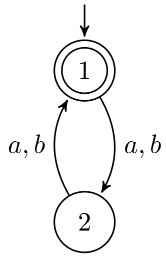
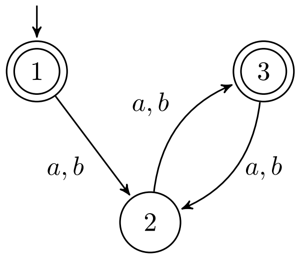
Na obrázku níže je znázorněn minimální automat pro L, spolu s příslušnými třídami rozkladu $\Sigma^*/{\sim_L} = \{T_1, T_2\}$.

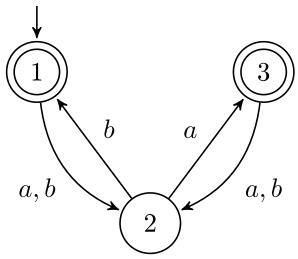


$T_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má sudou délku}\}$
$T_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má lichou délku}\}$

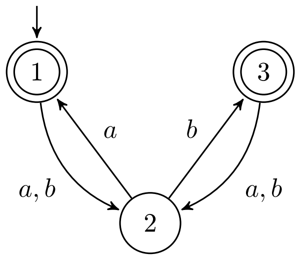
Zadání po nás chce pravou kongruenci $\sim$, která vznikne z $\sim_L$ rozdělením některé třídy rozkladu na dvě. Na minimálním automatu to odpovídá zdvojení některého stavu tak, že oba „dvojníci" budou dosažitelní. Do prvního stavu vedou 3 hrany, takže máme 3 možnosti (kterákoli hrana může zůstat samotná):



$T_1 = \{\varepsilon\}$
$T_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má lichou délku}\}$
$T_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má kladnou sudou délku}\}$

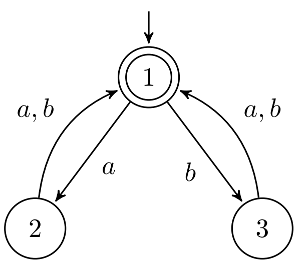


$T_1 = \{\varepsilon\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má kladnou sudou délku a končí béčkem}\}$
$T_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má lichou délku}\}$
$T_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má kladnou sudou délku a končí áčkem}\}$



$T_1 = \{\varepsilon\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má kladnou sudou délku a končí áčkem}\}$
$T_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má lichou délku}\}$
$T_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má kladnou sudou délku a končí béčkem}\}$

Do druhého stavu vedou 2 hrany, takže jedinou možností je rozdělit je „$1 + 1$".



$T_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má sudou délku}\}$
$T_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má lichou délku a končí áčkem}\}$
$T_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ má lichou délku a končí béčkem}\}$

Pro odpovídající pravé kongruence $\sim$, určené rozkladem $\Sigma^*/{\sim} = \{T_1, T_2, T_3\}$, v prvních dvou případech platí $a^2 \nsim \varepsilon$ (řešení **a)**), ve zbylých případech platí $a^2 \sim \varepsilon$ (řešení **b)**). Všechny 4 splňují $a^2 \sim a^4$, takže pro úlohu **c)** žádná vyhovující pravá kongruence $\sim$ neexistuje; důkaz je následující:

Předpokládejme pro spor, že existuje vyhovující $\sim$. Jelikož $\operatorname{index}(\sim) = 3$, musí některá dvě ze slov a, a^2, a^3, a^4 být ekvivalentní dle $\sim$, ovšem všechny možnosti přivedeme ke sporu:

- $a^i \sim a^j$ pro i, j různé parity je ve sporu s požadavkem, že L je sjednocením tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$, neboť zřejmě právě jedno z dotyčných slov leží v L.
- $a^2 \sim a^4$ je přímo vyloučeno zadáním;
- $a \sim a^3$ implikuje (přiřetězením a zprava) $a^2 \sim a^4$, spor.