiv 3 \pmod{18}$, která zřejmě nemá řešení, protože $(27, 18) \nmid 3$.

Mocninné zbytky

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Číslo a nazveme *n-tým mocninným zbytkem modulo m*, pokud je kongruence

$$x^n \equiv a \pmod{m}$$

řešitelná. V opačném případě nazveme a *n-tým mocninným nezbytkem modulo m*.
Pro $n = 2, 3, 4$ používáme termíny kvadratický, kubický a bikvadratický zbytek, resp. nezbytek modulo m.

Mocninné zbytky

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Číslo a nazveme *n-tým mocninným zbytkem modulo m*, pokud je kongruence

$$x^n \equiv a \pmod{m}$$

řešitelná. V opačném případě nazveme a *n-tým mocninným nezbytkem modulo m*.
Pro $n = 2, 3, 4$ používáme termíny kvadratický, kubický a bikvadratický zbytek, resp. nezbytek modulo m.

Ukážeme, jakým způsobem řešit binomické kongruence modulo m, pokud modulo m existují primitivní kořeny (tedy zejména, je-li modul liché prvočíslo nebo jeho mocnina).

Řešení binomických kongruencí

Věta

Buď $m \in \mathbb{N}$ takové, že modulo m existují primitivní kořeny. Dále nechť $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Pak kongruence $x^n \equiv a \pmod{m}$ je řešitelná (tj. a je n-tý mocninný zbytek modulo m), právě když $a^{\varphi(m)/d} \equiv 1 \pmod{m}$, kde $d = (n, \varphi(m))$.
Přitom, je-li tato kongruence řešitelná, má právě d řešení.

Vcelku přímočarý důkaz je v učebnici.

Řešení binomických kongruencí

Věta

Buď $m \in \mathbb{N}$ takové, že modulo m existují primitivní kořeny. Dále nechť $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Pak kongruence $x^n \equiv a \pmod{m}$ je řešitelná (tj. a je n-tý mocninný zbytek modulo m), právě když $a^{\varphi(m)/d} \equiv 1 \pmod{m}$, kde $d = (n, \varphi(m))$.
Přitom, je-li tato kongruence řešitelná, má právě d řešení.

Vcelku přímočarý důkaz je v učebnici.

Důsledek

Za předpokladů předchozí věty, je-li navíc $(n, \varphi(m)) = 1$, má kongruence $x^n \equiv a \pmod{m}$ vždy řešení, a to jediné. Jinými slovy, umocňování na n-tou (kde n je nesoudělné s $\varphi(m)$) je bijekce na množině $\mathbb{Z}_m^\times$ invertibilních zbytkových tříd modulo m.

Plán přednášky

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Celé číslo $g \in \mathbb{Z}$, $(g, m) = 1$ nazveme *primitivním kořenem* modulo m, pokud je jeho řád modulo m roven $\varphi(m)$.

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Celé číslo $g \in \mathbb{Z}$, $(g, m) = 1$ nazveme *primitivním kořenem* modulo m, pokud je jeho řád modulo m roven $\varphi(m)$.

Lemma

Je-li g primitivní kořen modulo m, pak pro každé číslo $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ existuje jediné $x_a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_a < \varphi(m)$ s vlastností $g^{x_a} \equiv a \pmod{m}$.

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Celé číslo $g \in \mathbb{Z}$, $(g, m) = 1$ nazveme *primitivním kořenem* modulo m, pokud je jeho řád modulo m roven $\varphi(m)$.

Lemma

Je-li g primitivní kořen modulo m, pak pro každé číslo $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ existuje jediné $x_a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_a < \varphi(m)$ s vlastností $g^{x_a} \equiv a \pmod{m}$. Funkce $a \mapsto x_a$ se nazývá **diskrétní logaritmus**, *příp. index čísla x (vzhledem k danému m a zafixovanému primitivnímu kořeni g) a je bijekcí mezi množinami $\{a \in \mathbb{Z};\ (a, m) = 1, 0 < a < m\}$ a $\{x \in \mathbb{Z};\ 0 \leq x < \varphi(m)\}$.*

Definice

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Celé číslo $g \in \mathbb{Z}$, $(g, m) = 1$ nazveme *primitivním kořenem* modulo m, pokud je jeho řád modulo m roven $\varphi(m)$.

Lemma

Je-li g primitivní kořen modulo m, pak pro každé číslo $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ existuje jediné $x_a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_a < \varphi(m)$ s vlastností $g^{x_a} \equiv a \pmod{m}$. Funkce $a \mapsto x_a$ se nazývá **diskrétní logaritmus**, *příp. index čísla x (vzhledem k danému m a zafixovanému primitivnímu kořeni g) a je bijekcí mezi množinami $\{a \in \mathbb{Z};\ (a, m) = 1, 0 < a < m\}$ a $\{x \in \mathbb{Z};\ 0 \leq x < \varphi(m)\}$.*

Důkaz.

Předpokládejme, že pro $x, y \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x, y < \varphi(m)$ je $g^x \equiv g^y \pmod{m}$. Z vlastností řádu pak $x \equiv y \pmod{\varphi(m)}$, tj. $x = y$, proto je zobrazení injektivní, a tedy i surjektivní. □